JISUAN
LIUTI LIXUE

计算流体力学

陆昌根　沈露予◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

国家自然科学基金资助项目(项目编号:11472139)
江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)
南京信息工程大学教材基金资助项目

计算流体力学

陆昌根　沈露予　编著

气象出版社
China Meteorological Press

内容简介

本书针对海洋科学学科的特点，总结了作者长期以来从事于计算流体力学的教学和研究工作，重点叙述了计算流体力学（CFD）的基础知识，并精心挑选实例剖析了计算流体力学的重要方法和处理技巧。本书所述所著均穿插实例，详细分析数值计算格式的优劣性。全书尽可能从简单到复杂、从传统型有限差分到紧致型有限差分、从模型方程到不可压缩流体运动的微分方程；层次结构清楚，既具有较强的理论性，又具有很好的可读性和操作性。另外，全书配备一定的例题和习题，典型实例算法附带源程序设计，以便学生自学、练习与参考。

可作为海洋科学专业以及相关专业本科生和硕士生的教学参考用书，也可供气象、海洋、环境和工程力学等专业人员、师生和研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学 / 陆昌根，沈露予编著. -- 北京 ：气象出版社，2016.11

ISBN 978-7-5029-6381-1

Ⅰ.①计… Ⅱ.①陆…②沈… Ⅲ.①计算流体力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 196598 号

JISUAN LIUTI LIXUE

计算流体力学

出版发行：气象出版社
地　　址：北京市海淀区中关村南大街 46 号　　邮政编码：100081
电　　话：010-68407112(总编室)　010-68409198(发行部)
网　　址：http://www.qxcbs.com　　E-mail：qxcbs@cma.gov.cn
责任编辑：黄红丽　张　媛　　终　　审：邵俊年
责任校对：王丽梅　　责任技编：赵相宁
封面设计：博雅思企划
印　　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司
开　　本：720 mm×960 mm　1/16　　印　　张：12.75
字　　数：305 千字
版　　次：2016 年 11 月第 1 版　　印　　次：2016 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：38.00 元

前　言

近几十年来，由于高速计算机以及相应的数值计算技术的快速发展，计算流体力学已成为研究流体动力学的另一个新的重要分支，日益受到流体动力学研究者们的高度重视。这是因为流体力学的理论和实验研究都存在着某些不足之处，需要通过数值计算加以补充与完善。地球上的海洋和大气是最常见的自然流体，海洋科学是研究物理海洋动力学的各种自然现象及其演变规律的学科，而计算流体力学是海洋动力学的主要研究手段之一，因此，计算流体力学是海洋科学的一门重要基础课程。目前，国内外已有许多计算流体力学的教科书，但绝大多数的教科书侧重于能源、水利、环境、工程力学以及燃烧等方面的内容，很少考虑到海洋科学专业本身的特点和需求。

南京信息工程大学海洋科学学院长期承担海洋科学类不同层次的专业教学任务，一直开设计算流体力学课程。针对现代海洋科学的发展及其现代海洋科学人才培养的需要，在教学过程中不断完善课程框架及教学大纲，结合学校海洋科学类人才培养的特点和教学要求，广泛听取了各方面的意见，编写了《计算流体力学》这本教材，填补了南京信息工程大学海洋科学类计算流体力学教材的空白。

全书共 7 章：第 1 章介绍流体力学基本方程和模型方程；第 2 章介绍有限差分的基础概念和理论；第 3 章、第 4 章和第 5 章着重讲解抛物型、椭圆型和双曲型偏微分方程的数值计算方法，针对不同有限差分格式的稳定性、收敛性和相容性分别进行讨论，并通过典型实例验证不同格式所具有的优劣性；第 6 章重点讲述高精度、高分辨紧致有限差分格式；第 7 章重点描述直接数值模拟不可压缩流体纳维—斯托克斯方程的计算方法，并针对经典驱动方腔流动详细地验证了数值模拟方法的可靠性与正确性。另外，附录给出了具有代表性算例计算的程序设计，以便学生学习时参考。

本书重点强调计算流体力学的理论、基本概念和方法，突出海洋科学学科的特点，加强计算流体力学与专业课程之间的衔接；在这本教材的主要章节中均穿插实例，突显数值计算格式的优劣性，具有很强的可读性。为避免教材内容过于抽象化，精心筛选了一些例题、习题以及典型算例的源程序设计，以便学生自学和练习时参考。

本书可作为海洋科学专业及相关专业学生的教学参考用书，也可为从事于水利、环境、气象、航空航天、海洋、能源、化工等相关部门的专业人员、师生和研究人员参考。

作者感谢教务处和海洋学院的领导以及同事们对本书的关心和支持。感谢戚琴

娟女士对全书资料的收集、整理及文字润色等。特别要感谢国家自然科学基金委对作者在计算方法等方面的支持(项目编号:11472139),以及江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)和南京信息工程大学教材基金资助项目的大力支持。另外,还要感谢赵玲惠和曹卫东对本书所做的工作。

由于作者水平有限,错误和不足在所难免,欢迎读者和各方面的专家学者提出宝贵意见。

编　者

2016 年 9 月于南京信息工程大学

目　　录

第 1 章 流体力学的基本方程

计算流体力学是依据流体力学的基本方程以及初始条件和边界条件，用最有效的数值计算方法进行求解，获得整个流场的信息。基本方程依据描述流体运动规律的质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律，推导出流体运动的连续性方程、动量方程以及能量方程。

1.1 流体运动的微分方程

根据质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律以及黏性规律，推导建立了流体运动的连续性方程、运动微分方程、能量方程以及应力张量和变形速度张量之间的关系，这些方程以及关系式再加上状态方程，便组成了流体动力学的运动方程组。

下面我们给出具体微分形式流体动力学的运动方程的矢量表达式：

(1)连续性方程的矢量表达式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.1a}$$

(2)运动微分方程的矢量表达式

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{F} + \mathrm{div}\boldsymbol{P} \tag{1.1b}$$

(3)能量方程的表达式

$$\rho \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S} + \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\ T) + \rho q \tag{1.1c}$$

(4)应力张量和变形速度张量之间的关系

Stokes 依据弹性力学中的虎克定律，假设流体运动中的应变率与应力之间存在着线性关系，并作了如下三个假设：

①应力与应变率之间存在线性关系；

②流体是各向同性的，也就是说流体的性质与方向无关；

③当流体静止时，即应变率张量为零时，流体中的应力就是流体的静压力。

根据 Stokes 的三个假设，可导出应力张量和变形速度张量之间的关系如下

$$\boldsymbol{P} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \mathrm{div}\ \boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{S} \tag{1.1d}$$

(5)状态方程

$$p = f(\rho, T) \tag{1.1e}$$

在上述方程中,$\boldsymbol{V}$ 为速度场,且 $\boldsymbol{V}=\{u,v,w\}^{\mathrm{T}}$;$p$ 为压力;ρ 为密度;$\boldsymbol{F}$ 为单位质量力;μ 为流体的动力黏性系数;λ 为热传导系数;T 为温度;q 为单位质量热流入量;U 为单位质量内能总量;div 为散度算子;grad 为梯度算子;$\boldsymbol{P}$ 为应力张量;$\boldsymbol{S}$ 为变形速度张量;$\boldsymbol{I}$ 为单位张量。

1.1.1 不可压缩流体运动的微分方程

不可压缩流体运动的无量纲连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.2a}$$

或矢量式的无量纲连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{1.2b}$$

在不考虑外力作用下,不可压缩流体的无量纲运动微分方程也可称为纳维—斯托克斯方程(Navier-Stokes 方程,简称 N—S 方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.3a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{1.3b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{1.3c}$$

矢量式的无量纲运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1.3d}$$

在上述基本方程中,$\boldsymbol{V}$ 为速度场,且 $\boldsymbol{V}=\{u,v,w\}^{\mathrm{T}}$;$p$ 为压力;$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}$;$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$;$Re$ 为雷诺数,即 $Re=\frac{U_\infty l}{\upsilon}$,且 U_∞ 为无穷远来流速度,l 为特征尺度,υ 为流体的运动黏性系数。对上述基本方程进行数值求解,可获得不可压缩流体运动的速度场和压力场,从而获得整个流体运动的全部流场信息。

在推导上述基本方程时,作了以下六个假设:

①流体是连续介质,流动的特征物理参数是空间变量和时间变量的连续函数,因而某物理问题可用数学分析中的方法进行求解和分析;

②流体是各向同性的牛顿流体,也就是说流体的性质与方向无关。因此,无论坐标系如何选取,流体运动中的应力与应变率的关系都是相同的;

③流体保持热力平衡,并且任何流体微元包含足够大量的流体分子,根据分子运动论得到的统计平衡规律可以应用;

④流体在运动过程中,没有考虑外力的作用。若考虑质量力作用,只需在流体运

动微分方程中，添加相应的单位质量力，即 $\boldsymbol{F}=\{F_x, F_y, F_Z\}^{\mathrm{T}}$；

⑤上述流体运动的微分方程仅适合于不可压缩流体；

⑥方程(1.2)和(1.3)式仅适用于惯性坐标系，而连续性方程(1.2)式则与所选取的坐标系无关。如果选取的坐标系是非惯性坐标系，则方程(1.3)式中还必须包括相应的惯性力。

当上述假设不成立时(例如非牛顿流体)，则本章所建立的基本方程将不再适用。

1.1.2　黏性流体运动的初始条件和边界条件

为了获取真实流体运动的流场，不仅要建立一组封闭的基本方程组，而且还必须给出适定的初始条件和边界条件。

(1)初始条件

对于非定常流动的流体问题，给出初始时刻($t=t_0$)时流场中各相关参数的分布，称为初始条件问题。数学表达式为

当 $t=t_0$ 时，

$$\boldsymbol{V}(x,y,z,t_0)=\boldsymbol{V}_0(x,y,z)\ 或\begin{Bmatrix} u(x,y,z,t_0) \\ v(x,y,z,t_0) \\ w(x,y,z,t_0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_0(x,y,z) \\ v_0(x,y,z) \\ w_0(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

$$p(x,y,z,t_0)=p_0(x,y,z)$$

式中 $\boldsymbol{V}_0$ 和 p_0 为已知函数。

(2)边界条件

物理问题的理论解在流体运动的边界上，应该满足一定的条件，则称它为边界条件。边界条件的形式多种多样，通常情况下需要根据具体流体运动状态的不同边界问题加以决定，下面我们对于常用的几种边界条件分别加以讨论。

①静止固体壁面

假设固体壁面是光滑的、不可渗透的，则在一般情况下，流体在固体壁面上没有相对滑动，即无滑移运动，所以在固体壁面上的法向和切向速度均等于零。

数学表达式为

$$V_n=0, V_\tau=0$$

或改写成合成速度的表达式

$$\boldsymbol{V}=0$$

②运动固体壁面

假设固体壁面是光滑的、不可渗透的，则在一般情况下，流体在固体壁面上没有相对滑动，所以在固体壁上流体质点的速度和固壁点上的速度相等。

数学表达式为

$$\boldsymbol{V}_F=\boldsymbol{V}_S$$

注:在这里下标 F 表示流体的物理量,下标 S 表示固体壁面上的物理量。

③两种流体(如液体)分界面上

由分子运动论和实验结果验证可知,在两种流体(如液体)分界面的两侧速度、压力和摩擦力均相等。

数学表达式为

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2;p_1=p_2;\tau_1=\tau_2$$

或

$$\mu_1\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2$$

注:在这里下标 1 和 2 分别表示两种流体分界面两侧的一种流体(如液体)和另一种流体(如液体),n 表示分界面垂直方向的坐标。

④液体与气体分界面上

一般来说,液体与气体分界面上的边界条件和两种流体(如液体)分界面上的条件相同。最常见的是液体与气体的分界面,例如水和空气的分界面,通常称作为自由表面。在水的自由表面上,由运动学的边界条件可知,水在平均自由面的垂直方向上的速度必须等于自由表面的垂直波动速度。如果忽略水的表面张力,在自由表面上,水的压力等于当地大气压。

⑤入流和出流的边界条件

在有些情况下,需要给出入流、出流断面上的速度 $\boldsymbol{V}$ 和 p 的分布,这就是入流、出流边界条件。

1.2 偏微分方程的分类

偏微分方程的数值求解方法取决于偏微分方程的类型。因此,不同类型的偏微分方程对应着不同的数值解法,求解时所需要的初值条件和边值条件也不尽相同。

下面以一个二阶线性偏微分方程为例子,简单说明偏微分方程是如何分类的。

$$a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+b_1\frac{\partial\Phi}{\partial y}+c\Phi+f=0 \tag{1.4}$$

式中 $a_{11},a_{12},a_{22},a_1,b_1,c$ 及 f 是与 Φ 无关的函数,它们都是 (x,y) 的已知函数,且 a_{11},a_{12} 及 a_{22} 不全为零。

我们设想把方程(1.4)式,能否通过自变量的换元法,使方程变成更简单一些,主要是指二阶偏导数形式上的简化,即通过自变量的非奇异变换,化简二阶偏导数项。同时,用方程在这种变换下保持不变的性质对方程进行数学上的分类。这种想法也是比较自然的,就好像二次曲线的化简与分类一样;事实上,这二者确有很多相似的地方,后面我们将获得椭圆型、抛物型、双曲型方程的名称也由此而来。

作自变量非奇异变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

这样，我们可得到关于自变量$(\xi,\eta)^{\mathrm{T}}$的新方程，我们的目的是选取适当的ξ和η，使新方程的二阶偏导数项具有最简单的表达形式。首先，求出函数Φ对自变量的偏导数（为简单起见，将未知函数Φ作为新的自变量ξ和η的函数，这里仍记为$\Phi(\xi,\eta)$），有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x};\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$$

将上述表达式，代入到原方程(1.4)式中，有

$$A_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}+A_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+B_1\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+C\Phi+F=0$$

式中

$$\begin{cases}A_{11}=a_{11}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\\ A_{12}=a_{11}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\\ A_{22}=a_{11}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\end{cases}\tag{1.5}$$

$$A_1=a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+b_1\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$B_1=a_{11}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+b_1\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$C=c$$

$$F=f$$

由(1.5)式可表示为矩阵表达式

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}&\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}&\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}&\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}&\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{1.6}$$

式中$A_{12}=A_{21}$，$a_{12}=a_{21}$。

由此可知，在自变量变换下的原方程和新方程中，分别由二阶偏导数项系数组成

的对称矩阵是合同的，其变换矩阵是自变量变换的雅可比(Jacobi)矩阵

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

因为变换是非奇异的，即 Jacobi 矩阵的行列式不为零。所以，可以根据方程的二阶偏导数项系数组成的对称矩阵$(a_{ij})_{2\times2}$在非奇异合同变换下不变的性质对方程进行完全的分类，再等价地根据二次型$Q(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}a_{ij}\lambda_i\lambda_j$在非奇异线性变换下不变的性质来进行分类。在只有两个自变量的情况下，只要根据$(a_{ij})_{2\times2}$的行列式的符号就可以分类。同时，所谓方程得到某种简化或化为某种标准形式，这不过是使$(A_{ij})_{2\times2}$简单一些或为某种标准形式。

引入记号

$$\Delta=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$$

①若在点(x,y)处，$\Delta>0$，称方程(1.4)式在点(x,y)为双曲型；

②若在点(x,y)处，$\Delta=0$，称方程(1.4)式在点(x,y)为抛物型；

③若在点(x,y)处，$\Delta<0$，称方程(1.4)式在点(x,y)为椭圆型。

由(1.6)式知，方程的类型在自变量的非奇异变换下是保持不变的。

显然，当$a_{11}=a_{22}=0,a_{12}\neq0$时，或$a_{12}=0,a_{11}a_{22}<0$时，方程(1.4)式是属于双曲型的；当$a_{11}=0,a_{12}=0,a_{22}\neq0$时，或$a_{11}\neq0,a_{12}=0,a_{22}=0$时，方程(1.4)式是属于抛物型的；当$a_{12}=0,a_{11}a_{22}>0$时，方程(1.4)式是属于椭圆型的。

现在的问题是能否把一般情况下的二阶线性方程根据不同类型的区域，找到适当的自变量变换使方程变为这些特殊的或更简单的标准形式。

根据(1.5)式，若能选取$\xi(x,y)$，$\eta(x,y)$为一阶偏微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2=0 \tag{1.7}$$

的解，则必有

$$a_{11}=a_{22}=0,a_{12}\neq0$$

这是可以做到的，我们可以引入一个基本定理。

定理 设函数$\Psi(x,y)$满足隐函数存在定理中的条件，则$\Psi(x,y)$是方程(1.7)式的解的充分必要条件是$\Psi(x,y)=c$是一阶常微分方程

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2-2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a_{22}(\mathrm{d}x)^2=0 \tag{1.8}$$

的通积分。

证 设$\Psi(x,y)$是方程(1.8)式的解，即

$$a_{11}(\Psi_x)^2-2a_{12}\Psi_x\Psi_y+a_{22}(\Psi_y)^2=0$$

或

$$a_{11}\left(-\frac{\Psi_x}{\Psi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\Psi_x}{\Psi_y}\right)+a_{22}=0$$

由方程 $\Psi(x,y)=c$ 所确定的函数，设为 $y=f(x,c)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\Psi_x}{\Psi_y}\bigg|_{y=f(x,c)}$$

故

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+a_{22}=0$$

将上式两边同乘以$(\mathrm{d}x)^2$，即可获得方程(1.8)式。这证明了必要性。其充分性也可类似证明。定理证毕。

通常我们把常微分方程(1.8)式分解成两个方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}\end{cases}\tag{1.9}$$

我们把常微分方程(1.8)式或(1.9)式称为二阶线性偏微分方程(1.4)式的特征微分方程，特征微分方程的积分曲线称为(1.4)式的特征曲线。

下面我们就方程(1.4)式，依据 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ 符号的不同情况，来分别讨论它的三种类型的标准形式及其对应的自变量变换情况。

(1)若在区域 G 内，$\Delta=0$，即在 G 内方程(1.4)式是抛物型的，这时特征微分方程(1.9)式只有一个(相同的两个)一阶常微分方程，并由此可求得一族特征曲线，设为 $\Psi(x,y)=c_1$，作代换

$$\begin{cases}\xi=\Psi(x,y)\\\eta=\varphi(x,y)\end{cases}$$

这里 $\varphi(x,y)$ 是任一函数，使得 $\left|\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|\neq0$，则必有 $A_{11}=A_{12}=0$，且 $A_{22}\neq0$，方程(1.4)式变为

$$A_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+B_1\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+C\Phi+F=0$$

除以 A_{22}，可得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+A_2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+C_2\Phi+F_2=0$$

称上式为抛物型方程的标准形式。

(2)若在区域 G 内，$\Delta<0$，即在 G 内方程(1.4)式是椭圆型的，这时特征微分方程(1.9)式无实轴的特征曲线，但有一对复的特征曲线族，设为 $\Psi(x,y)=c_1$，$\Psi^*(x,y)=c_2$

这里 $\Psi^*(x,y)$是 $\Psi(x,y)$的共轭，若作代换

$$\begin{cases}\xi = \Psi(x,y)\\ \eta = \Psi^*(x,y)\end{cases}$$

可得与下面第二种双曲型标准形式一样的表达式，但要注意此时 ξ 和 η 是复变数。

下面我们作变换

$$\begin{cases}\xi = \alpha + \mathrm{I}\beta\\ \eta = \alpha - \mathrm{I}\beta\end{cases}$$

上式也可转变为下列表达式

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = \mathrm{Re}\,\xi\\ \beta = \dfrac{1}{2\mathrm{I}}(\xi - \eta) = \mathrm{Im}\,\xi\end{cases}$$

在上述表达式中 $\mathrm{I}=\sqrt{-1}$。若记 $\Psi(x,y)=\Psi_1(x,y)+\Psi_2(x,y)$，有

$$\begin{cases}\alpha = \Psi_1(x,y)\\ \beta = \Psi_2(x,y)\end{cases}$$

在此变换下(这里的 α,β 均为实变数)，可推得下列式子成立，数学表达式为

$$A_{11}(\alpha,\beta) = A_{22}(\alpha,\beta) \neq 0$$

$$A_{12}(\alpha,\beta) = 0$$

这样方程(1.4)式可变为

$$A_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + A_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + B_1\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + C\Phi + F = 0$$

除以 A_{11}，可得下式

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + A_2\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + B_2\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + C_2\Phi + F_2 = 0$$

称上式为椭圆型方程的标准形式。

(3)若在区域 G 内，$\Delta>0$，即在 G 内方程(1.4)式是双曲型的，这时特征微分方程(1.9)式为两个不相同一阶常微分方程，由此可求得两族的不同特征曲线。设为 $\Psi_1(x,y)=c_1$，$\Psi_2(x,y)=c_2$，作代换

$$\begin{cases}\xi = \Psi_1(x,y)\\ \eta = \Psi_2(x,y)\end{cases}$$

则必有 $A_{11}=A_{22}=0$，且 $A_{12}\neq 0$，方程(1.4)式变为

$$2A_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + C\Phi + F = 0$$

除以 $2A_{12}$，可得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta} + A_2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + B_2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + C_2\Phi + F_2 = 0$$

称上式为双曲型方程的第二种标准形式。

如果再作变换

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{1}{2}(s+t) \\ \eta = \dfrac{1}{2}(s-t)\end{cases}，即\begin{cases}s = \xi+\eta \\ t = \xi-\eta\end{cases}$$

则得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + A_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + B_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_3 \Phi + F_3 = 0$$

并称上式为双曲型方程的第一种标准形式，或简称为标准形式。

1.3 模型方程

1.3.1 扩散型方程

一般扩散型方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，且\ f = f(t,x,u)，\mu = 常数 > 0 \tag{1.10}$$

(1)当 $f=c$ 时，得线性对流扩散方程，它既具有双曲型方程性质，又具有抛物型方程的特征；即兼有波动性和扩散性的特征，描述了物理问题中对流和扩散的综合过程。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，c = 常数，\mu = 常数 > 0 \tag{1.11}$$

定义域：$-\infty < x < \infty, t \geqslant 0$

初始条件：$u(x,0)=\varphi(x)$

在这里，用 $U(\alpha,t)$ 和 $\phi(\alpha)$ 分别表示函数 $u(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 关于 x 的傅里叶(Fourier)变换。对上述方程和初始条件两边关于 x 作傅里叶变换，得到一个以 α 为参数的常微分方程初值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + (\mu\alpha^2 - \mathrm{I}c\alpha)U = 0 \\ U(\alpha,0) = \phi(\alpha)\end{cases} \qquad t > 0$$

其解为

$$U(\alpha,t) = \varphi(\alpha)\mathrm{e}^{-(\mu\alpha^2 - \mathrm{I}c\alpha)t}$$

根据卷积定理，可得原方程的精确解为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\eta-ct)^2}{4\mu t}\right]\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{1.12}$$

(2)当 $f=0$ 时，得到抛物型的扩散方程，反映浓度、温度的扩散性质，其方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \mu=\text{常数}>0 \tag{1.13}$$

定义域：$-\infty<x<\infty, t\geqslant 0$

初始条件：$u(x,0)=\varphi(x)$

在这里，同样采用 $U(\alpha,t)$ 和 $\phi(\alpha)$ 分别表示函数 $u(x,t)$ 和 $\varphi(x)$ 关于 x 的傅里叶变换。对上述方程和初始条件两边关于 x 作傅里叶变换，得到一个以 α 为参数的常微分方程初值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\mu\alpha^2 U=0 \\ U(\alpha,0)=\phi(\alpha)\end{cases} \qquad t>0$$

其解析解为

$$U(\alpha,t)=\varphi(\alpha)\mathrm{e}^{-\mu\alpha^2 t}$$

根据卷积定理，可得原方程的精确解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\mu t}\right]\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{1.14}$$

该理论解使得比较集中的扰动渐渐平滑稀释，反映了扩散和均匀化的物理过程。

(3)当 $f=c,\mu=0$ 时，得到双曲型的单波方程，反映了波的传播，其方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0, c=\text{常数} \tag{1.15}$$

定义域：$-\infty<x<\infty, t\geqslant 0$

初始条件：$u(x,0)=\varphi(x)$

令 $\xi=ct, \eta=x$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$；$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$

故 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0$

令 $p=\xi+\eta, q=\xi-\eta$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=\dfrac{\partial u}{\partial p}+\dfrac{\partial u}{\partial q}$；$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=\dfrac{\partial u}{\partial p}-\dfrac{\partial u}{\partial q}$

故得 $\dfrac{\partial u}{\partial p}=0$

所以，$u=f(q)$，即 $u=f(\xi-\eta)=f(ct-x)$

又因为 $\varphi(x)=u(x,0)=f(-x)$

所以，$u(x,t)=f(ct-x)=\varphi(x-ct)$，则该问题的精确解为

$$u(x,t)=\varphi(x-ct) \tag{1.16}$$

该理论解，可以理解为单波方程描述的在 $t=0$ 时刻的某个空间扰动 $\varphi(x)$，将保持形状不变，以速度 c 在空间运动，即在 (x,t) 平面内沿 $x-ct$ 等于常数的每一条直线上，$u=$常数。