线性代数

主编　郁大刚

科学出版社

线 性 代 数

主　编　郁大刚
副主编　俞美华　周　耘

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书共分六章，内容包括行列式、矩阵、n维向量与线性方程组、向量空间、矩阵的相似对角化、实二次型. 每章后面均配有适量的习题. 本书取材适当、叙述简洁、结构合理、论证严谨、富于启发性.

本书可作为一般本科院校及独立学院的线性代数课程教材，也可供科技工作者、自学者和准备考研者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郁大刚主编. —北京：科学出版社，2016.9

ISBN 978-7-03-049635-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郁… Ⅲ. ①线性代数–高等学校–教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 195123 号

责任编辑：李淑丽 孙翠勤 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张：8 1/2
字数：171 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

线性代数是大学数学教育中的一门主要基础课程. 本书从独立学院培养应用型本科人才的实际出发，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试大纲，并结合近年来东南大学成贤学院线性代数课程的教学改革实践编写而成.

本书力求通俗易懂，精简整合了线性代数的内容，略去了一些繁复的证明，代之以对理论的诠释和直观说明，通过较多的典型例题使学生熟悉理论、掌握应用理论解决问题的方法和技巧. 内容编排上注重由浅入深，强调基本概念及其之间的本质联系，强调数学的基本思想、基本方法，将抽象内容与具体例子有机结合，并注意线性代数课程的几何背景，充分体现教材的适用性.

本书共六章，第 1 章介绍行列式；第 2 章介绍矩阵；第 3 章介绍 n 维向量与线性方程组；第 4 章介绍向量空间；第 5 章介绍矩阵的相似对角化；第 6 章介绍实二次型. 每章配有适量的习题.

全书编写分工为：第 1、2 章由俞美华编写；第 4～6 章由周耘编写；第 3 章由俞美华与周耘共同编写；郁大刚教授审阅了全稿.

本书在编写过程中得到东南大学成贤学院及基础部的领导和同事的支持和帮助，特在此表示感谢.

限于作者水平，书中难免存在不足之处，望广大读者不吝指正.

编　者

2016 年 6 月

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题. 行列式在线性代数以及其他学科(如物理学、力学)中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 本章主要介绍二阶、三阶行列式的定义以及 n 阶行列式的定义、性质及计算方法.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

已知二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 是常数， x_1,x_2 是未知量.

由消元法，消去 x_2 ，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2$ ，类似地，消去 x_1 ，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$ ，则当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{1.1.1}$$

为了使式(1.1.1)更简便，利于记忆，将式中的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

定义 1.1.1　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，简记为 D ，且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，二阶行列式由两行两列共 4 个元素构成； a_{ij} 的下标 i 表示元素所在的行， j 表示元素所在的列； a_{11},a_{22} 所在位置的连线称为主对角线， a_{12},a_{21} 所在位置的连线称为副对角线；二阶行列式等于主对角线元素相乘减去副对角线元素相乘. 可见，二阶行列式是不同行不同列元素乘积的代数和.

类似地，式(1.1.1)中的分子也可用二阶行列式表示，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2-b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

于是，式(1.1.1)可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

1.1.2　三阶行列式

类似于二阶行列式的定义可得三阶行列式的定义.

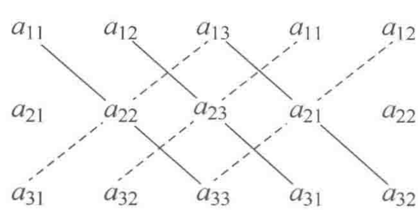
定义 1.1.2　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为**三阶行列式**，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.1.2}$$

由定义知，三阶行列式由三行三列 9 个元素构成，它等于行列式的第一行元素与一个对应二阶行列式的乘积的代数和，这个二阶行列式是由原行列式划去该元素所在行及所在列得到的. 利用二阶行列式的定义，式(1.1.2)可整理为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

三阶行列式也是由不同行不同列的三个数相乘得到的 6 项代数和，其计算规律遵循如下图所示的对角线法，在三阶行列式的数阵右边添上它的第一列和第二列，排成图中三行五列的数阵，图中画有三条实线和三条虚线，实线上三个元素乘积的前面带正号，虚线上三个元素乘积的前面带负号，就得到三阶行列式的计算方法，该方法也称为**对角线法则**.



例 1.1.1　计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解法一

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&4\\2&3\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot(0-8)-3\cdot(6-4)+1\cdot(4-0)=-10.$$

解法二

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{vmatrix}=1\times0\times3+3\times4\times1+1\times2\times2-(1\times0\times1+1\times4\times2+3\times2\times3)=-10.$$

例 1.1.2 求解方程$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&x\\9&16&x^2\end{vmatrix}=0$.

解 $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&x\\9&16&x^2\end{vmatrix}=4x^2+9x+48-36-16x-3x^2=0$，解得 $x=3$或$x=4$.

说明 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，不适用于四阶及更高阶行列式.

1.2 n阶行列式的定义

回顾三阶行列式的定义，

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

其中$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$是原三阶行列式中划去元素 a_{11} 所在的行与列得到的二阶行列式.

定义 1.2.1 行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，其余元素不变而得到的低一阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}.

定义 1.2.2 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$， A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

由以上定义可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}\\&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.\end{aligned}$$

三阶行列式等于它的第一行的每个元素与各自代数余子式乘积之和，即利用二阶行列式定义了三阶行列式，同样地，可利用三阶行列式定义四阶行列式，依次类推，假设$n-1$阶行列式已经定义，则n阶行列式可用$n-1$阶行列式来定义.

定义 1.2.3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为 ***n* 阶行列式**，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

n阶行列式等于第一行的每个元素与各自代数余子式乘积之和.

可见，n阶行列式中的每一项都是不同行不同列的n个元素的乘积，前面带有适当的正负号；n阶行列式共有$n!$项，每一项的形式为$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中，$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列. 特殊地，一阶行列式相当于一个数，即$|a|=a$.

例 1.2.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按定义计算

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot A_{11} + 1\cdot A_{14} = -2M_{11} - M_{14}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right] - \left[-3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right]$$

$$=96.$$

例 1.2.2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

解 由定义，$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

形如例 1.2.2 中的行列式 D，当 $i<j$ 时，元素 a_{ij} 均为 0，称为**下三角行列式**；可见，下三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

1.3 行列式的性质与计算

行列式的计算是一个重要而复杂的问题，按定义来计算高阶行列式，计算量很大并且困难，因此有必要寻找计算行列式的简便方法，首先需要探讨行列式的性质.

1.3.1 行列式的性质

性质 1 行列式转置，值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

即 $D^{\mathrm{T}}=D$，记 D^{T} 为 D 的转置，转置是指将行列式的元素行列对调.

以三阶行列式为例进行验证.

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D.$$

性质 1 说明行列式的行与列的地位是相同的，因此，对行成立的性质对列也一样成立，反之亦然.

例 1.3.1　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.3.1}$$

解　由性质 1，$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

形如例 1.3.1 中的行列式(1.3.1)，当 $i>j$ 时，元素 a_{ij} 均为 0，称为**上三角行列式**，上三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

上三角行列式、下三角行列式统称为**三角行列式**，三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

特殊地，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$ 的行列式称为对角行列式，对角行列式的值也等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2　交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以三阶行列式为例进行验证，

$$D'=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{23}a_{11}a_{32}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{21}a_{13}a_{32}-a_{22}a_{11}a_{33}$$

$$=-(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 行列式两行(列)相同，行列式值为零.

性质 3 行列式某行(列)有公因子，则公因子可提出行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{j=1}^{n} ka_{ij}A_{ij} = -k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$= -k\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1 行列式某行(列)元素全为零，行列式值为零.

推论 2 行列式两行(列)元素成比例，行列式值为零.

证 假设第 i 行与第 j 行元素对应成比例，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

推论 3 用数 k 乘行列式等于用 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素.

性质 4 行列式某行(列)的元素都是两个数之和，则行列式可按该行(列)拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质表明，当行列式的某一行(列)的元素为两数之和时，行列式关于该行(列)可分解成两个行列式；若 n 阶行列式每个元素都可表示成两个数之和，则它可分解成 2^n 个行列式之和.

性质 5 行列式某行(列)元素乘以数 k 后加到另一行(列)上，行列式值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 n 阶行列式可按一行(列)展开成该行(列)元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(按行展开式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,\cdots,n).$$

(按列展开式)

该性质表明可以将行列式的阶逐次降低，通过低阶行列式求高阶行列式的值.

推论 行列式一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零. 即当 $i\neq j$ 时，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0,\quad \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0.$

证 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1 \quad (i\neq j).$$

$$\begin{aligned} D=D_1&=(a_{j1}+a_{i1})A_{j1}+\cdots+(a_{jn}+a_{in})A_{jn} \\ &=(a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn})+(a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}) \\ &=D+(a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}), \end{aligned}$$

故 $a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$. 再由性质 1 得 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j)$.

性质 6 与推论合写为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}D,\quad \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}D$，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j, \\ 1, & i=j.\end{cases}$

1.3.2 行列式的计算

在计算行列式时，为了使计算过程简明清晰，约定如下记号：用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_j 表示行列式的第 j 列.

(1) 交换行列式的第 i,j 两行(列)可记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；

(2) 用非零常数 k 乘行列式的第 i 行(列)的所有元素记为 $kr_i(kc_j)$；

(3) 将矩阵的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)对应的元素上，记为 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 1.3.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2,r_4-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1,r_3+r_1} (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} (-1)\times(-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21.$$

例 1.3.3 计算n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 D不是上(下)三角行列式，但可以通过列交换化为下三角行列式，先把D的第n列依次与第$n-1$列，第$n-2$列，…，直到与第一列交换(共交换了$n-1$次)，得行列式D_1，则$D=(-1)^{n-1}D_1$；再把D_1的第n列依次与其第$n-1$列，第$n-2$列，…，直到与第二列交换(共交换了$n-2$次)，得行列式D_2，则$D_1=(-1)^{n-2}D_2$；依此循环，D经过共$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$次列的交换变成了下三角行列式

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ a_{2n} & a_{2n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{nn} & a_{nn-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}.$$

于是，$D=(-1)^{n-1}D_1=\cdots=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，即

$$D = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$