科学版

研究生教学丛书

变分法与偏微分方程

刘宪高 编著

科学出版社

科学版研究生教学丛书

变分法与偏微分方程

刘宪高　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书在 Sobolev 空间框架下，介绍了积分泛函极小问题的现代偏微分方程的理论，内容包括 Sobolev 函数空间及各种性质；经典变分方法：一阶变分、二阶变分、极小点存在的充分和必要条件、条件极值的 Lagrange 乘子法等；变分法的直接方法：下半连续性、补偿紧性、集中紧性、 Ekeland 变分、Nehari 技巧等；三维欧氏空间极小曲面的 Douglas 方法和等周不等式的证明.

本书是学习偏微分方程和从事偏微分方程研究的基础课程，建立了从一个本科高年级学生跨入现代偏微分方程领域的知识桥梁. 本书可作为理工类专业研究生的教材和高年级本科生的选修课教材，也可供相关的科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

变分法与偏微分方程/刘宪高编著. —北京：科学出版社，2016.8

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 978-7-03-049468-9

Ⅰ. ①变… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①变分法-研究生-教材 ②偏微分方程-研究生-教材 Ⅳ. ①O176 ②O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 179859 号

责任编辑：张中兴／责任校对：彭 涛
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2016 年 11 月第二次印刷 印张：9 1/2
字数：192 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

变分法是处理泛函极值问题的经典数学分支. 它历史悠久, 起源于古老的数学不等式问题, 如等周不等式问题: 给定平面光滑封闭曲线的长度, 怎样围成面积最大? 17 世纪的欧洲, 涌现出许多精妙的科学问题, 奠定了变分法的重要性, 例如, Fermat (1662) 的几何光学问题: 光在任意介质中从一点传播到另一点时, 沿所需时间最短的路径传播, 又称最小时间原理或极短光程原理. Galileo (1638) 提出的最速下降线 (brachistochrone curve) 问题, 由 Bernoulli 兄弟 (1696), Leibniz 和 Newton 所解决. 对变分法的发展起到决定性作用的数学家是 Euler 和 Lagrange. 众多的数学家对变分法的发展起到了推动的作用, 他们是 Bliss, Bolza, Carathéodory, Clebsch, Hahn, Hamilton, Hilbert, Kneser, Jacobi, Legendre, Mayer, Weierstrass 等. 对变分法的发展具有里程碑意义的工作有以下三项.

(1) 极小曲面问题的研究. Lagrange (1762) 给出了问题的数学描述, 一批数学家 Ampère, Beltrami, Bernstein, Bonnet, Catalan, Darboux, Enneper, Haar, Korn, Legendre, Lie, Meusnier, Monge, Müntz, Riemann, H.A. Schwarz, Serret, Weierstrass, Weingarten 等对这个问题进行了深入的探讨. Douglas 和 Rado (1930) 给出了第一个完全的证明, Douglas 因此获得 Fields 奖.

(2) 19 世纪 Hilbert 研究 Dirichlet 积分 —— 简单的多重变分积分问题, 将调和函数的研究归结为变分问题, 并创造了所谓的直接方法. 这个威力巨大的工具, 被广泛用来研究偏微分方程在 Sobolev 空间内解的存在性.

(3) 1900 年, Hilbert 在巴黎召开的国际数学家大会上提出了 23 个问题供 20 世纪重点发展的研究方向, 其中有 3 个问题 (第 19,20,23) 与变分法有关.

本书是给数学系高年级本科生和研究生讲授变分法的基本内容, 希望能在 Sobolev 空间的框架下, 讲授多重积分泛函的变分方法. 内容包括泛函的一阶变分、二阶变分、下半连续性、补偿紧性、集中紧性、Ekeland 变分、Nehari 技巧等, 并介绍了极小曲面的 Douglas 方法和等周不等式的证明, 基本内容所需知识做到自包含. 通过本书的学习, 可以进入相关领域的研究.

最后, 作者感谢复旦大学数学科学院对本书出版给予的支持. 感谢科学出版社张中兴编辑、罗吉编辑为本书的出版付出的辛劳.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

引　言

"变分法"(the calculus of variations) 是 Euler 看了 Lagrange 的工作后给出的名字. 它是数学的一个古老分支，最老的问题就是等周不等式. 具有重要影响的问题包括 Fermat 的几何光学问题、极小曲面问题. 这个方面起决定性的进展是 Euler 和 Lagrange 的工作，例如，我们将看到 Euler-Lagrange 方程. 随着数学的发展，特别受 Hilbert 1900 年在巴黎国际数学家大会上的 23 个问题中第 19，20 和第 23 个问题的影响，变分方法已经成为研究椭圆型偏微分方程解的存在性的主要方法. 它在处理数学物理问题，包括弹性力学、塑性力学、生物膜方程，最优控制、图像处理、几何问题等发挥着越来越重要作用. (张恭庆, 2011, 1986; Dacorogna, 2004, 1989, 1982; 等).

等周不等式　假设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域,

$$[|\partial A|]^n-n^{n-1}\omega_n[|A|]^{n-1}\geqslant 0$$

称为等周不等式. 这里 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积，$|\partial A|,|A|$ 分别表示 A 的边的面积和 A 的体积. 设 $n=2$, 我们描述 $\partial A=\{\boldsymbol{u}(x)=(u^1(x),u^2(x)):x\in[a,b]\}$, 则

$$|\partial A|(\boldsymbol{u})=\int_a^b\sqrt{|\dot{\boldsymbol{u}}|^2}\mathrm{d}x,\quad |A|(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\int_a^b\boldsymbol{u}\wedge\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}x,$$

这里 $\dot{\boldsymbol{u}}=\left(\dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\right)$, $\boldsymbol{u}\wedge\dot{\boldsymbol{u}}=u^1\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}-u^2\dfrac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}$. 假设 $W=\{\boldsymbol{u}:|A|(\boldsymbol{u})=1,\,\boldsymbol{u}(a)=\boldsymbol{u}(b)\}$, 问题的提法是

$$\inf_{\boldsymbol{u}\in W}\int_a^b\sqrt{|\dot{\boldsymbol{u}}|^2}\mathrm{d}x=2\sqrt{\pi}.$$

Fermat 原理　光在任意介质中从一点传播到另一点时，沿所需时间最短的路径传播. 又称最小时间原理或极短光程原理，由法国数学家费马于 1657 年首先提出. 假设 v 是光在介质中的传播速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, 这里 s 是曲线的弧长, c 是光在真空中的传播速度, $n=\dfrac{c}{v}$ 是折射率. 于是光从 A 到 B 所需时间

$$T=\int_A^B\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\int_A^B\frac{c}{v}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\int_A^B n\mathrm{d}s.$$

如果定义从 A 到 B 的曲线集合: $\Gamma=\{x(t)\in\mathbb{R}^3:x(a)=A,x(b)=B\}$, 折射率 $n=n(x)$, 变分问题是

$$\inf_{x\in\Gamma}\int_a^b n(x(t))|\dot{x}|\mathrm{d}t.$$

最速下降线 在垂直的平面上有两点 $A(0,a),B(0,b),a,b>0$, 一质点从 B 点在重力 $(0,g)$ 的作用下，以初始速度为零向下沿着连接 A,B 两点的曲线滑动到 A，怎样的曲线使得滑行时间最短？假设曲线集合 $\Gamma=\{u(x)\in C^1([0,a]):u(0)=b,u(a)=0\}$. 由于

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(b-u(x)),\quad v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

我们有

$$v=\sqrt{2g(b-u(x))},\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2g(b-u(x))}}\mathrm{d}x.$$

总时间

$$T=\int_0^a\mathrm{d}t=\int_0^a\sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2g(b-u(x))}}\mathrm{d}x.$$

问题的提法是

$$\inf_{u\in\Gamma}\sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{2g(b-u(x))}}\mathrm{d}x.$$

极小旋转曲面 xy 平面上的一条曲线 $y=u(x),u(x)>0,u(0)=a,u(1)=b$, 这条曲线绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面 Σ_u, 其面积

$$\int_0^1 2\pi\sqrt{1+u'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

设 $\Gamma=\{u\in C^1([0,1]):u(x)>0,u(0)=a,u(1)=b\}$, 问题的提法是

$$\inf_{u\in\Gamma}\int_0^1 2\pi\sqrt{1+u'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

极小曲面 设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 曲线, $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是张在 Γ 上的曲面，问题是在所有这些曲面中寻找一个曲面使得面积最小.

非参数化曲面

$$\Sigma=\{v(x)=(x,u(x))\in\mathbb{R}^{2+1}:x\in\Omega\}$$

这里 $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是有界区域. 这些曲面都是图: $\partial\Sigma=\Gamma,u=u_0(x),x\in\partial\Omega$. 于是设 $W=\{u\in C^1(\overline{\Omega}):u=u_0(x),\ x\in\partial\Omega\}$, 则问题成为

$$\inf_{u\in W}\int_\Omega\sqrt{1+|\nabla u|^2}\mathrm{d}x.$$

参数化曲面　设曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 用参数表示为 $v:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Sigma = v(\overline{\Omega}) = \{v(x) : x \in \overline{\Omega}\},$$

则曲面的面积

$$J(v) = \int_\Omega g(\nabla v)\mathrm{d}x, \quad g(\nabla v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1}\left|\frac{\partial \widehat{v}^i}{\partial x}\right|^2},$$

这里 $\widehat{v}^i = (v^1, \cdots, v^{i-1}, v^{i+1}, \cdots, v^{n+1}) \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial \widehat{v}^i}{\partial x}$ 是 $n \times n$ 的 Jacobi 行列式. 例如，当 $n=2$ 时,

$$g(\nabla v) = |v_x \times v_y|.$$

问题成为

$$\inf_{\Sigma, \partial\Sigma = \Gamma} \int_\Omega g(\nabla v)\mathrm{d}x.$$

调和映射　设 $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^k$(单位球面) 映射, Dirichlet 积分

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$$

设 $W = \{u \in H^1(\Omega) : u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^k\}$, 如果存在 u_0 使得

$$I(u_0) = \inf_{u \in W} \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,$$

则称 u_0 为调和映射.

特征值问题　求最小特征值 $\lambda > 0$ 满足:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

于是在方程两边乘以 u 后积分有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega |u|^2.$$

设

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad X = \left\{u : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2 = 1\right\},$$

第一特征问题成为

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X} I(u).$$

随着变分问题的深入研究, 人们发现变分问题最理想的空间是 Sobolev 空间, 一般的泛函是多重变分泛函

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{d}x,$$

允许空间

$$X = u_0 + W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$$

变分问题

$$(P) : \inf_{u \in X} I(u)$$

第1章　函数空间

这一章主要介绍一些基本的函数空间，Hölder 连续空间和 Sobolev 空间等.

1.1　连续与 Hölder 连续空间

定义 1.1　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $k \geqslant 0$ 是整数, 定义

(i) $C^k(\Omega, \mathbb{R}^N) = \left\{u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^N \,|\, u\text{是}k\text{阶连续导数的向量函数}\right\}$, 特别地, 当 $N = 1$ 时, 记为 $C^k(\Omega)$;

(ii) $C^k(\overline{\Omega})$ 是所有连续 k 阶偏导数到边界的函数全体, 范数

$$\|u\|_{C^k} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u|,$$

这里多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_i \geqslant 0, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$;

(iii) $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \operatorname{Supp} u \subset \Omega \text{是紧的}\}$, 这里 $\operatorname{Supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$, $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \bigcap C_0(\Omega)$;

(iv) $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$, $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\overline{\Omega})$, $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \bigcap C_0(\Omega)$.

定义 1.2　设 $D \subset \mathbb{R}^n, u :\to \mathbb{R}, 0 < \alpha \leqslant 1$, 定义半范数

$$[u]_{C^{0,\alpha}}(D) = \sup_{x,y \in D, x \neq y} \left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}.$$

(i) $C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C(\Omega) : [u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty, \forall K \subset \Omega\right\}$. 特别地, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty\right\}$, 而且定义范数

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

$\alpha = 1$ 称为 Lipschtz 连续;

(ii) $C^{k,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) : [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty, \forall K \subset \Omega,\right.$ 多重指标β满足 : $\left.|\beta| = k\right\}$. 特别地, $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^k(\overline{\Omega}) : [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty,\right.$ 多重指标β 满足 : $\left.|\beta| = k\right\}$, 而且定义范数

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

我们有下面的一些基本性质.

定理 1.1 (Ascoli-Arzela 定理) 设 Ω 是有界开集, $K \subset C(\overline{\Omega})$ 是有界等度连续的, 则 $\overline{K}$ 是紧的.

定理 1.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

(i) $(C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^k})$和$(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}})$ 是 Banach 空间;

(ii) 设 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ 且 $k \geqslant 0$ 是整数, 则

$$C^k(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \supset C^{k,1}(\overline{\Omega}).$$

(iii) 如果 Ω 是有界凸集, 则

$$C^{k,1}(\overline{\Omega}) \supset C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

1.2 L^p 空间

L^p 空间是基本的函数空间, 这一节主要介绍它的定义和基本性质.

1. 定义和性质

定义 1.3 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $1 \leqslant p < \infty$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, 定义 $L^p(\Omega) = \{u : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{m : |u(x)| \leqslant m, \text{ a.e.} x \in \Omega\}.$$

$L^p(\Omega)$ 空间的一些基本性质.

命题 1.1 (1) Höder 不等式, 对偶数 $p, q \geqslant 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$,

$$\int_\Omega |uv|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2) Minkowski 不等式. 假设 (S_1, μ_1) 和 (S_2, μ_2) 是两个测度空间, $F : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ 可测, 则 Minkowski 不等式

$$\left(\int_{S_2} \left|\int_{S_1} F(x,y)\mathrm{d}\mu_1(x)\right|^p \mathrm{d}\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x,y)|^p \mathrm{d}\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu_1(x).$$

如果 $p > 1$, 不等式两边有限, 则等式成立的充要条件是 $|F(x,y)| = \phi(x)\psi(y)$ a.e. 这里 ϕ 和 ψ 是非负可测函数. 如果 μ_1 是数数测度 $S_1 = \{1, 2\}$, 则 Minkowski 积分不等式给出经典的 Minkowski 不等式: 令 $f_i(y) = F(i, y)$, $i = 1, 2$, 积分不等式给出

$$\|u + v\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

(3) 对 $1 \leqslant p < \infty$, 简单函数, $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 空间稠密. 简单函数在 $L^\infty(\Omega)$ 中稠密.

(4) 对 $1 \leqslant p < \infty$, L^p 是可分的. 对 $1 < p < \infty$, L^p 是自反的 Banach 空间. $(L^1(\Omega))' = L^\infty$ 是 Banach 空间, 它不可分的, 也不是自反的.

$$(L^\infty(\Omega))' = \{\mu : \mu \text{ 是具有有限可加性的符号测度}, |\mu|(\Omega) < \infty, \mu \ll \mathcal{L}\}$$

对于任意 $f \in (L^\infty(\Omega))'$, 则存在 μ,

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega g(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall g \in L^\infty(\Omega),$$

$$\|f\| = \sup_{|g(x)|\leqslant 1}\left|\int_\Omega g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|.$$

可见 $(L^\infty(\Omega))' \supset L^1(\Omega)$.

证明 (1) 由于 $\log x$ 是凹函数, 对 $a, b > 0$,

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} = \log a + \log b = \log ab.$$

我们得到

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

于是取 $a = \dfrac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}}$, $b = \dfrac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}}$, 则

$$\frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}} \leqslant \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|_{L^p}^p} + \frac{|v(x)|^q}{q\|v\|_{L^q}^q},$$

积分得到

$$\frac{1}{\|u\|_{L^p}^p\|v\|_{L^q}^q}\int_\Omega |u(x)||v(x)|\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

(2) 令

$$H(y) = \int_{S_1} F(x,y)\mathrm{d}\mu_1(y),$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} |H(y)|^p\mathrm{d}\mu_2(y) &= \int_{S_2} |H(y)|^{p-1}|H(y)|\mathrm{d}\mu_2(y)\\
&\leqslant \int_{S_1}\int_{S_2} |H(y)|^{p-1}|F(x,y)|\mathrm{d}\mu_2(y)\mathrm{d}\mu_1(x)\\
&\leqslant \int_{S_1}\mathrm{d}\mu_1(x)\left(\int_{S_2}|F(x,y)|^p\mathrm{d}\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{S_2}|H(y)|^p\mathrm{d}\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

右边的 $\left(\int_{S_2}|H(y)|^p\mathrm{d}\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{q}}$ 与 x 无关, 两边除以这个因子即可.

(3) 对任何实函数 u, 存在一列简单函数序列 $\{s_n\}$ 收敛到它. 进一步，如果函数 u 有界, 可以选取简单函数列一致收敛到它.

$C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密: 由于 $u=u^+-u^-$, 可以假设 $u\geqslant 0$. 于是存在一个单调增加的简单函数列 $\{s_n\}$ 点收敛到 $u(x)$. 由于 $0\leqslant s_n(x)\leqslant u(x)$, $s_n\in L^p(\Omega)$. 由控制收敛定理 $\|s_n-u\|_{L^p(\Omega)}\to 0$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在一个 $s_k(x)$ 使得 $\|s_k-u\|_{L^p}<\varepsilon$. 因为 s_k 是简单函数, 其支集有有限的体积, 可以假设 $s_k(x)=0, x\in\Omega^c$. 由 Lusin 定理, 存在一个连续函数 $\phi\in C_0(\Omega)$,

$$|\phi(x)|\leqslant\|s_k\|_{L^\infty},\quad \forall x\in\Omega,$$

$$\mathrm{meas}(\{x\in\Omega:\phi(x)\neq s_k(x)\})\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{2\|s_k\|_{L^\infty}}\right)^p.$$

因此

$$\|\phi-s_k\|_{L^p}\leqslant\varepsilon,$$

$$\|u-\phi\|_{L^p}\leqslant\|u-s_k\|_{L^p}+\|s_k-\phi\|_{L^p}\leqslant 2\varepsilon. \qquad \square$$

2. 磨光核和光滑函数逼近

定义 1.4 设 $0\leqslant J\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对 $|x|\geqslant 1$, $J(x)=0$, $\int_{\mathbb{R}^n}J(x)\mathrm{d}x=1$, 则称 J 为软化子 (mollifier). 定义 $J_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

$$J_\varepsilon*u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}J_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$$

称为 u 的正则化.

这样的 J 可取:

$$J(x)=\begin{cases}c\exp\dfrac{1}{|x|^2-1}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

下面介绍正则化算子的基本性质.

命题 1.2 假设 u 在区域 Ω 之外恒为零,

(1) 如果 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 则 $J_\varepsilon*u(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(2) 假设 $\mathrm{Supp}\,u\subset\subset\Omega, \varepsilon<\mathrm{dist}(\mathrm{Supp}\,u,\partial\Omega)$, 则 $J_\varepsilon*u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$.

(3) 设 $u\in C(\Omega)$, 则 $J_\varepsilon*u(x)\to u$, 内部一致收敛. 自然地, $u\in C(\overline{\Omega})$, $J_\varepsilon*u(x)\to u$ 一致收敛.

(4) 如果 $u \in L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, 则 $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$, 而且

$$\|J_\varepsilon * u\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^p}, \quad \|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p} \to 0.$$

(5) 对每个 Lebesgue 点 x, $J_\varepsilon * u(x) \to u(x)$. 特别地,

$$J_\varepsilon * u(x) \to u(x), \text{a.e.} x \in \Omega.$$

证明 由于当 $|x-y| \geqslant \varepsilon$ 时，$J_\varepsilon(x-y) = 0$，对充分靠近边界的 $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) + \varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{Supp} u, \partial\Omega)$, 则 $\operatorname{Supp} u(y) \bigcap \operatorname{Supp} J_\varepsilon(x-y) = \varnothing$, 因此 $J_\varepsilon * u(x) = 0$. 注意到 $D^\alpha J_\varepsilon * u(x) = \int_{R^n} D^\alpha J_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$. 这样 (1) 和 (2) 成立.

从不等式

$$|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leqslant \sup_{|x-y|<\varepsilon} |u(y) - u(x)|$$

容易看到 (3) 的证明.

(4) 的第一个结论:

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon * u(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |J_\varepsilon * u(x)|^p\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |u|^p\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由于 $u = u^+ - u^-$, 故可假设 u 是非负的, 则存在一个单调增加的非负简单函数列 $s_n(x)$ 在 Ω 上点收敛到 $u(x)$, 且 $0 \leqslant s_n(x) \leqslant u(x)$. 由控制收敛定理，对任意的 $\eta > 0$, 存在 s_n 使得

$$\|u - s_n\|_{L^p} < \eta.$$

对于 $s_n(x)$, 可以假设 $s_n(x) = 0, x \in \Omega^c$, 由 Lusin 定理，存在一个连续函数 $\phi_n \in C_0(\Omega)$, 使得 $|\phi_n(x)| \leqslant \|s_n\|_{L^\infty}$，且

$$\operatorname{meas}(\{x \in \Omega : \phi_n(x) \neq s_n(x)\}) < \left(\frac{\eta}{2\|s_n\|_{L^\infty}}\right)^p.$$

这样 $\|s_n-\phi_n\|_{L^p}\leqslant\|s_n-\phi_n\|_{L^\infty}\mathrm{meas}(\{x\in\Omega:\phi_n(x)\neq s_n(x)\})^{\frac{1}{p}}\leqslant\eta$,

$$\|u-\phi_n\|_{L^p}\leqslant\|u-s_n\|_{L^p}+\|s_n-\phi_n(x)\|_{L^p}\leqslant 2\eta.$$

现在

$$\|J_\varepsilon*(u-\phi_n)\|_{L^p}\leqslant\|u-\phi_n\|_{L^p}<2\eta,$$
$$|J_\varepsilon*\phi_n(x)-\phi_n(x)|\leqslant\sup_{|x-y|<\varepsilon}|\phi_n(y)-\phi_n(x)|\int J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y,$$

由于 $\phi_n\in C_0(\Omega)$, 我们看到 $\|J_\varepsilon*\phi_n-\phi_n\|_{L^p}<\eta$. 因此

$$\begin{aligned}\|J_\varepsilon*u-u\|_{L^p}&\leqslant\|J_\varepsilon*(u-\phi_n)+J_\varepsilon*\phi_n-\phi_n+\phi_n-u\|_{L^p}\\&\leqslant\|J_\varepsilon*u-J_\varepsilon*\phi_n\|_{L^p}+\|J_\varepsilon*\phi_n-\phi_n\|_{L^p}+\|\phi_n-u\|_{L^p}\\&\leqslant 5\eta.\end{aligned}$$

这证明了 (4).

对于 (5), 假设 $u\in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 则对每个 Lebesgue 点 x,

$$|J_\varepsilon*u(x)-u(x)|\leqslant c(n)\|J\|_{L^\infty}⨍_{B(x,\varepsilon)}|u(y)-u(x)|\mathrm{d}y\to 0, \qquad \square$$

这里 $⨍_A f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|A|}\int_A f(x)\mathrm{d}x$ 表示 f 在 A 上的积分平均.

定理 1.3　对 $1\leqslant p<\infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

证明　由于 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，而 $C_0(\Omega)$ 可以由 $C_0^\infty(\Omega)$ 生成. $\square$

3. L^p 空间的强弱拓扑

定义 1.5　(i) 对 $1\leqslant p<\infty$, 我们说 $u_k\in L^p(\Omega)$ 弱收敛到 $u\in L^p(\Omega)$, 记为 $u_k\rightharpoonup u$, 如果

$$\int_\Omega(u_k-u)\phi\mathrm{d}x=0,\quad\forall\phi\in L^q(\Omega).$$

对 $p=\infty$, $u_k\in L^\infty(\Omega)$ 弱 * 收敛到 $u\in L^\infty(\Omega)$, 记为 $u_k\overset{*}{\rightharpoonup}u$, 如果

$$\int_\Omega(u_k-u)\phi\mathrm{d}x=0,\quad\forall\phi\in L^1(\Omega).$$

(ii) $u_k\in L^p(\Omega)$ 在 L^p 中强收敛到 $u\in L^p(\Omega)$, 如果

$$\|u_k-u\|_{L^p}\to 0.$$

定理 1.4(弱收敛序列的有界性)　假设在 $L^p(\Omega)$ 上, $u_k\rightharpoonup u$($L^\infty(\Omega)$ 上, $u_k\overset{*}{\rightharpoonup}u$), 则

(i) $\{u_k\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 上有界;

(ii) $\|u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\liminf_k\|u_k\|_{L^p(\Omega)}$.

证明 回忆共鸣定理: Banach 空间到线性赋范空间上的有界线性算子族 $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ 满足 $\{\|T_\alpha x\| : \alpha \in A\}$ 对任意 x 有界, 则 $\|T_\alpha\|$ 有界. 所以 (i) 成立. 注意到 $\|f\|_X = \inf_{\|g\|_{X'} \leqslant 1}\langle f, g\rangle$, 用 Hölder 不等式即得 (ii). □

由于自反的 Banach 空间是弱序列紧的, 我们有以下定理.

定理 1.5 (弱紧性) 设 $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ 上的有界集存在弱收敛子列.

$L^1(\Omega)$ 上的弱紧性可以看成一般的符号测度空间上的弱紧性.

定义 1.6 设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ 是 Ω 中 Borel 集构成的 σ 代数, 一个测度 $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ 是定义在 $\mathcal{B}$ 上的 σ 可加的非负函数. 如果 μ 是一个 Borel 正则测度: 对任意集 $A \subset X$, 存在一个 Borel 集 $B \supset A$, $\mu(B) = \mu(A)$, 且对任意紧集 $K \subset X$, $\mu(K) < \infty$, 则称 μ 是 **Radon 测度**.

一个符号测度 $\nu : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty]$ 是 σ 可加的函数, 且 $|\nu(K)| < \infty, \forall K$, 这里 K 是紧集. 符号测度 ν 有 Jordan 分解:

$$\nu = \nu^+ - \nu^-,$$

这里 $\nu^+(e) = \nu(e \cap \Omega^+), \Omega^+ = \{e \in \mathcal{B} : \nu(e) \geqslant 0\}$, $\nu^-(e) = -\nu(e \cap \Omega^-)$, $\Omega^- = \{e \in \mathcal{B} : \nu(e) \leqslant 0\}$.

ν 的全变差定义为

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

测度空间

$$\mathscr{M}(\Omega) = \{\mu : |\mu|(\Omega) < \infty\}.$$

每个 $f \in C_0(\Omega)$ 生成 $\mathscr{M}(\Omega)$ 上的线性泛函:

$$f(\nu) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}\nu(x), \quad \forall \nu \in \mathscr{M}(\Omega).$$

固定 ν, 让 f 变化我们得到 $C_0(\Omega)$ 上的线性泛函

$$\nu(f) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}\nu(x), \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

定理 1.6 $\forall F \in C_0(\Omega)'$ 存在唯一 $\nu \in \mathscr{M}(\Omega)$ 使得

$$F(f) = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}\nu(x), \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

$F \geqslant 0 : F(f) \geqslant 0, \forall 0 \leqslant f \in C_0(\Omega)$ 的充要条件是存在 $\nu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$ 满足上式.

定义 1.7 $\mu_k \rightharpoonup \mu$, 如果

$$\int_\Omega g\mathrm{d}\mu_k \to \int_\Omega g\mathrm{d}\mu, \quad \forall g \in C_0(\Omega).$$

弱紧性定理对 $L^\infty(\Omega)$ 也成立: $\|f_k\|_{L^\infty} \leqslant M$, 则存在子列 $f_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} f$. (见下面测度空间的弱紧性定理的证明)

弱紧性定理对 $L^1(\Omega)$ 是不成立的, 但是很自然地把 $L^1(\Omega)$ 看成测度空间 $\mathscr{M}(\Omega)$ 的子集, 而在测度空间上有弱紧性定理.

定理 1.7 (i) $L^1(\Omega)$ 上 $u_k \rightharpoonup u$ 充要条件是 $\{u_k\}$ 在 L^1 中有界, 且对任何可测集 B, 极限 $\lim\limits_k \int_B u_k$ 存在.

(ii) 设 $L^1(\Omega)$ 上 $u_k \rightharpoonup u$, 则 $\{u_k\}$ 强收敛的充要条件是在每个具有有限测度的可测集上, $\{u_k\}$ 依测度收敛.

(iii) 在 $L^p(\Omega)(1 < p < \infty)$ 上 $u_k \rightharpoonup u$, 且 $\|u_k\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$, 则

$$\lim_k \|u_k - u\|_{L^p} \to 0.$$

证明 (i) 必要性是显然的, 因为特征函数属于 L^∞. 下证充分性: 令

$$\mu(B) = \lim_k \int_B u_k \mathrm{d}x.$$

回忆 Vitali-Hahn-Saks 定理: 假设 $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ 是测度空间, $\nu(\Omega)$ 有限. λ_k 是符号测度, 对每个 k, 全变差 $|\lambda_k|(\Omega)$ 有限. 如果对每个 k, $\lambda_k \ll \nu$, 且 $\lim_k \lambda_k(B) = \lambda(B), \forall B \in \mathcal{B}$, 则 λ_k 关于 ν 的绝对连续性关于 k 是一致的, 即 $\lambda \ll \nu$, 且 λ 在 $\mathcal{B}$ 上 σ-可加.

由 Vitali-Hahn-Saks 定理, μ 是 σ-可加的, 且 $\mu \ll \mathcal{L}$. 由 Lebesgue-Nikodym 定理, 存在 $u \in L^1(\Omega)$, 使得

$$\lim_k \int_B u_k \mathrm{d}x = \int_B u \mathrm{d}x, \quad \forall B \subset \Omega.$$

由于阶梯函数在 $L^\infty(\Omega)$ 中稠密, 故结论成立. □

(ii) 必要性是显然的. 下证充分性: 由弱收敛,

$$\lim_k \int_B (u_k - u) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall B \subset \Omega. \tag{1.1}$$

考察非负测度

$$\mu_k(B) = \int_B |u_k - u| \mathrm{d}x, \quad \forall B \subset \Omega.$$

从式 (1.1) 和 Vitali-Hahn-Saks 定理, 易知

$$\lim_l \mu_k(B_l) = 0 \quad \text{关于 } k \text{ 一致, 这里任意递减的 } B_l \subset \Omega, \bigcap_{l=1}^\infty B_l = \varnothing. \tag{1.2}$$

现在利用式 (1.2) 可以得到结论:

$$\lim_k \mu_k(B_0) = 0, \quad \forall B_0 \subset \Omega, \mathrm{meas}(B_0) < \infty. \tag{1.3}$$