几何与代数简明教程

吴俊义 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

几何与代数简明教程

吴俊义 编著

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是由几何与代数课程讲义修订而成．大致涵盖了解析几何和高等代数两门课的主要内容，包括向量代数与解析几何、矩阵、一元多项式、向量空间、线性变换、内积、二次型和仿射几何．本书内容详实、层次清晰，没有刻意地追求面面俱到，而是主要讲解学生必须掌握的内容．本书另一大特点是将精心筛选的习题穿插在正文中，以方便读者在学习了一个新的概念或定理之后，能立即通过解题来加深理解．

本书可作为数学专业几何与代数课程的教学用书．

图书在版编目(CIP)数据

几何与代数简明教程/吴俊义编著．--上海：同济大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5608-6456-3

Ⅰ.①几… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①解析几何—高等学校—教材②高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O182②O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 164572 号

几何与代数简明教程

吴俊义 **编著**

责任编辑 亓福军 李小敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经　　销 全国各地新华书店

印　　刷 同济大学印刷厂

开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16

印　　张 14.25

字　　数 356 000

版　　次 2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5608-6456-3

定　　价 48.00 元

前　言

本书是由几何与代数课程讲义改编修订而成，大致涵盖了解析几何和高等代数两门课的主要内容.

正如书名所示，本书意在为初学者提供一个简明易懂的入门导引，而不求面面俱到. 因此为了突出内容的层次性，对于初学者来说并非必需的内容，如若当标准形、有理系数多项式及多元多项式都被略去了(感兴趣的读者不难通过书后列出的参考文献找到所需的内容). 同时，本书对某些内容的处理也与通常的做法不尽相同. 例如，讲到内积空间时，先讲酉空间再讲欧氏空间，这是因为三种重要的线性变换——埃尔米特变换、反埃尔米特变换以及酉变换(在欧氏空间中对应的是对称变换、反对称变换和正交变换)的对角化问题在酉空间中处理起来要比在欧氏空间中更容易. 另外，考虑到学生通过前面向量空间理论的学习已经熟悉了 n 维空间，所以最后一章讲仿射几何时，也就不再仅限于 2 维和 3 维几何.

在练习题的编排上，作者没有刻意去选择难题，也无意包罗所有题型. 所选择的问题主要目的都是为了帮助读者理解并掌握书中的基本概念和基本理论. 练习没有像多数教材那样被统一放在章节的末尾，而是穿插于正文中，置于相关的知识点之后. 这样做是为了方便读者在学习了一个新的概念或定理之后，能立即通过解题来检验并加深自己的理解. 同一个知识点的多道习题，总是尽量按照先易后难的顺序或者根据题目间的逻辑联系(比如，前一道题的结果可以用来证明后一道题，或后一道题是前一道题的推广等)来排列. 也许有些读者会觉得正文中穿插着练习会影响阅读的连贯性，也可以在初读时先略去所有练习，然后再回过头来着手解题. 但是完全忽略习题一路读下去则几乎肯定是不可行的.

解析几何和高等代数(或线性代数)的教材非常多，其中优秀的也不在少数. 书后的参考文献只列出了其中的一小部分(这些是在编写本书时借鉴过的)，想要寻找类似教材的读者可以把它们当成一份推荐书目.

应用数学学院的领导一直以来对几何与代数课程教学改革予以支持，作者撰写过程中也给予关怀，才使得本书得以正式出版，在此表示衷心的感谢. 另外，还要感谢李梦迪、刘晓玲、马洪斌、王瑶莉以及王真蓉五位同学帮忙打出了本书的初稿，并感谢我的同事郑兆娟老师和朱莉老师以及 2015 级学生周博文同学对本书的撰写提出的有益建议.

由于作者水平有限，书中不妥及疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编者
2016 年 8 月

目 录

第1章 向量代数与解析几何

1.1 向量及其运算

1.1.1 向量

所谓**向量**,就是一个有大小、有方向的量.通常用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等来表示一个向量,而向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小记为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$.如果一个向量的大小为0,则称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$.与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 大小相等方向相反的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**反向量**,记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

几何上用有向线段来表示向量.有向线段就是规定了端点顺序的线段.设 A, B 是空间中任意两点(以后用字母 A, B, C, p, q 等来记空间中的点),以 A 为起点以 B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$,其长度写作 $\|\overrightarrow{AB}\|$.有向线段的长度与方向正好表示了它所对应的向量的大小与方向.如果有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$,那么也将 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$,记作 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{AB}$.

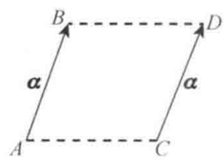

图 1.1.1

有向线段可以在空间中平移,所得的新有向线段长度方向不变,因此所对应的向量也应该是同一向量.比如,$\overrightarrow{AB}$ 被平移与 $\overrightarrow{CD}$ 重合(图1.1.1),则 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.故所有等长且平行的有向线段表示同一向量.

任取空间中一点 A,因为 $\overrightarrow{AA}$ 的长度为0,所以 $\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$.由于 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 等长反向,所以它们互为反向量.

1.1.2 向量的加法

定义 1.1.1 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和仍是一个向量,记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,定义如下(图1.1.2):任取空间中一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}$.这种求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的法则称为**三角形法则**.定义 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 还有另一种方法:任取空间中一点 A,以之为起点,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$,以线段 AB, AD 为边作平行四边形 $ABCD$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}$.第二种方法称为**平行四边形法则**.

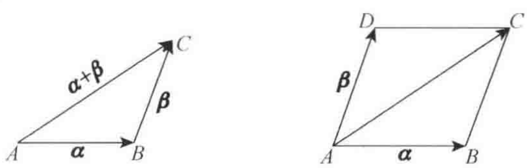

图 1.1.2

从上述定义可以得到向量加法的四条基本运算性质.

命题 1.1.1 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$,有:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;　　(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;　　(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

证明 只证明等式(2),另外三个留作练习.如图 1.1.3 所示,取空间中一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{\gamma}$,则 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$,所以

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}).$$

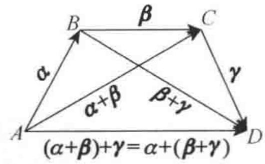

图 1.1.3

练习 1.1.1 证明命题 1.1.1 的等式(1),等式(3)和等式(4).

根据向量的加法还可以定义向量的减法,只须规定 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$ 即可.利用这个定义,可以对向量等式做移项运算,比如,若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$,则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$.

练习 1.1.2 求证:$|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\boldsymbol{\beta}\|\,|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

1.1.3 向量的数乘

定义 1.1.2 实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相乘得到另一向量,记作 $k\boldsymbol{\alpha}$,定义如下:其大小 $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$;其方向当 $k>0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向,当 $k<0$ 时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向.

因为 $(-1)\boldsymbol{\alpha}$ 大小等于 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$,而与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向,所以有 $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

练习 1.1.3 求证:对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;对任意实数 k, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

数乘满足以下运算律.

命题 1.1.2 对任意实数 k, l 以及任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 有:

(1) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;　　(2) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(3) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;　　(4) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

证明 从数乘的定义立得(1).至于(2),若 k 与 l 有一个为 0,则由练习 1.1.3 可知等式两边都等于零向量.若 k 与 l 都不为 0,那么

$$\|k(l\boldsymbol{\alpha})\|=|k|\,\|l\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,|l|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|=|kl|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|(kl)\boldsymbol{\alpha}\|.$$

如果 k 与 l 同号,等式(2)两边都与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向,因此相等;若异号,等式(2)两边都与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向,从而也相等.以下 $(kl)\boldsymbol{\alpha}$ 也直接写作 $kl\boldsymbol{\alpha}$.

对于(3),如果 k, l 有一个为 0,或者 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,等式显然成立.若 k, l 同号,假设都为正数,且 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是零向量,则等式两端都与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向,并且

$$\|(k+l)\boldsymbol{\alpha}\|=|k+l|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|+|l|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|k\boldsymbol{\alpha}\|+\|l\boldsymbol{\alpha}\|=\|k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}\|,$$

所以等号成立.k, l 都为负数时同理.至于 k, l 异号的情况,留作练习(见练习 1.1.4).

等式(4)当 $k=0$ 时显然成立.当 $k\neq0$ 时,如果 $\boldsymbol{\beta}=l\boldsymbol{\alpha}$,则

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=k(1\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha})=k(1+l)\boldsymbol{\alpha}\\&=k\boldsymbol{\alpha}+kl\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

否则,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AC}$, $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\overrightarrow{AC}$.根据三角形的相似关系(图 1.1.4), $k\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}$.所以, $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

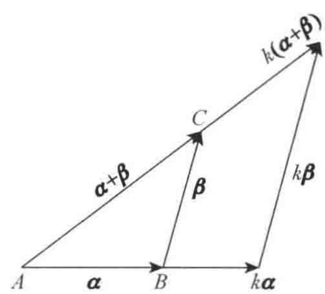

图 1.1.4

练习 1.1.4 请把命题 1.1.2 中的等式(3)的证明补充完整.

向量的加法和数乘统称为向量的**线性运算**.

1.1.4 共线与共面

将向量的起点移到某一直线(平面)上,如果它的终点也落在此直线(平面)上,则称该向

量与此直线(平面)**共线**(**共面**).如果两个向量都与同一直线(平面)共线(共面),就称这两个向量共线(共面).$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线也称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{\alpha} /\!/ \boldsymbol{\beta}$.

显然,零向量与任意向量共线(共面).两个向量共线当且仅当它们同向或反向,所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $k\boldsymbol{\alpha}$ 共线.由向量加法的定义可知 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共面.

命题 1.1.3 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 k, l,使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

证明 若存在不全为零的实数 k, l,使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,不妨设 $l\neq 0$,那么 $\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{k}{l}\boldsymbol{\alpha}$,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线.反之,若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线,当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,$\boldsymbol{\beta}=\pm\dfrac{\|\boldsymbol{\beta}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$.令

$$k=\pm\|\boldsymbol{\beta}\|,\ l=-\|\boldsymbol{\alpha}\|,$$

则 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.若 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,只须令 $k=1$, $l=0$.

命题 1.1.4 向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面当且仅当存在不全为零的实数 k, l, m,使得 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

证明 如果这样的实数 k, l, m 存在,不妨设 $m\neq 0$,那么

$$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{k}{m}\boldsymbol{\alpha}-\frac{l}{m}\boldsymbol{\beta},$$

所以 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共面.反之,若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线,则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 必共面.若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 不共线(图 1.1.5),作$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{\beta}$,分别落在直线 Ox,Oy 上,又作$\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{\gamma}$.然后过 S 作平行于 Oy 的直线与 Ox 交于 S_1,作平行于 Ox 的直线与 Oy 交于 S_2,则$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OS_1}+\overrightarrow{OS_2}$.设$\overrightarrow{OS_1}=k'\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OS_2}=l'\overrightarrow{OQ}$,那么

$$\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{OS}=k'\overrightarrow{OP}+l'\overrightarrow{OQ}=k'\boldsymbol{\alpha}+l'\boldsymbol{\beta},$$

令 $k=k'$, $l=l'$, $m=-1$,则 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

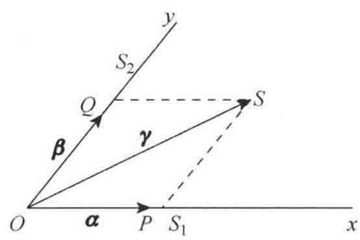

图 1.1.5

例 1.1.1 三点 P_1,P_2,P_3 共线,当且仅当存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\overrightarrow{OP_1}+k_2\overrightarrow{OP_2}+k_3\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0},\text{且 } k_1+k_2+k_3=0, \tag{1.1.1}$$

其中 O 为任意取定的一点.

证明 若已知 P_1,P_2,P_3 共线,那么向量$\overrightarrow{P_1P_2}$,$\overrightarrow{P_1P_3}$共线.由命题 1.1.3,存在不全为零的实数 k, l,使得 $k\overrightarrow{P_1P_2}+l\overrightarrow{P_1P_3}=\mathbf{0}$.任取一点 O,则$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}$.因此,

$$\begin{aligned}k\overrightarrow{P_1P_2}+l\overrightarrow{P_1P_3}&=k(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})+l(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1})\\&=-(k+l)\overrightarrow{OP_1}+k\overrightarrow{OP_2}+l\overrightarrow{OP_3}.\end{aligned}$$

令 $k_1=-(k+l)$,$k_2=k$,$k_3=l$,就有

$$k_1\overrightarrow{OP_1}+k_2\overrightarrow{OP_2}+k_3\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0},\text{且 } k_1+k_2+k_3=\mathbf{0}.$$

反之,由式(1.1.1)得

$$-(k_2+k_3)\overrightarrow{OP_1}+k_2\overrightarrow{OP_2}+k_3\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0},$$

即

$$k_2(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})+k_3(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1})=\mathbf{0},$$

所以 $k_2\overrightarrow{P_1P_2}+k_3\overrightarrow{P_1P_3}=\mathbf{0}$. 因为 k_2,k_3 不全为零(否则 $k_1=k_2=k_3=0$),故$\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}$共线,所以 P_1,P_2,P_3 三点共线.

练习 1.1.5 求证:四点 P_1,P_2,P_3,P_4 共面当且仅当存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3,k_4,使得 $k_1\overrightarrow{OP_1}+k_2\overrightarrow{OP_2}+k_3\overrightarrow{OP_3}+k_4\overrightarrow{OP_4}=\mathbf{0}$,且 $k_1+k_2+k_3+k_4=0$,其中 O 为任意取定的一点.

练习 1.1.6 求证:点 P 是线段 AB 的中点的充分必要条件是,对任意取定的一点 O 都有$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

练习 1.1.7 求证:点 P 在三角形$\triangle ABC$ 内(包括三条边)的充分必要条件是,对任意取定的一点 O 都存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP},\text{且 } k_1+k_2+k_3=1.$$

定理 1.1.1 如果向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面,那么对空间中任一向量 $\boldsymbol{\rho}$,都存在唯一的实数 k,l,m,使得

$$\boldsymbol{\rho}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma}.$$

证明 存在性的证明类似于命题 1.1.4 的证明中必要性的部分,只是把平面换成空间而已,请读者自己完成. 下面证明唯一性.

设 $\boldsymbol{\rho}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma}=k'\boldsymbol{\alpha}+l'\boldsymbol{\beta}+m'\boldsymbol{\gamma}$,则

$$(k-k')\boldsymbol{\alpha}+(l-l')\boldsymbol{\beta}+(m-m')\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面,根据命题 1.1.4,

$$k-k'=l-l'=m-m'=0,$$

即 $k=k',\ l=l',\ m=m'$.

1.1.5 点积

定义 1.1.3 两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**点积**是一个实数,记作 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$. 如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都不为零向量,定义

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle,$$

其中符号$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$表示向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角. 若二者中至少有一个是零向量,则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$.

由定义可得 $\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}$. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都不为零向量,则 $\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|}$.

定义 1.1.4 两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 如果点积为 0,则称为**正交**,记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

根据定义,零向量与任意向量都正交.

定理 1.1.2 空间中任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 关于给定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有如下正交分解

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1/\!/\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\alpha}$,且分解是唯一的.

证明 若 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}+\mathbf{0}$. 若 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$(图 1.1.6),作$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{\beta}$,并过点 O,P 作直线 Ox. 然后过 Q 作直线 Ox 的垂线并与之交于 Q_1,则有

$$\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ_1}+\overrightarrow{Q_1Q},$$

其中$\overrightarrow{OQ_1}/\!/\boldsymbol{\alpha}$,$\overrightarrow{QQ_1}\perp\boldsymbol{\alpha}$.

为了证明分解的唯一性,设

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}'_1 + \boldsymbol{\beta}'_2,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}'_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}'_2 \perp \boldsymbol{\alpha}$. 因此

$$\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}'_1 = \boldsymbol{\beta}'_2 - \boldsymbol{\beta}_2.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}'_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}'_2 - \boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\alpha}$,故 $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}'_1 \perp \boldsymbol{\beta}'_2 - \boldsymbol{\beta}_2$,即 $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}'_1 = \boldsymbol{0}$. 所以

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}'_1,\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}'_2.$$

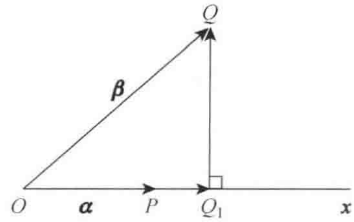

图 1.1.6

定义 1.1.5 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的正交分解为 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$,则 $\boldsymbol{\beta}_1$ 称为 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的投影,记作 $\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta}$.

练习 1.1.8 设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,证明:$\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}$;$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta}$.

练习 1.1.9 设 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\beta}\| = 1$,且 $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = 60°$,求 $\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta}$, $\mathrm{Pr}_{\beta}\boldsymbol{\alpha}$.

命题 1.1.5 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$,及任意实数 k,有

(1) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$,

(2) $\boldsymbol{\alpha}\cdot(k\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$,

(3) $\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$,

(4) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$,等号当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 时才成立.

证明 等式(1)、等式(2)、等式(4)由点积的定义直接得出,这里只证等式(3).

若 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$,等式(3)等号两边都为 0,故等式成立. 若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,根据定理 1.1.2,可将 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别作正交分解:$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$. 那么

$$\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1) + (\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\gamma}_2).$$

因为 $(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1) /\!/ \boldsymbol{\alpha}$, $(\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\gamma}_2) \perp \boldsymbol{\alpha}$,故

$$\mathrm{Pr}_{\alpha}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 = \mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta} + \mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\gamma}.$$

利用练习 1.1.8 的结果,$\mathrm{Pr}_{\alpha}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathrm{Pr}_{\alpha}\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}$,所以

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha},$$

比较等式两边,即得 $\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$.

练习 1.1.10 求证:若某个向量与三个不共面向量都正交,则该向量为零向量.

练习 1.1.11 设 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$,求证:$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2$.

练习 1.1.12 求证:

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2 = 2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\beta}\|^2;$$
$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 - \|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2 = 4\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}.$$

练习 1.1.13 已知 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \|\boldsymbol{\beta}\| = \|\boldsymbol{\gamma}\| = \|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\| = 1$,求 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

练习 1.1.14 用向量法证明三角形的三条高交于一点.

1.1.6 叉积

定义 1.1.6 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的**叉积**是一个向量,记为 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$. 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都不为零向量,定义其长度为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|\ \|\boldsymbol{\beta}\|\sin\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$,方向与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都垂直,且与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 呈右手关系:右手摊开,拇指与其他四指垂直,当四指从 $\boldsymbol{\alpha}$ 弯向 $\boldsymbol{\beta}$(转角小于 π)时,拇指方向即是 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的方向(图 1.1.7). 若其中至少有一个为零向量,则 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$.

根据定义，$\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|$ 等于以 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的面积.

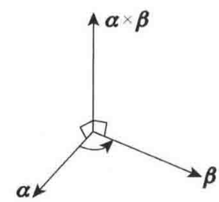

图 1.1.7

练习 1.1.15 求证：$\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2$.

练习 1.1.16 试问三向量 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\rho}$ 是否共面？

练习 1.1.17 试用叉积的定义证明三角形的正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

其中 a,b,c 分别表示三角形的三条边的边长，$\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 表示这三条边分别所对应的角的正弦.

根据定义，当 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 共线时，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是零向量. 反之，若 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，则要么是 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\beta}$ 等于 $\mathbf{0}$，要么因为 $\sin\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$，无论是哪一种原因，都说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线. 因此，

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}.$$

练习 1.1.18 设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1\parallel\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\alpha}$. 求证：$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}_2$.

命题 1.1.6 设 k 是任意实数，$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是任意向量，则

(1) $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$,

(2) $\boldsymbol{\alpha}\times(k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$,

(3) $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$.

证明 由叉积的定义易得等式(1)与等式(2)，这里只证等式(3). 若 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则等式(3)等号两边都为 $\mathbf{0}$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，将 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别作正交分解，设 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2$，其中，$\boldsymbol{\beta}_1\parallel\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}_1\parallel\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}_2\perp\boldsymbol{\alpha}$，所以 $(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\gamma}_1)\parallel\boldsymbol{\alpha}$，$(\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\gamma}_2)\perp\boldsymbol{\alpha}$. 由练习 1.1.18 的结果，有

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\gamma}_2).$$

另外，$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}_2$，及 $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\gamma}_2)$ 分别等于将向量 $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\gamma}_2$，及 $\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\gamma}_2$ 拉长 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 倍，再绕 $\boldsymbol{\alpha}$ 右旋（即旋转方向与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向构成右手关系）$90°$ 所得的向量（图 1.1.8）. 由于拉长相同倍数且绕轴旋转同样角度不会改变加法关系，所以

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\gamma}_2)=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}_2.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$，这样就有 $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$.

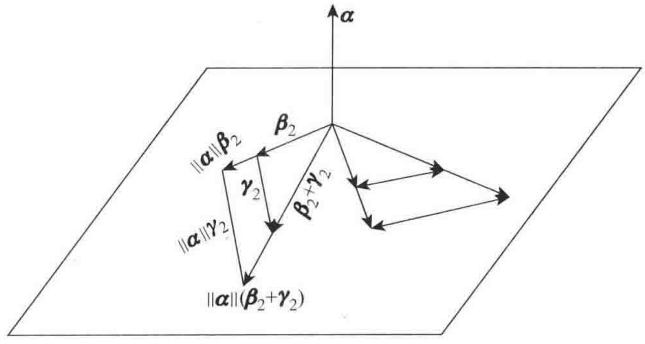

图 1.1.8

练习 1.1.19 求证：如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$.

1.1.7 混合积

定义 1.1.7 三个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 的混合积定义为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})$，记作 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

依定义，$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})|$ 恰好等于以 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积.

如果三个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的混合积$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$大于 0，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 呈右手关系. 如果小于 0，呈左手关系.

练习 1.1.20 求证：$|\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}\|$.

命题 1.1.7 设 k 是任意实数，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\rho}$ 是任意向量，则

(1) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$,

(2) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,

(3) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$,

(4) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

练习 1.1.21 证明命题 1.1.7.

练习 1.1.22 试从命题 1.1.7 推出以下等式：

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$,

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})=0$,

$(\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, k\boldsymbol{\gamma})=k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$,

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma})$,

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\rho})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho})$.

定理 1.1.3 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=0$.

证明 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面，则存在不全为零的实数 k, l, m，使得

$$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}+m\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}.$$

不妨假设 $k\neq0$，那么 $\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{l}{k}\boldsymbol{\beta}-\dfrac{m}{k}\boldsymbol{\gamma}$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=\left(-\frac{l}{k}\boldsymbol{\beta}-\frac{m}{k}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\right)=-\frac{l}{k}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})-\frac{m}{k}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

因为$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=0$，$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=-(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})=0$，故$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=0$.

反之，若$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=0$，则或者 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$ 但 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$，或者 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. 如果是前者，因为 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交于 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 必与 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面. 若是后者，则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 共线，因此 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面.

练习 1.1.23 求证：如果 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面.

练习 1.1.24 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 不共面，试证：对于任意向量 $\boldsymbol{\rho}$，都有

$$\boldsymbol{\rho}=\frac{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\alpha}+\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\beta}+\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}.$$

练习 1.1.25 求证：对任意四个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\rho}$，都有

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}.$$

1.2 坐 标 系

1.2.1 基

定义 1.2.1 取空间中任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 构成有序组，称它们为一个**基**. 对空间中任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\varepsilon}_1+y\boldsymbol{\varepsilon}_2+z\boldsymbol{\varepsilon}_3$，称三元有序实数组$(x, y, z)$为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的**坐标**，记 $\boldsymbol{\alpha}=(x, y, z)$.

若基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 呈右手关系，称其为**右手基**；若呈左手关系则称为**左手基**. 对于平面

坐标基,若基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 逆时针旋转一个小于 180°的角后与另一个基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 同向,就称基是右手基.以下所用的基都是指右手基.

根据定理 1.1.1,对给定的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$,向量的坐标是唯一的.设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2),则

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

根据向量加法与数乘的性质,

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + x_2)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (y_1 + y_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + (z_1 + z_2)\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$
$$k\boldsymbol{\alpha} = (kx_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (ky_1)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + (kz_1)\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

所以有

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$
$$k(x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1).$$

练习 1.2.1 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下,设 $\boldsymbol{\alpha}=(5,2,1)$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,4,2)$, $\boldsymbol{\gamma}=(-1,-1,5)$,求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 的坐标.

向量的关系也可以用其坐标来表示.设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1 + a_2 + a_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, c_3)$. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 k, l,使得

$$k(a_1, a_2, a_3) + l(b_1, b_2, b_2) = \mathbf{0},$$

即当且仅当 $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$. $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 共面当且仅当存在不全为零的实数 x, y, z,使得

$$x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = \mathbf{0},$$

即当且仅当下列方程组有非零解(x, y, z 不全为零的解):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases}$$

也可以用坐标来计算向量的点积.取一个基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$,设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$,那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{\varepsilon}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \boldsymbol{\varepsilon}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j (\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j). \end{aligned}$$

这个求和式展开来共有九项.点积 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ 的坐标表达式要想写得简单些,就得选取特殊的基.

定义 1.2.2 满足

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 称为**单位正交基**.

在单位正交基下,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$
$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$
$$\cos\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$
$$a_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i, \ i = 1, 2, 3.$$

练习 1.2.2 在单位正交基中，求向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,2)$ 沿 $\boldsymbol{\alpha}=(3,1,2)$ 的正交分解 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\alpha}$.

练习 1.2.3 在单位正交基中，求向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)$ 在三个基向量上的投影.

对于叉积，根据其运算性质(命题 1.1.6)，有

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{\varepsilon}_3\times\boldsymbol{\varepsilon}_1+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1\times\boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是单位正交基，依定义(注意，我们所用的基是右手基!)有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1\times\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3\times\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_2,\end{cases}$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{\varepsilon}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

称代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，记作 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$. 从定义不难推出

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

右边的行列式称为左边的行列式的转置行列式，这个等式说明二阶行列式与它的转置行列式是相等的.

现在，可以将叉积的坐标式重新写成

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

练习 1.2.4 求证：$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}$.

练习 1.2.5 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，求证：

$$\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0.$$

例 1.2.1 证明如下二重叉积公式：

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}.$$

证明 如果 $\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\gamma}$，不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\gamma}$. 等式左端等于 $\mathbf{0}$，右端为

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})k\boldsymbol{\gamma}-(\boldsymbol{\alpha}\cdot k\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},$$

显然等于 $\mathbf{0}$. 等式成立.

如果 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 不平行，将 $\boldsymbol{\beta}$ 关于 $\boldsymbol{\gamma}$ 正交分解为 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1/\!/\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\gamma}$. 则

$$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{\gamma}.$$

又设 $\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\dfrac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3$，所以

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{\gamma})=\|\boldsymbol{\beta}_2\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\|\boldsymbol{\beta}_2\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\varepsilon}_1.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 构成单位正交基，所以 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{\varepsilon}_3$. 代入上式

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\|\boldsymbol{\beta}_2\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\|[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{\varepsilon}_3\times\boldsymbol{\varepsilon}_1]$$

$$\begin{aligned}&= \|\boldsymbol{\beta}_2\|\,\|\boldsymbol{\gamma}\|[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{\varepsilon}_2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_3]\\&=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\|\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{\varepsilon}_3)\|\boldsymbol{\beta}_2\|\boldsymbol{\varepsilon}_2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\|\boldsymbol{\beta}_2\|\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|\boldsymbol{\gamma}\|\boldsymbol{\varepsilon}_3\\&=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}_2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$

根据上一段的证明，$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}_1-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}_1)\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})&=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}_2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}_1-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}_1)\boldsymbol{\gamma}\\&=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$

练习 1.2.6 证明雅可比(Jacobi)恒等式：$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

练习 1.2.7 证明拉格朗日(Lagerange)恒等式：

$$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\rho})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\rho}\end{vmatrix}.$$

练习 1.2.8 求证：

(1) $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})^2$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\rho})=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\gamma}-(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\rho}=(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\alpha}$.

至于混合积，设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\ &a_1(b_2c_3-b_3c_2)\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_3\times\boldsymbol{\varepsilon}_1)+\\&a_3(b_1c_2-b_2c_1)\boldsymbol{\varepsilon}_3\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_1\times\boldsymbol{\varepsilon}_2).\end{aligned}$$

根据命题 1.1.7 的(2)，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_3\times\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\varepsilon}_3\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_1\times\boldsymbol{\varepsilon}_2).$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})&=[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3)\\&=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3).\end{aligned}$$

称如下代数和为三阶行列式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

记为 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$. 这个定义式比较长，可用如图 1.2.1 所示的"对角线法则"来记忆：如图 1.2.1 所示，总共可以画出六条带箭头的连线：三条从左往右，三条从右往左. 从左往右的箭头线串联的三个元素之积带"＋"号，从右往左的箭头线串联的三个元素之积带"－"号，行列式就等于这些带符号的乘积之和. 用对角线法则不难推出

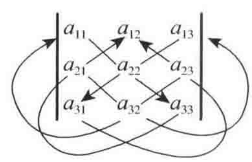

图 1.2.1

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

右边的行列式称为左边的行列式的转置行列式，这个等式说明 3 阶行列式与它的转置行列式是相等的.

引进 3 阶行列式的定义后，混合积可以写成

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3).$$

如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是单位正交基,那么 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_2\times\boldsymbol{\varepsilon}_3)=1$,则

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

练习 1.2.9 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 关于单位正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的坐标分别为 (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3),求证:$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

练习 1.2.10 利用行列式与混合积的关系证明 3 阶行列式具有如下性质:

(1) 交换行列式的任意两行,所得行列式与原行列式异号;

(2) 将行列式某行的每个数都乘以数 k,所得行列式等于 k 乘以原行列式;

(3) 将行列式某行的每个数都乘以数 k 加到另一行,所得行列式与原行列式相等.

利用行列式与它的转置行列式相等证明:上述性质不仅对“行”成立,对“列”也是成立的.

练习 1.2.11 利用 2 阶、3 阶行列式与叉积、混合积的关系证明如下等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

上述公式称为行列式按第一行展开的展开公式.你能否写出将行列式按第二行、第三行展开的相应公式?

利用等式(1.2.1),如果在单位正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.2.2 证明方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

有唯一解的充要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

并且唯一解为