普通高校计算机类应用型本科
系列规划教材

应用离散数学

主编 陈国龙 陈黎黎

Applied Discrete Mathematics

中国科学技术大学出版社

普通高校计算机类应用型本科

应用离散数学

主　编　陈国龙　陈黎黎
副主编　谢士春　国红军　张海洋　刘　钢

Applied Discrete Mathematics

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书共分为 8 章，主要介绍离散数学的基本原理、具体方法和应用，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、二元关系和函数、图论和代数系统的相关知识等。取材侧重于介绍典型离散结构以及如何建立离散结构的数学模型，或如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而使其可由计算机处理。每章后都精选了适量的难易不同的习题供读者进行自测。

本书可作为高等院校计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息管理与信息系统、物联网工程、数学与应用数学等专业本科生教材，也可作为相关专业教学、科研和工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

应用离散数学/陈国龙，陈黎黎主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2016. 8
ISBN 978-7-312-04003-0

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①陈… ②陈… Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 149978 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽联众印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 10
字数 237 千
版次 2016 年 8 月第 1 版
印次 2016 年 8 月第 1 次印刷
定价 28.00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，也是计算机、信息技术等专业的核心基础课。它是一门研究离散量的数学结构、性质和关系的工具性学科。它与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计等课程联系密切。

本书是在我们编写的《离散数学》讲义的基础上，结合计算机科学和现代数学发展的最新成果，以及多位作者多年来从事离散数学课程的教学经验和应用型本科高校学生的实际情况，听取了广大学生对该课程的意见后编写的。

本书共分为 8 章，内容包括离散数学 4 大分支的基础理论，即数理逻辑、集合论、图论和代数系统 4 个部分。数理逻辑部分包括第 1 章命题逻辑和第 2 章谓词逻辑，该部分构造了一套符号化体系，用以描述集合、关系、函数中的相关概念。集合论部分包括第 3 章集合和第 4 章二元关系和函数，其中的关系是集合中笛卡儿乘积的子集，函数是关系的子集。图论部分包括第 5 章图和第 6 章特殊图，从中可以看出图本质上就是一类特殊的代数系统。代数系统部分包括第 7 章代数运算及其性质和第 8 章代数系统基础，该部分描述了半群、群、子群、循环群、置换群、环和域一些典型的代数系统，从中可以看出，代数系统是带有代数运算的集合。由此可见，本书 4 个部分的内容既自成理论体系，又密切联系，读者在学习的过程中要注意树立体系意识，然后从整体到局部把握全书内容。

本书在编写上力求做到内容丰富、条理清晰、层次分明、深入浅出，每个概念都阐述清晰，每个定理都证明透彻，每道例题和习题都精心设计，以近于公理化、模式化的逻辑体系呈现给读者，展示明确的学习范围、目标、步骤、方法和方向，为广大读者打开离散数学这扇神秘的大门。

本书由宿州学院陈国龙、陈黎黎任主编，谢士春、国红军、张海洋、刘钢任副主编。其中第 1 章由国红军编写，第 2 章～第 4 章由陈黎黎编写，第 5 章～第 6 章由谢士春编写，第 7 章～第 8 章由张海洋和刘钢编写。陈国龙教授对书稿进行了认真的审阅，并提出了宝贵的修改意见。本书参阅了许多国内外离散数学教材和专著，在此对相关作者表示感谢。

由于受编者的学识水平所限，书中难免存在错误及不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2016 年 5 月于宿州学院

目　　录

第 1 部分　数理逻辑

第2部分 集合论

第3部分　图论

第4部分　代数系统

第1部分
数理逻辑

第 1 章　命 题 逻 辑

离散数学是现代数学的一个重要分支,是计算机科学中基础理论的核心。它形成于20世纪70年代初期,是随着计算机科学的发展逐步建立起来的一门工具科学。

离散数学以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标,其研究对象一般是有限个或可数个元素,充分描述计算机科学离散性的特点。它与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、系统结构、容错诊断、机器定论证明等课程联系密切。

离散数学的研究内容主要包括:数理逻辑、集合论、图论和代数系统4大部分。其中数理逻辑用数学的方法(即引进一套符号体系的方法)来研究推理的规律,所以又称符号逻辑。其基本内容为命题逻辑和谓词逻辑。

1.1　命题和连接词

1.1.1　命题及其表示法

数理逻辑研究的中心问题是推理,而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句,因而,表达判断的陈述句构成了推理的基本单位。于是,人们把能够判断真假的陈述句称为**命题**。一个命题总有一个**真值**。真值只有真和假两种,记为 Ture(真)和 False(假),分别用 T(或 1)和 F(或 0)表示。所以具有(唯一)真值的陈述句才是命题,无所谓真假的句子如感叹句、疑问句、祈使句或具有二义性的陈述句等都不能作为命题。

【例 1.1】 判断下列句子中哪些是命题,并指出命题的真值。

(1) 北京是中国的首都。

(2) 7 能被 2 整除。

(3) $2+5=7$。

(4) 今天的天气真好啊!

(5) 明天下午开会吗?

(6) 请关门!

(7) $x+y>0$。

(8) 明年的 1 月 10 日是晴天。

(9) 太阳系以外的星球上也有生物。

(10) $1+101=110$。

(11) 我正在说谎。

解 (1) 是命题,真值为真。

(2) 是命题,真值为假。

(3) 是命题,真值为真。

(4)、(5)、(6) 分别为感叹句、疑问句和祈使句,因此它们都不是命题。

(7) 不是命题,因为它没有确定的真值。例如,当 $x=1,y=1$ 时,$x+y>0$ 成立;当 $x=-1,y=-1$ 时,$x+y>0$ 不成立。

(8) 是命题,其真值是唯一的,只是暂时还不知道真值,但是到了明年的 1 月 10 日就知道了。

(9) 是命题,虽然限于人类现在的认知能力,我们还无法确定其真值,但从事物的本质而论,它本身是有真假可言的,其真值是客观存在且是唯一的。

(10) 不是命题,在二进制中为真,在十进制中为假。

(11) 不是命题,因为如果说话者在说假话,那么"我正在说谎"就与事实相背,说话者说的就是实话;如果说话者在说实话,那么"我正在说谎"就与事实相符,说话者说的就是谎话。前提的真值无论假设为真还是为假,总会由前提得到一个与之矛盾的结论,这就是一个悖论(paradox)。

由以上分析可以看出,判断一个句子是否为命题的标准是:先看它是否为陈述句,再判断其真值是否唯一(注意真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两回事)。

命题有两种类型:

(1) 不能分解为更简单的陈述句的命题——**原子命题**(或称为简单命题);

(2) 由连接词、标点符号和原子命题复合而成的命题——**复合命题**。例如:"我学英语,或者学俄语。"

所有这些命题都应具有确定的真值。

在本书中,常用大写英文字母或带下标的大写英文字母如:P、Q、P_i、Q_i 等表示原子命题。表示命题的符号称为**命题标识符**,将命题标识符放在该命题前面称为**命题符号化**。

例如:P:2 是素数;Q:如果天气好,那么我就去散步。

一个命题标识符如果表示确定的命题,则称为**命题常元**;如果命题标识符只表示任意命题的位置标志就称为**命题变元**。当命题变元表示原子命题时,该命题称为**原子变元**。

注:因为命题变元可以是任意命题,不能确定它的真值,故命题变元不是命题。当命题变元 P 用一个特定的命题取代时,P 才能有确定的值,这时也称对 P 进行**指派**。

【例 1.2】 将下列命题符号化。

(1) 6 不是奇数。

(2) $2+2=4$ 且 3 是偶数。

(3) 小张是山东人或者河北人。

(4) 如果角 A 和角 B 是对顶角,则角 A 等于角 B。

解 上面的 4 个句子是具有唯一真值的陈述句,它们都是命题,且都是由连接词、标点符号和原子命题复合而成的复合命题。

(1) 中使用了连接词"不"。令 P:6 是奇数。则 $\neg P$:6 不是奇数。

(2) 中使用了连接词“且”。令 P:2+2=4;Q:3 是偶数。则 $P \wedge Q$:2+2=4 且 3 是偶数。

(3) 中使用了连接词“或者”。令 P:小张是山东人;Q:小张是河北人。则 $P \vee Q$:小张是山东人或者河北人。

(4) 中使用了连接词“如果……则……”。令 P:角 A 和角 B 是对顶角;Q:角 A 等于角 B。则 $P \rightarrow Q$:如果角 A 和角 B 是对顶角,则角 A 等于角 B。

除了以上 4 个连接词之外,在自然语言中还经常使用“但是”“只有……才”“除非”等连接词。在数理逻辑的复合命题表示中,为了便于书写和进行推演,必须对连接词做出明确的规定并且符号化。下面给出 5 种常用的连接词。

1.1.2 连接词

1. 否定($\neg$)

定义 1.1 设 P 为任一命题,复合命题“非 P”(或“P 的否定”)称为 P 的否定式,记作 $\neg P$,$\neg$ 称为否定连接词。

若 P 为真(T),$\neg P$ 为假(F);若 P 为假(F),$\neg P$ 为真(T)(表 1.1)。

例如:P:3 是偶数;$\neg P$:3 不是偶数。

表 1.1 否定式的真假

P	$\neg P$
T	F
F	T

2. 合取($\wedge$)

定义 1.2 P 和 Q 为两个命题,复合命题“P 并且 Q”称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P \wedge Q$。

当且仅当 P、Q 同时为真(T)时,$P \wedge Q$ 为真(T);其他情况 $P \wedge Q$ 为假(F)(表 1.2)。

表 1.2 合取式的真假

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

在自然语言中,“并且”“不但……而且……”“既……又……”“虽然……但是……”等均可由合取连接词表示。例如:P:小王会唱歌;Q:小王会跳舞;$P \wedge Q$:小王既会唱歌也会跳舞。

3. 析取($\vee$)

定义 1.3 P 和 Q 为两个命题,复合命题“P 或者 Q”称为 P 与 Q 的析取式,记作

$P \vee Q$。

当且仅当 P、Q 同时为假(F)时，$P \vee Q$ 为假(F)；其他情况 $P \vee Q$ 为真(T)(表 1.3)。

表 1.3　析取式的真假

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

从析取式的定义可以看出，连接词“$\vee$(或)”与汉语中的“或”意义不完全相同。因为汉语的“或”可分为“排斥或”“可兼或”两种，而“$\vee$”表示“可兼或”。例如：

(1) 今天上午第一节课上英语或者数学——排斥或。不能符号化为 $P \vee Q$ 的形式，但可以借助连接词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 共同来表达这种排斥或，即符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$，或者 $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$。

(2) 他可能是 100 米或 400 米赛跑的冠军——可兼或。可直接符号化为 $P \vee Q$。

4. 蕴含($\rightarrow$)

定义 1.4　P 和 Q 为两个命题，复合命题“如果 P，那么 Q”(或“若 P 则 Q”)称为 P 与 Q 的蕴含式，记作 $P \rightarrow Q$。称 P 为蕴含式的前件，Q 为蕴含式的后件。

$P \rightarrow Q$ 为假(F)当且仅当 P 为真(T)且 Q 为假(F)(表 1.4)。

表 1.4　蕴含式的真假

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

自然语言中的“如果……那么……”之间常有因果关系，否则就没有意义，但对命题 $P \rightarrow Q$ 来说，只要 P、Q 分别有确定的真值，$P \rightarrow Q$ 即成为命题。例如：

(1) P：某动物为哺乳动物；Q：某动物为胎生。如果某动物为哺乳动物，那么它必是胎生。可符号化为 $P \rightarrow Q$。

(2) S：雪是黑的；T：太阳从西边出来。如果雪是黑的，那么太阳从西边出来。可符号化为 $S \rightarrow T$。

自然语言的“如果……那么……”，当前提为假时，结论不管真假，此语句的意义往往无法判断。而在数理逻辑的蕴含式中，规定为“善意的推定”，即前提为假时，条件命题的真值为真。

5. 等价($\leftrightarrow$)

定义 1.5　P 和 Q 为两个命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 与 Q 的等价式，记

作 $P \leftrightarrow Q$。

$P \leftrightarrow Q$ 的真值为真(T)当且仅当 P 与 Q 的真值相同(表 1.5)。

表 1.5　等价式的真假

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例如:两个三角形全等,当且仅当它们的三组对应边相等;燕子飞回南方,春天来了;$2+2=4$ 当且仅当雪是白的。以上三例都可以用等价连接词来表示,将它们符号化为 $P \leftrightarrow Q$。且对于双条件命题,可以不顾其因果联系,而只根据连接词的定义来确定命题的真值。

以上五种常用连接词也可以称为真值连接词或逻辑连接词。在命题逻辑中,可用这些连接词将各种复合命题符号化。基本步骤为:

(1) 分析出各简单命题,将它们符号化。

(2) 使用恰当的连接词,把简单命题联结起来,组成复合命题的符号化表示。

【例 1.3】 将下列命题符号化。

(1) 小王能歌善舞。

(2) T162 次列车在下午 3 点或 4 点开车。

(3) 如果张三和李四都不去开会,我就不去了。

(4) 我们不能既划船又跑步。

(5) 如果你来了,那么他唱不唱歌将看你是否伴奏。

(6) 假如上午不下雨,我去看电影,否则就在家里读书或看报。

(7) 我今天进城,除非下雨。

(8) 仅当你走我将留下。

解　(1) 令 P:小王会唱歌;Q:小王会跳舞。

则 $P \wedge Q$:小王能歌善舞。

(2) 令 P:T162 次列车在下午 3 点开车;Q:T162 次列车在下午 4 点开车。

则$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$或者$(P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)$:T162 次列车在下午 3 点或 4 点开车。

(3) 令 P:张三去开会;Q:李四去开会;R:我去开会。

则$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$:如果张三和李四都不去开会,我就不去了。

(4) 令 P:我们划船;Q:我们跑步。

则$\neg (P \wedge Q)$:我们不能既划船又跑步。

(5) 令 P:你来了;Q:他唱歌;R:你伴奏。

则 $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$:如果你来了,那么他唱不唱歌将看你是否伴奏。

(6) 令 P:上午下雨;Q:我去看电影;R:我在家读书;S:我在家看报。

则$(\neg P \to Q) \wedge (P \to (R \vee S))$：假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

(7) 令 P：我今天进城；Q：今天下雨。

则$\neg Q \to P$：我今天进城，除非下雨。

(8) 令 P：你走；Q：我留。

则 $Q \to P$：仅当你走我将留下。

1.2　命题公式和真值表

1.2.1　命题公式

在复合命题中，P、Q、R 等不仅可以代表命题常元，还可以代表命题变元，这样的复合命题形式称为**命题公式**。抽象地说，命题公式是由命题常元、命题变元、连接词、括号等组成的符号串，但并不是由命题变元、连接词和一些括号组成的字符串都是命题公式。下面给出命题公式的定义。

定义 1.6　命题逻辑的命题公式，规定为：

(1) 单个的命题常元或命题变元 P、Q、R、…、P_i、Q_i、R_i、…、0、1 是合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式，那么$\neg A$ 是合式公式。

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，那么$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \to B)$、$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次应用(1)～(3)所得的包含命题变元、连接词和括号的符号串是合式公式。

这是以递归形式给出的合式公式的定义，其中(1)称为基础，(2)和(3)称为归纳，(4)称为界限。合式公式又称为命题公式，简称公式。

例如：$\neg(P \wedge Q)$、$\neg(P \to Q)$、$((P \to Q) \to (R \to S))$、$(((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow (S \leftrightarrow M))$都是命题公式(为减少括号数量，约定：最外层圆括号可以省略)；$(P \to Q) \to (\wedge Q \to S)$、$(P \to Q \neg R \wedge T) \to S)$等都不是命题公式。

如果规定连接词运算的优先次序为$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$，则 $P \wedge Q \to R$ 是命题公式。

有了连接词的命题公式的概念，就可以把自然语言中的有些语句翻译成数理逻辑中的符号形式。但应注意，命题公式没有真假值，仅当公式中的命题变元用确定的命题代入时，才得到一个命题。这个命题的真值依赖于代换变元的那些命题的真值。

例如：(1) 他既聪明，又用功。

(2) 他虽然聪明，但不用功。

假设 P：他聪明；Q：他用功。

则(1)可记为：$P \wedge Q$；(2) 可记为：$P \wedge \neg Q$。

(3) 除非你努力，否则你将失败。(其意思是：如果你不努力，则你将失败。)

假设 P:你努力;Q:你失败。

则(3)可记为:$\neg P \to Q$。

(4) K1427 次列车在下午 2 点 30 分或 3 点 30 分开。

假设 P:K1427 次列车在下午 2 点 30 分开;Q:K1427 次列车在下午 3 点 30 分开。

汉语的“或”是“不可兼或”,而逻辑连接词“$\vee$”是“可兼或”,因此不能直接对两个简单命题进行析取,可表达为:$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。除此之外,也可以采用列表(表 1.6)的方法对原命题进行符号化。

表 1.6 原命题的符号化

P	Q	原命题	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

由上述表可以看出,本命题也可表达为:$\neg(P \leftrightarrow Q)$。

1.2.2 真值表

定义 1.7 假设 A 为某一命题公式,P_1、P_2、…、P_n 为出现在命题公式 A 中的所有命题变元。对 P_1、P_2、…、P_n 指定一组真值,称为对公式 A 进行一组**赋值**或**解释**。若该组赋值使命题公式 A 的真值为真(假),则此赋值为 A 的**成真赋值**(**成假赋值**)。在命题公式中,对每个命题变元指派真值的各种可能的组合,就确定了这个命题公式的各种真值情况,把它汇列成表即为命题公式的**真值表**。

在真值表中,命题公式真值的取值数目取决于此命题公式中所有的命题变元的个数。一般地,n 个命题变元组成的命题公式,共有 2^n 种解释,从而真值表有 2^n 行。

【例 1.4】 求下列命题公式的真值表。

(1) $P \wedge (Q \vee \neg R)$。

(2) $(P \to Q) \vee P$。

(3) $\neg(P \to Q) \wedge Q \wedge R$。

解 命题公式(1)~(3)的真值表分别如表 1.7、表 1.8、表 1.9 所示。

表 1.7 $P \wedge (Q \vee \neg R)$的真值表

P	Q	R	$\neg R$	$Q \vee \neg R$	$P \wedge (Q \vee \neg R)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T