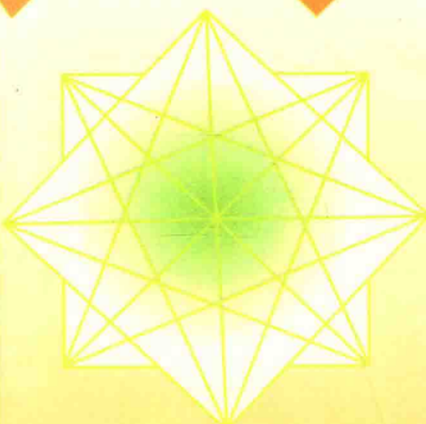
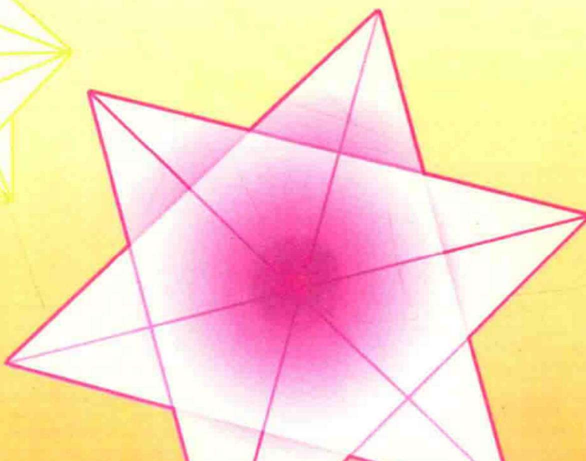
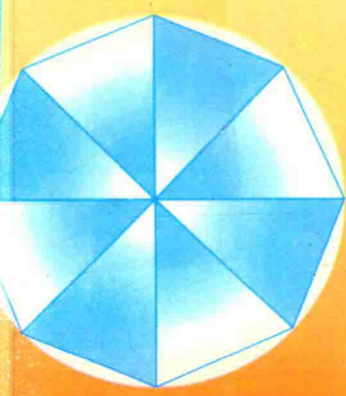
循环图

（环形网络）

周永生　著







广东科技出版社

循 环 图

（环形网络）

周永生 著

广东科技出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

循环图/周永生著. —广州：广东科技出版社，1998.12
ISBN 7-5359-2130-2

Ⅰ. 循…
Ⅱ. 周…
Ⅲ. 图论-组合数学
Ⅳ. O157.5

出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路 11 号　邮码：510075）
E-mail：gdkjwb@ns，guangzhou. gb. com. cn
经　　销：广东省新华书店
印　　刷：普宁怡昌印刷厂
（广东省普宁市流沙镇马栅工业区　邮码：515300）
规　　格：850×1168　1/32　印张 8.375　字数 20 千
版　　次：1998 年 12 月第 1 版
1998 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：0001～1000
ISBN　7-5359-2130-2/O.81
定　　价：13 元

广东高教厅
科学研究著作基金资助

内容简介

本书论述循环图（环形网络）的理论。内容包括循环图的连通性、循环图中的哈密顿回路、循环图的哈密顿分解、循环图的同构、循环图的自补图、循环图的同构因子分解、具有最佳连通性的循环图、循环图的笛卡尔乘积等。

本书属我国最早论述循环图理论的专著。循环图理论在信息科学、系统工程及计算机网络等学科领域具有潜在的应用前景，因而本书是从事这些方面工作的科技人员的参考读物，也可供相关学科研究生作参考书之用。

前　言

图论中对图的研究总是对各种不同类型的图分别对其特性进行探索的。循环图的对称性很强，是重要的图类。它有许多特性，如循环图具有哈密顿性；循环图的连通性能用数学式表达；能在循环图中确定具有$\overline{G}=G^m$性 的图G;用循环图可构造具有最佳连通性的图，这在分布式环形计算机互连网络优化设计中具有重要实用价值;用循环图可研究 Ramsey 数问题,因为许多 Ramsey 图是循环图。

循环图常称为环形网络。本著作系统地论述了中、外图论学者对循环图研究的一系列最新成果，其中大部分是作者本人多年专门从事循环图理论研究的系列成果。

这本新著的推出,不仅为了向读者系统地介绍这些最新成果，还希望能吸引更多的学者加入崛起中的循环图理论研究队伍的行列。

在本书的写作过程中，我的朋友，华中师范大学毛经中教授给了我热情的帮助，在此表示深切的谢意。

本书的出版，得到广东省高等学校科研著作出版基金（自然科学著作）和广东民族学院的资助，广东科技出版社郑丽华副编审给予了热情支持和帮助，在此一一致谢。

鉴于作者水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请同行专家和广大读者批评和指正。

周永生

1998 年 10 月于广州

目　　录

第一章　循环图的概念与简单性质

我们在本章介绍循环图的概念与简单性质，并在此基础上讨论 n 个顶点的 k 度循环图的数目、最小循环图与最小非循环图.

§1.1　循环图的概念

定义 1.1　若矩阵 $(a_{i,j})_{n\times n}$　$(i, j=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 的元素 $a_{i,j}=a_{0,j-1}$（这里的下标在模 n 运算下，取自集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$）则 $(a_{i,j})_{n\times n}$称为循环阵. 换言之，$(a_{i,j})_{n\times n}$的第 x 行可以从 $(a_{i,j})_{n\times n}$的第一行经过循环移动 $x-1$ 步而获得. 因而任意的循环矩阵被它的第一行所确定.

定义 1.2　若无向简单图 G 的 n 个顶点（用标号 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 记）存在一种标号法，使其对应的邻接矩阵为循环阵，则称图 G 为循环图或无向环形网络（简称无向环网）. 显然，一个循环图的顶点任意标号时，其邻接矩阵不一定是循环阵.

命题 1.1　$(0, 1)$ 循环阵 $(a_{i,j})_{n\times n}$为循环图的邻接矩阵的充要条件是 $a_{0,0}=0$，$a_{0,h}=a_{0,n-h}$　$(\forall\ h=1, 2, \cdots, n-1)$.

证　$$a_{0,0}\Longleftrightarrow a_{i,i}=0\quad (\forall\ i),$$

又 $i\neq j$ 时，$a_{i,j}=a_{0,j-i}$，$a_{j,i}=a_{0,n-j+i}$.

故 $a_{i,j}=a_{j,i}\Longleftrightarrow a_{0,j-i}=a_{0,n-(j-i)}$.

设 $j-i=h$，于是可得 $a_{i,j}=a_{j,i}\Longleftrightarrow a_{0,h}=a_{0,n-h}$，$(\forall\ h=1,2,\cdots,n-1)$.

证毕.

若顶点集为 $V=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ 的循环图所对应的循

环阵 $(a_{i,j})_{n\times n}$的第一行元素除 $a_{0,j_k}=a_{0,n-j_k}=1$ ($k=1, 2, \cdots, r$) 外，其余均为零，那么此循环图用 $C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$ 表示 $\left(1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$. 当 $j_r\neq\frac{n}{2}$时，$C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$ 为偶数度循环图；当 $j_r=\frac{n}{2}$时，$C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$为奇数度循环图.

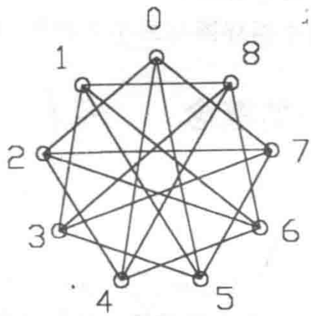


图 1.1 (a)

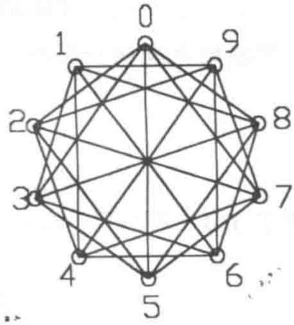


图 1.1 (b)

循环图 $C_9\langle 2, 4\rangle$ 与循环图 $C_{10}\langle 2, 3, 5\rangle$ 分别如图 1.1 (a) 与图 1.1 (b) 所示.

由定义 2 可知循环图是正则图. 反之不然. 回路图与完全图是循环图. 分别用 $C_n\langle 1\rangle$ 与 $C_n\langle 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\rangle$ 表示. 其邻接矩阵第一行分别是 [0, 1, 0, $\cdots$, 0, 1] 与 [0, 1, 1, $\cdots$, 1]. 请读者把循环图 $C_n\langle\frac{n}{2}\rangle$ 的图画出来.

从 K_{2s}中去掉 s 条互不相交的边而成的图称为超八面体图，用 H_s 记. H_s 恰好是完全等部分图 $K_{2,2,\cdots,2}$，$K_{2,2,\cdots,2}$是一个循环图，而且它的邻接矩阵的第一行是 $[a_1, \cdots, a_{2s}]$，这里除 a_1 与 a_{s+1}是零外，其余元素都是 1. 此循环图可用 $C_{2s}\langle 1, 2, \cdots, s\rangle$ 表示.

对循环图，有时应用下面的定义较为方便.

令 $N=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，$S\subseteq M\backslash\{0\}$，且在模 n 运算

下有 $-s=s$，即存在 j_1，j_2，…，j_r 使得

$$S=\{j_1,j_2,\cdots,j_r,n-j_1,n-j_2,\cdots,n-j_r\}.$$

若 n 阶简单无向图 G 有

(1) $V(G)=N$

(2) $E(G)=\{(i,j)\mid j-i\in S\}$，

则称 G 为循环图或无向环形环络. S 被称为特征集，记为 $S(G)$. $R=\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$ 被称为半特征集，记为 $R(G)$. 特征集为 S 的 n 阶循环图记为 $G_n(S)$；半特征集为 R 的 n 阶循环图，记为 $H_n(R)$.

本书的所有运算均取模 n.

若 n 阶简单有向图 D 有

(1) $V(D)=N$，$K=\{s_1,s_2,\cdots,s_r\}$

(2) 有向边集 $A(D)=\{\overrightarrow{v_iv_j}\mid j-i\in K\}$，

其中 $K\subseteq N\setminus\{0\}$，

则称 D 为有向循环图或有向环形网络（简称有向环网）. 如图 1.2 (a) 与图 1.2 (b) 中的图都是有向循环图，分别用 $D(8;1,2,5)$，$D(8;1,5,6)$ 表示. 一般有向循环图用 $D(n;s_1,s_2,\cdots,s_r)$ 表示.

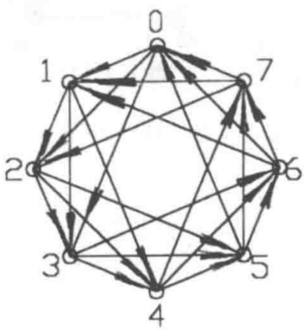


图 1.2 (a)

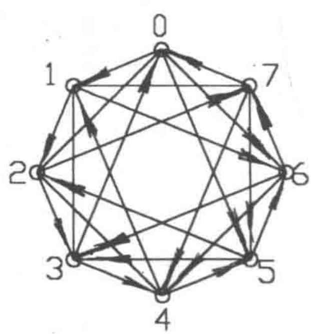


图 1.2 (b)

显然，有向循环图的基础图是一个循环图．反之，循环图的定向图不一定是有向循环图．

§1.2　循环图的简单性质

性质 1.1　若 $C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$ 与 $C_n\langle j_1', j_2', \cdots, j_s'\rangle$ 的顶点相同，则由 $C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle \cup C_n\langle j_1', j_2', \cdots, j_s'\rangle$ 所构成的简单图是循环图．

例如，$C_{18}\langle 2, 5, 7\rangle \cup C_{18}\langle 3, 4, 5\rangle = C_{18}\langle 2, 3, 4, 5, 7\rangle$.

性质 1.2　设 G 的邻接矩阵为 $A(G)$，则 G 为循环图$\Longleftrightarrow$存在初等矩阵 P，使 PAP' 为循环阵．

例如：图 1.3 (a) 中图的邻接矩阵为

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

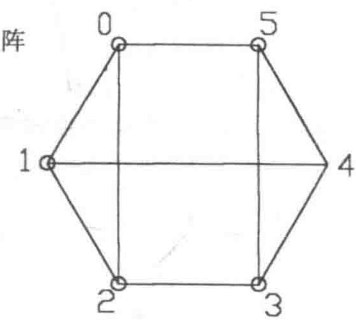


图 1.3 (a)

存在初等矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

使得

$$PAP'=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

为循环阵，所以图 1.3 (a) 为循环图. 图 1.3 (b) 或图 1.3 (c) 的邻接阵为循环阵.

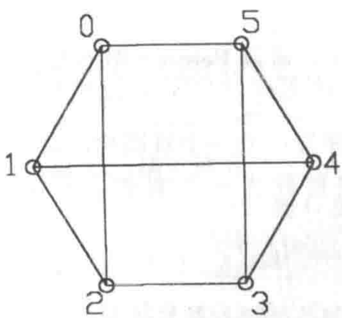


图 1.3 (b)

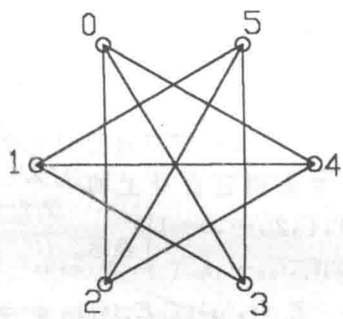


图 1.3 (c)

性质 1.3 设 $G=C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$, 则

$E(G)=\{(i, i+j_k)\mid i=0, 1, \cdots, n-1; k=1, 2, \cdots, r\}$.

性质 1.4 设$G=C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$, $j_r\neq\frac{n}{2}$,

$$E_k=\{i, j+j_k)\mid i=0, 1, \cdots, n-1\}$$ 则

$G[E_k]$ 是 2 度循环图.

性质 1.5 设图 G 的顶点集 $V(G)=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, $G=C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle \Longleftrightarrow$ 对于 G 的任一顶点 d, 与 d 邻接的顶点是 $d\pm j_1$, $d\pm j_2$, $\cdots$, $d\pm j_r$.

性质 1.6 图 G 是循环图的充要条件是图 G 的补图为循环

图.

由此性质可知完全等部多分图是循环图.

性质 1.7 在任何 $r\geqslant 2$ 的连通循环图 $C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$ 中存在 4—回 $(0, j_2, j_2+j_1, j_1, 0)$.

证 $j_2-0=j_2$，所以顶点 0 与顶点 j_2 相邻. $(j_1+j_2)-j_2=j_1$，所以顶点 j_2 与顶点 j_2+j_1 相邻. $j_1-(j_2+j_1)=-j_2$，所以顶点 j_2+j_1 与顶点 j_1 相邻，而顶点 j_1 是与顶点 0 相邻的，所以 $(0, j_2, j_2+j_1, j_1, 0)$ 是一个 4—回.

证毕.

因 Petersen 图不包含任何 4—回，所以 Peteren 图不是循环图.

一个图 G 到其自身的一个同构称为 G 的一个自同构. 从一个有限集到它自身上的一个一一映射称为一个置换，用 $\Omega=\begin{pmatrix}0,1,2,\cdots,n-1\\ i_0,i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\end{pmatrix}$ 表示.

若 $(i, j)\in E(G) \iff (\Omega(i), \Omega(j))\in E(G)$，则称 Ω 是 G 的自同构映射. 且这种置换的集在通常置换的乘法运算下构成群 $\Gamma(G)$（称为 G 的自同构群）.

性质 1.8 $G=C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle$，则 $\pi'=\begin{pmatrix}0,1, & 2, & \cdots,n-1\\ k,k+1,&k+2, & \cdots,k+n-1\end{pmatrix}$ 为 G 的自同构映射 $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

证 $(i, j)\in E(G) \Longrightarrow j-i=\pm j_s \Longrightarrow \pi'(j)-\pi'(i)=(j+k)-(i+k)=j-i=\pm j_s \Longrightarrow (\pi'(j), \pi'(i)\in E(G)$.

证毕.

试问：π' 是否就是图 G 的自同构群 $\Gamma(G)$?

性质 1.9 $C_n\langle j_1, j_2, \cdots, j_r\rangle=C_n\langle j_1\rangle\cup C_n\langle j_2\rangle\cup\cdots\cup$

$C_n\ \langle j_r\rangle$.

设 W 表示第一行是 $[0, 1, 0, \cdots, 0]$ 的循环阵，设 A 表示第一行是 $[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}]$ 的一个一般循环阵，则经过直接计算可以得到

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i W^i.$$

因为 W 的特征值是 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$，(称为本原单位根)，这里 $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$，所以推得 A 的特征值是

$$\lambda_r = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ir}, \qquad r = 0,1,\cdots,n-1$$

通常把图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值称为图 G 的特征值. 把 $A(G)$ 的特征多项式记为 $X(G:\lambda)$，称为 G 的特征多项式.

性质 1.10 假定 $[0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}]$ 是循环图 G 的循环的邻接矩阵的第一行，则 G 的特征值是

$$\lambda_r = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ir}, \qquad r = 0,1,2,\cdots,n-1$$

此结果可直接从循环矩阵的特征值的式子中得到.

性质 1.11 循环图的特征值是实的.

证 $$\omega^{jr} = \cos\frac{2\pi jr}{n} + i\sin\frac{2\pi jr}{n};$$

$$\omega^{(n-j)r} = \cos\frac{2\pi(n-j)r}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-j)r}{n}$$

$$= \cos\frac{2\pi jr}{n} - i\sin\frac{2\pi jr}{n}.$$

(1) n 为奇数

由 $a_i = a_{n-i}$ 可得

$$a_1 = a_{n-1},\ a_2 = a_{n-2},\ \cdots,\ a_{\frac{n+1}{2}} = a_{n-\frac{n+1}{2}} = a_{\frac{n-1}{2}},$$

所以 λ_r 为实数.

(2) n 为偶数

同理可得

$$a_1=a_{n-1}，\ a_2=a_{n-2}，\ \cdots，\ a_{\frac{n}{2}-1}=a_{n-\frac{n+1}{2}+1}=a_{\frac{n}{2}+1}，$$

$$\omega^{\frac{n}{2}r}=\cos\pi r+i\sin\pi r=\cos\pi r，$$

所以 λ_r 为实数.

证毕.

若对于任两个顶点 u 和 v，在 Γ (G) 中有元素 g 使得 g (u) $=v$，则称简单图 G 是顶点传递图. 若对于任意两条边 v_1u_1 和 v_2u_2 在 Γ (G) 中有元素 h 使得 h ($\{v_1, u_1\}$) $=$ $\{v_2, u_2\}$，则 G 为边传递图.

性质 1.12 一个循环图是顶点传递的. 一个具有素数个顶点的顶点传递图一定是一个循环图.

§1.3 n 个顶点 k 度的循环图的数目

具有 n 个顶点，k 度的循环图不只一个而是多个.

命题 1.2 具有 n 个顶点 k 度循环的个数是

$$R=\binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

证 一个循环图只要在 a_{01}，a_{02}，…，$a_{0i}\left(i=\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$ 中任取 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 个为 1，其余为零，即可确定，不同选法对应不同的标号循环图，所以标号不同的循环图的数目

$$R=\binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

证毕.