

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术



离散数学

刘忠艳 主编

高志军 王光辉 付喜辉 副主编

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

离散数学

刘忠艳 主编

高志军 王光辉 付喜辉 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书包括数理逻辑、集合论、图论和代数系统四部分内容。本书中定义、原理论述详细,通俗易懂,内容丰富,既注重对基本概念的论述,又注重原理的证明方法及其在计算机科学中的实际应用。每一章的后面都有对应本章知识点的习题,便于读者更深入理解和巩固所学的知识理论基础,在教授时建议 64 学时左右。

本书可以作为计算机及相关专业的本科生教材,也可以作为计算机相关资格水平考试的参考书,同时也可以为从事计算机软、硬件开发和应用的人员提供参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘忠艳主编.--北京:清华大学出版社,2016

21 世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术

ISBN 978-7-302-44173-1

I. ①离… II. ①刘… III. ①离散数学—高等学校—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 160137 号

责任编辑:郑寅堃 薛 阳

封面设计:傅瑞学

责任校对:焦丽丽

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:14.25 字 数:338 千字

版 次:2016 年 9 月第 1 版 印 次:2016 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:29.00 元

产品编号:070099-01

出版说明

随着我国改革开放的进一步深化,高等教育也得到了快速发展,各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度,通过教育改革合理调整和配置了教育资源,优化了传统学科专业,积极为地方经济建设输送人才,为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是,高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要,不少高校的专业设置和结构不尽合理,教师队伍整体素质亟待提高,人才培养模式、教学内容和教学方法需要进一步转变,学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007年1月,教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》,计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”(简称“质量工程”),通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容,进一步深化高等学校教学改革,提高人才培养的能力和水平,更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中,各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势,对其特色专业及特色课程(群)加以规划、整理和总结,更新教学内容、改革课程体系,建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上,经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议,清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程,分别规划出版系列教材,以配合“质量工程”的实施,满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合21世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版

社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括:

- (1) 21 世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。
- (2) 21 世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。
- (3) 21 世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。
- (4) 21 世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。
- (5) 21 世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。
- (6) 21 世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。
- (7) 21 世纪高等学校规划教材·电子商务。
- (8) 21 世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人:魏江江

E-mail:weijj@tup.tsinghua.edu.cn



前言

离散数学是现代数学的一个重要分支,也是计算机科学的理论基础,它以离散量为研究对象,研究各种各样的离散量的结构及其关系,这正与计算机所处理的对象相一致,因此成为计算机科学的基本工具。它的前导课程为“线性代数”,可以为后续课程,如“数据结构”、“数据库”、“信息科学”、“算法设计”等课程提供必要的数学基础。

在本书编写过程中,不但考虑了其与前导课程的关系,也考虑了其与后续课程的关系,注重理论与实践的结合。把理论应用于实际,解决实际问题,这是本书的一大特色。对于每一章的理论,都通过例题或习题应用于实际,解决了实际应用的问题。本书详细论述了相关概念及定理,对于大部分定理,都给出了证明推理,学生不仅要学会理解定理,更重要的是要学习数学思维,为今后的学习和研究打下坚实的数学基础。

本书主要包括数理逻辑、集合论、图论和代数系统四部分内容。第一部分数理逻辑由高志军编写,第二部分集合论由王光辉编写,第三部分图论由刘忠艳编写,第四部分代数系统由付喜辉编写。

本书既可作为计算机及相关专业的本科生教材,也可以作为计算机相关资格水平考试的参考书,同时也可作为从事计算机软件、硬件开发和应用人员的指导书。

由于作者水平有限,书中有不妥或疏漏之处在所难免,恳请读者们批评指正,多提出宝贵意见,便于今后改正。

编 者

2016年3月

目 录

第一部分 数理逻辑

第 1 章 命题逻辑	3
1.1 命题的基本概念	3
1.1.1 命题及分类	3
1.1.2 逻辑联结词	4
1.2 命题公式及类型	6
1.2.1 命题公式及赋值	6
1.2.2 命题公式类型与真值表	8
1.3 命题公式的等价演算	12
1.3.1 命题公式的等价式	12
1.3.2 命题公式的等价演算	14
1.3.3 等价演算的实例应用	16
1.4 命题公式的范式及应用	17
1.4.1 析取范式与合取范式	17
1.4.2 主析取范式与主合取范式	19
1.4.3 主范式的实例应用	22
1.5 全功能逻辑联结词组	24
1.6 命题公式的推理及证明	25
1.6.1 推理基本定义	26
1.6.2 推理的证明方法	26
1.6.3 推理演算的实例应用	30
习题 1	31
第 2 章 谓词逻辑	36
2.1 谓词逻辑基本概念	36
2.1.1 谓词逻辑三要素	36
2.1.2 多元谓词命题符号化	38
2.2 谓词公式及类型	40
2.2.1 谓词公式	40
2.2.2 谓词公式的类型	41
2.3 谓词公式的等价演算	43

2.4 谓词公式的前束范式·····	45
2.5 谓词公式的推理·····	46
习题 2 ·····	49

第二部分 集 合 论

第 3 章 集合 ·····	55
3.1 集合的基本概念·····	55
3.1.1 集合与元素的基本概念 ·····	55
3.1.2 集合与集合间的关系 ·····	56
3.2 集合的运算·····	58
3.3 集合中元素的计数·····	62
习题 3 ·····	66
第 4 章 二元关系与函数 ·····	69
4.1 集合的笛卡儿积·····	69
4.2 二元关系·····	71
4.3 关系的性质·····	76
4.4 关系的闭包·····	80
4.5 等价关系与划分·····	85
4.6 偏序关系·····	88
4.7 函数的定义与性质·····	90
4.8 函数的复合与反函数·····	94
习题 4 ·····	97

第三部分 图 论 部 分

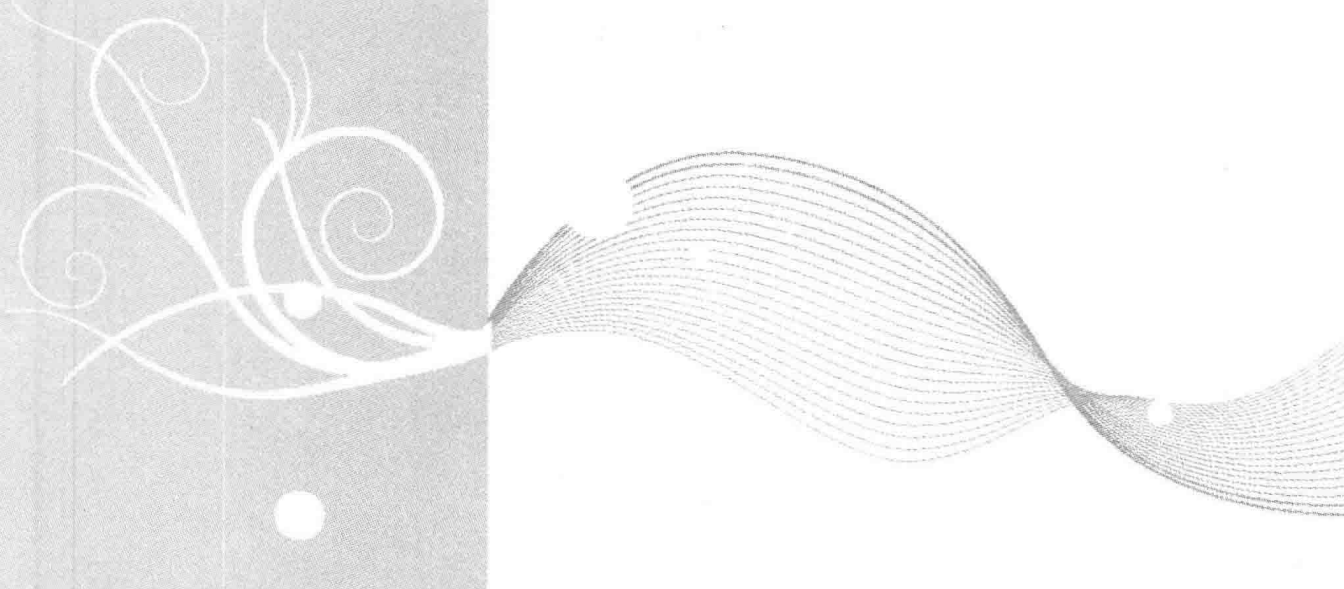
第 5 章 图论·····	103
5.1 图的基本概念 ·····	103
5.1.1 图的定义及相关概念·····	103
5.1.2 结点的度·····	104
5.1.3 完全图和补图·····	106
5.1.4 子图与图的同构·····	107
5.2 图的连通性 ·····	109
5.2.1 通路和回路·····	110
5.2.2 图的连通性·····	111
5.2.3 无向图的连通度·····	112
5.3 图的矩阵表示 ·····	113
5.3.1 无向图的关联矩阵·····	114

5.3.2 有向图的关联矩阵	114
5.3.3 有向图的邻接矩阵	115
5.3.4 有向图的可达矩阵	116
5.4 最短路径与关键路径	116
5.4.1 问题的提出	116
5.4.2 最短路径	117
5.4.3 关键路径	120
5.5 欧拉图与哈密顿图	122
5.5.1 欧拉图	122
5.5.2 哈密顿图	125
5.6 平面图	129
5.6.1 平面图的定义	130
5.6.2 欧拉公式	131
5.6.3 平面图着色	134
习题 5	137
第 6 章 树	141
6.1 树的性质	141
6.2 生成树与最小生成树	143
6.2.1 生成树	143
6.2.2 最小生成树	144
6.3 根树及其应用	146
6.3.1 有向树	146
6.3.2 根树的分类	147
6.3.3 根树的应用	149
习题 6	152
第四部分 代 数 系 统	
第 7 章 排列组合	157
7.1 两个基本法则	157
7.2 排列与组合	158
7.2.1 相异元素不允许重复的排列数和组合数	158
7.2.2 相异元素允许重复的排列问题	159
7.2.3 不尽相异元素的全排列	160
7.2.4 相异元素不允许重复的圆排列	161
7.2.5 相异元素允许重复的组合问题	162
7.2.6 不尽相异元素任取 r 个的组合问题	163
习题 7	167

第 8 章 代数系统	168
8.1 二元运算及其性质	168
8.2 代数系统概述	173
习题 8	176
第 9 章 典型代数系统	178
9.1 半群与独异点	178
9.2 群的定义与性质	181
9.2.1 群的定义	181
9.2.2 Klein 四元群	182
9.2.3 群的直积	182
9.2.4 群论中常用的概念或术语	182
9.2.5 群中元素的 n 次幂	183
9.2.6 群中元素的阶	183
9.2.7 群的性质——群的幂运算规则	184
9.2.8 消去律	185
9.3 子群	186
9.4 循环群与置换群	187
9.5 陪集与拉格朗日定理	189
9.6 同态与同构	194
9.7 环与域	199
9.8 格	204
习题 9	212
参考文献	216

第一部分

数理逻辑



逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成年时代。
数理逻辑是一门用数学方法研究推理的形式结构和规律的数学学科。数理逻辑主要包括命题逻辑和谓词逻辑。首先介绍一下命题逻辑。

11.1 命题的基本概念

1.1.1 命题及分类

1. 命题的概念

定义 1.1 判断结果非真即假的陈述句为命题。命题是命题逻辑最基本的单位。

判断结果称为命题的**真值**,真值只取两个值:真或假。真值为真的命题称为**真命题**,真值为假的命题称为**假命题**。真命题表达的判断正确,假命题表达的判断错误。任何命题的真值都是唯一的。

因此,判断给定句子是否为命题,应该分两步:首先判定它是否为陈述句,其次判断它是否有唯一的真值。

另外,感叹句、祈使句和疑问句都不是命题。

例 1.1 下列句子中哪些是命题?

- (1) π 大于 $\sqrt{2}$ 吗?
- (2) 请不要吸烟!
- (3) 你的外语讲得太棒了!
- (4) a 大于 b 。
- (5) 3 是奇数。
- (6) 金星上有冰。
- (7) 3 的平方与 4 的平方和不等 于 5 的平方。
- (8) 3 是奇素数。
- (9) 3 是奇数或素数。
- (10) 若 3 是奇数,则雪是黑色的。
- (11) 3 是奇数当且仅当雪是黑色的。

解 因(1)是疑问句,(2)是祈使句,(3)是感叹句,因而这 3 个句子都不是命题。虽然(4)是陈述句,但(4)无确定的真值,根据 a, b 的不同取值情况它可真可假,即无唯一的真值,因而不是命题。本例中,(5)~(11)都是命题。其中,(5),(8),(9)为真命题,(7),(10)和

(11)为假命题。虽然今天我们不知道(6)的真值,但它的真值客观存在,而且是唯一的,将来总会知道(6)的真值。

对于悖论,由于其判断结果不唯一确定,所以悖论不是命题。如:

小说《唐·吉珂德》里描写过一个国家。它有一条奇怪的法律:每一个旅游者都要回答一个问题。问题是:你来这里做什么?

如果旅游者回答对了,一切都好办。如果回答错了,他就要被绞死。

一天,有个旅游者回答——

我来这里是要被绞死。

如果他们不把这人绞死,他就说错了,就得受绞刑。可是,如果他们绞死他,他就说对了,就不应该绞死他。

2. 命题的分类

根据命题能否被拆分为更简单的句子,可将命题分为简单命题和复合命题。

定义 1.2 不能被拆分为更简单陈述句的命题称为简单命题,亦称为原子命题。如例 1.1 中的(5)和(6)。

定义 1.3 由简单命题和联结词按照一定的逻辑关系构成的陈述句称为复合命题。如例 1.1 中的(7)~(11)。

为了进行命题的符号化和演算,本书中用小写字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 表示简单命题,其真值用“1”或“T”表示真,用“0”或“F”表示假。

如例 1.1 中(5)~(11)中的简单命题符号化表示如下。

p : 3 是奇数。

q : 金星上有冰。

r : 3 的平方与 4 的平方和等于 5 的平方。

s : 3 是素数。

t : 雪是黑色的。

于是,例 1.1 中(7)~(11)可以分别符号化为“非 r ”,“ p 且 s ”,“ p 或 s ”,“若 p ,则 t ”,“ p 当且仅当 t ”。

例 1.1 中(7)~(11)符号化形式,由于逻辑联结词没有符号化,所以只能称为半形式化语言,如果将各种要素都符号化,则称完全由符号所构成的语言为形式语言。

1.1.2 逻辑联结词

在不失一般性的情况下,以下不妨假设 p 和 q 均为简单命题。

定义 1.4 复合命题“非 p ”称为 p 的否定式,记作 $\neg p$, $\neg$ 称为否定联结词。并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假,如表 1.1 所示。

表 1.1 否定联结词的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

所以,例 1.1 中的(7)可符号化为 $\neg r$,由于 r 的真值为 1,则命题(7)的真值为 0。

定义 1.5 复合命题“ p 且 q ”称为 p 与 q 的合取式,记作 $p \wedge q$, $\wedge$ 称为合取联结词,并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真,如表 1.2 所示。

所以,例 1.1 中的(8)可符号化为 $p \wedge s$,由于 p 和 s 的真值均为 1,所以命题(8)的真值为 1。

定义 1.6 复合命题“ p 或 q ”称为 p 与 q 的析取式,记作 $p \vee q$, $\vee$ 称为析取联结词。并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假,如表 1.2 所示。

所以,例 1.1 中的(9)可符号化为 $p \vee s$,由于 p 和 s 的真值均为 1,所以命题(9)的真值为 1。

表 1.2 逻辑联结词真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

注意: 自然语言中的“或”有“相容性的或”和“排斥性的或”两种。

例 1.1 中的(9)中的“或”是属于相容性的。而复合命题“王刚是计算机 1 班或 2 班。”中的“或”是属于排斥性的,为了显示逻辑语言的严谨性和明确性,类似属于排斥性“或”的命题应符号化为:

$$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$$

其中 p_1 表示王刚是计算机 1 班, p_2 表示王刚是计算机 2 班。

定义 1.7 复合命题“若 p , 则 q ”称为 p 与 q 的条件式,记作 $p \rightarrow q$, $\rightarrow$ 称为条件联结词。 $p \rightarrow q$ 的逻辑关系为 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件。称 p 是条件式的前件, q 为条件式的后件,并规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假,如表 1.2 所示。

所以,例 1.1 中的(10)可符号化为 $p \rightarrow t$,由于前件 p 和后件 t 的真值分别为 1 和 0,所以命题(10)的真值为 0。

注意: 作为一种规定,当 p 的真值为假时,无论 q 的真值是真是假, $p \rightarrow q$ 的真值均为真,只有 p 为真 q 为假时, $p \rightarrow q$ 为假。如复合命题“若雪是黑色的,则 3 不是奇数。”可以符号化为 $t \rightarrow \neg p$,虽然后件 $\neg p$ 的真值为 0,但由于前件 t 的真值为 0,所以为复合命题 $t \rightarrow \neg p$ 的真值为 1。

定义 1.8 复合命题“ p 当且仅当 q ”称为 p 与 q 的双条件式,记作 $p \leftrightarrow q$, $\leftrightarrow$ 称为双条件联结词。 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系是 p 与 q 互为充分必要条件,规定 $p \leftrightarrow q$ 的真值为真当且仅当 p , q 真值都为真,或者都是假的,如表 1.2 所示。

所以,例 1.1 中的(11)可符号化为 $p \leftrightarrow t$,由于前件 p 和后件 t 的真值分别为 1 和 0,所以命题(11)的真值为 0。

例 1.2 将下列命题符号化。

(1) 王刚不参加 100 米跑比赛。

(2) 王刚与赵明都参加 100 米比赛。

- (3) 王刚与赵明是队友。
 (4) 王刚参加 100 米跑比赛或跳远比赛。
 (5) 王刚是计算机专业的学生或物联网专业的学生。
 (6) 若 $1+1 \neq 2$, 则乌龟比兔子跑得快。
 (7) 只有乌龟比兔子跑得快, 才有 $1+1 \neq 2$ 。
 (8) 太阳绕着地球转当且仅当 $1+1 \neq 2$ 。

分析: 对于每个命题, 首先要明确原子命题及对每个原子命题进行符号化, 然后再明确逻辑联结词并符号化。

解

- (1) p : 王刚参加 100 米跑比赛, 命题符号化为 $\neg p$ 。
 (2) p : 王刚参加 100 米跑比赛, q : 赵明参加 100 米比赛, 命题符号化为 $p \wedge q$ 。
 (3) p : 王刚与赵明是队友, 命题符号化为 p 。
 (4) p : 王刚参加 100 米跑比赛。 q : 王刚参加跳远比赛, 命题符号化为 $p \vee q$ 。
 (5) p : 王刚是计算机专业的学生, q : 王刚是物联网专业的学生, 命题符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 。
 (6) p : $1+1=2$, q : 乌龟比兔子跑得快, 命题符号化为 $\neg p \rightarrow q$ 。
 (7) p : $1+1=2$, q : 乌龟比兔子跑得快, 命题符号化为 $\neg p \rightarrow q$ 。
 (8) p : 太阳绕着地球转, q : $1+1=2$, 命题符号化为 $p \leftrightarrow \neg q$ 。

与代数运算中四则运算相似, 一般规定逻辑联结词的优先顺序依次为 $()$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 。同一优先级别, 先出现者先运算。多次使用联结词, 可以组成更为复杂的复合命题。

例 1.3 令

p : 中国位于亚洲。

q : 熊猫是国家一级保护动物。

r : $2 > 3$ 。

求下列复合命题的真值:

- (1) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$;
 (2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$;
 (3) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$ 。

解 真值分别为 1, 1, 0。

1.2 命题公式及类型

1.2.1 命题公式及赋值

从本节开始对命题进一步抽象, 引入命题常项和命题变项的概念。

1. 命题变项

已知简单命题公式是真值唯一确定的命题逻辑中最基本的研究单位, 可用符号表示。

定义 1.9 真值唯一的简单命题称为命题常项(命题常元), 可用符号表示。

如: p : 2 是偶数。

定义 1.10 可表示任意的命题, 真值未定的符号称为命题变元。如: p, q, r 。

当 p : $2+1=3$, 其真值为 1。当 p : $2+2=3$, 其真值为 0。

可见, 尚未表示特定命题的命题变项, 其真值未定, 已不是命题。 p, q, r 既可以表示命题常项, 又可以表示命题变项, 由上下文来确定。

2. 命题公式(合式公式)

定义 1.11 将命题变项用逻辑联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为命题公式, 简称为公式。命题公式可用大写字母 $A, B, C, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots$ 表示。

若公式 B 为公式 A 的一部分, 则称 B 为 A 的子公式。

如: $(p \vee q) \wedge r, (p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ 均为命题公式, 其中 p, q, r 和 $p \vee q$ 均可以看作公式 $(p \vee q) \wedge r$ 的子公式。

将命题公式用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的表达式仍是命题公式。命题公式也可以采用递归形式定义如下:

- (1) 原子合式公式(单个命题变项);
- (2) 若 A 是合式, 则 $(\neg A)$ 也是;
- (3) 若 A, B 是合式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是。

只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是公式。

如 $A \rightarrow (B \vee A)$ 和 $(B \wedge C \vee A) \rightarrow B$ 都是命题公式, 而 BA 和 $B \wedge \vee A$ 不是命题公式。

3. 合式公式的层次

定义 1.12

- (1) 若公式 A 是单个命题变项, 则称 A 为 0 层公式;
- (2) 对下面的情况, 称 A 是 $n+1 (n \geq 0)$ 层公式:
 - ① $A = \neg A_1$, A_1 是 n 层公式;
 - ② $A = A_1 \wedge A_2$, 其中 A_1, A_2 分别为 n_1 层和 n_2 层公式, 且 $n = \max(n_1, n_2)$;
 - ③ $A = A_1 \vee A_2$, 其中 A_1, A_2 的层次及 n 同②;
 - ④ $A = A_1 \rightarrow A_2$, 其中 A_1, A_2 的层次及 n 同②;
 - ⑤ $A = A_1 \leftrightarrow A_2$, 其中 A_1, A_2 的层次及 n 同②。

例 1.4 求 $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ 的层。

解 因为 p 为 0 层; $\neg p$ 为 1 层; $\neg p \wedge q$ 为 2 层; 所以 $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ 为 3 层。

一般公式的层也可以采用 2 叉树分解的方法来分析, 树的高度记为公式的层, 如图 1.1 所示, 树高为 3, 所以也可以得到 $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ 的层为 3。

在命题公式中, 由于有命题变项的出现, 因此真值是不确定的。当将公式中出现的全部命题变项都解释成具体的命题之后, 公式就成了真值确定的命题了。

如在公式 $(p \vee q) \rightarrow r$ 中, 给出解释:

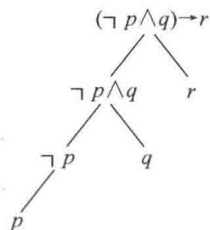


图 1.1 $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ 2 叉树分解