数学分析中的问题与方法

李傅山　编著

科学出版社

数学分析中的问题与方法

李傅山　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是在作者十余年讲授数学分析、考研辅导、数学竞赛材料的基础上多次修订而成的. 所选题目大部分是重点高校硕士研究生入学考试题目和重点高校教材中的经典题目, 部分题目是全国大学生数学竞赛试题. 本书采用分类讲解的方式, 在讲解题目时一般采用分析—解答—备注的方式, 使读者举一反三, 触类旁通, 有些题目给出多种解答方法以拓宽读者的思维. 本书内容包括极限论、函数的连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数论、多元函数微分学、含参变量积分、多元函数积分学.

本书可供高等学校数学类各专业的学生学习数学分析课程及报考研究生复习使用, 也可供从事数学分析教学的年轻教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析中的问题与方法/李傅山编著. —北京: 科学出版社, 2016.7
ISBN 978-7-03-049366-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①数学分析-研究 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 159996 号

责任编辑: 王　静 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 白　洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 7 月第　一　版　开本: 787 × 1092　1/16
2016 年 7 月第一次印刷　印张: 31　3/4
字数: 753 000

定价: 69.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

《数学分析》是数学专业最基础课程, 它是学习后续课程的基础, 也是数学专业研究生入学考试的必考科目. 数学分析的内容丰富, 学生对内容的系统把握感觉困难. 为了读者复习数学分析的需要, 编著本书.

在编著本书时, 突出了以下四点:

第一, 把数学分析内容分成几块讲述, 对每部分的内容、思想和方法进行了系统梳理、归纳和总结, 在总结时注重各部分之间的联系, 对比较难掌握和容易出错的地方加上一些必要的备注和说明, 有些地方加入些形象直观的语言, 使读者轻松的理解和掌握.

第二, 在编著过程中特别注重前后的对比, 并分析出现差别的原因. 同时, 注重和后续课程的结合, 有助于读者系统深入的理解和掌握.

第三, 针对读者对多元微积分掌握相对薄弱的特点, 突出多元微积分的内容. 对重要的定理、公式进行了对比分析, 并以丰富的例题进行了阐释.

第四, 所选题目大部分是历届重点高校硕士研究生入学考试题目和重点高校教材中的经典题目, 部分题目是全国大学生数学竞赛试题. 采用分类讲解的方式, 在讲解题目时一般采用分析—解答—备注的方式, 以使读者举一反三, 触类旁通, 有些题目给出多种解答方法以拓宽读者的思维, 并在每类题目后面留有一定的练习.

建议读者在阅读本书时对内容概要很好地理解, 对里面的否定命题给出反例 (比较难的已经给出), 对里面的题目要先审题思考, 然后看分析过程, 对解答最好采用自己的语言写出, 再参阅备注归纳总结, 达到学习—消化—转化—创新的目的.

本书是在作者十余年讲授数学分析、考研辅导、数学竞赛材料的基础上多次修订而成的, 本书的编写参阅了多种教材和辅导资料, 并曾得到王培合、白玉真两位教授的热情帮助, 十余届考研同学提供了部分重点高校的试题, 对他们深表感谢.

由于作者的水平和视野所限, 书中的不足之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

请将您的意见及建议发至: fsli@qfnu.edu.cn.

李傅山

2015 年 4 月

目　　录

第 1 章　极　限　论

内 容 精 析

极限是数学分析的基础, 贯穿于数学分析的始终. 连续、导数、微分、定积分、广义积分、级数、多元函数的微分和积分等都是用极限的观点定义并加以讨论的, 极限论以后的内容也不断丰富求证极限的方法. 可以说极限论是初等数学和高等数学的分界岭.

本章考察的重点是: 证明极限的存在和求极限. 解决问题的方法灵活, 注意和导数、积分、级数等知识点的结合, 要善于将所讨论问题适当变形、善于应用递推关系、善于将离散的问题连续化 (即归结原理). 具体处理问题的方法和技巧通过下面的题目体现.

一、 数列极限

1. 数列收敛的定义

1^0 ε-N 定义. 设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为定数. 若 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon, \tag{1}$$

称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

注　(1) 定义中 (1) 式可以改为 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$, 或 $|a_n-a|<M\varepsilon$, 或 $|a_n-a|\leqslant M\varepsilon$(M 为定数) 等.

(2) 定义中 N 依赖于 ε 但不唯一. 定义中的 $n>N$ 能否改为 $n\geqslant N$?

(3) 定义的几何意义: 所有下标大于 N 的项 a_n 都落在邻域 $U(a;\varepsilon)$ 内, 即对任何邻域 $U(a;\varepsilon)$ 数列中至多有有限项在该邻域之外.

用定义证明极限与 Cauchy 准则比较有哪些优点和不足?

2^0 描述性定义. $\forall\varepsilon>0$, 在 $U(a;\varepsilon)$ 之外至多有数列 $\{a_n\}$ 中的有限项, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

定义的否定叙述:

$1'^0$ 设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为定数. 若 $\exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n_0>N$ 时, 使得

$$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a.

如果对 $\forall a\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n_0>N$ 时, 使得

$$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

$2'^0$ $\exists\varepsilon_0>0$, 在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外有数列 $\{a_n\}$ 中的无限项, 则称数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a.

若对 $\forall a\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon_0>0$, 在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外有数列 $\{a_n\}$ 中的无限项, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

2. 数列极限的性质

1^0 唯一性;

2^0 有界性;

3^0 保号性;

4^0 保不等式性;

5^0 迫敛性 (两边夹);

6^0 四则运算;

7^0 数列与子列的关系.

注 (1) 保号性中要求极限 $a > 0(a < 0)$, 若改成 $a \geqslant 0(a \leqslant 0)$ 结论是否成立?

(2) 保不等式性中 $a_n \leqslant b_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 请问 $a_n < b_n$ 能否推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

(3) 四则运算说明: 两个极限存在的数列, 四则运算后的数列极限存在 (作商时要求分母及其极限不为零), 但是两个极限不存在的数列, 四则运算后极限可能存在. 四则运算只适用于有限项的情形!

(4) 数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $\{x_{n_k}\}$ 均收敛.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a \Longleftrightarrow \{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$ 均收敛于 a.

要证明数列收敛只要证明 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$ 均收敛于同一个极限即可; 如果存在一个子列不收敛或者存在两个子列收敛于不同的极限, 则原数列发散.

(5) 若数列 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{x_n\}$ 不收敛. 若数列 $\{x_n\}$ 无上界, 则存在子列以 $+\infty$ 为极限; 若数列 $\{x_n\}$ 无下界, 则存在子列以 $-\infty$ 为极限. 无特殊说明情况下, 称数列收敛, 指的是收敛于有限数.

3. 数列极限存在的条件

1^0 单调有界定理: 实数系中, 单调有界数列一定收敛.

注 定理的逆命题不成立. 收敛数列一定有界, 但不一定单调; 但任何数列一定存在单调子列.

2^0 若数列 $\{x_n\}$ 单调而且存在收敛子列, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

注 定理的逆命题不成立. 有收敛子列的数列不一定有界.

3^0 Cauchy 收敛准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Cauchy 收敛准则的等价描述: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注 Cauchy 收敛准则既可以用来证明数列收敛, 也可以用来证明数列的发散.

4^0 Heine 定理: 设 f 在 $U^o(x_0)$ 内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对任何含于 $U^o(x_0)$ 中且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在 (且相等).

注　为了求数列极限可先对相应函数求极限, 然后利用 Heine 定理求出数列极限; 类似地, 给出 $\lim\limits_{x\to\infty,\pm\infty,x_0^\pm} f(x)$ 的归结原理.

练习　写出数列发散的充要条件.

4. 常用求证数列极限的方法

1^0 定义. 用定义求证极限, 一般要先预见极限值, 然后用定义证明.

2^0 四则运算. 一般用于数列通项可以分解成有限个简单项的四则运算.

3^0 迫敛性 (两边夹、夹逼) 定理. 一般使用于通项较复杂, 用两个极限相同的简单数列将该数列通项夹在中间.

4^0 数列与子列的关系. 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\{a_n\}$ 的任何非平凡子列收敛. 单调数列, 若有一子列收敛, 则数列收敛.

注　为了证明或求数列极限, 只要证明或求奇数列和偶数列的极限存在且相等即可.

5^0 单调有界定理. 单调递增且有上界的数列的极限值是数列的上确界; 单调递减且有下界的数列的极限值是数列的下确界.

注　"单调"与"有界"两个条件中缺少一个, 数列就不一定收敛."单调"与"有界"是两个平行条件, 根据具体问题可以先证单调也可以先证有界.

思考　证明数列单调性的方法主要有哪些? 收敛数列 $\{x_n\}$ 是否一定有上、下确界? 上、下确界是否至少有一个属于 $\{x_n\}$?

6^0 Cauchy 收敛准则.

Cauchy 收敛准则和极限定义比较有哪些优缺点? 若对 $\forall p\in\mathbb{N}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$, 能否说明 $\{a_n\}$ 收敛?

7^0 Heine 定理 (归结原理). 对数列而言无法用 L'Hospital 法则等微分学工具求极限, 而函数极限可以应用微分学工具方便求极限. Heine 定理可以看成数列极限和函数极限的关系的"桥梁"定理.

若找到数列 $\{x_n\}: x_n\neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在; 或者找到 $\{x_n'\},\{x_n''\}$ 均以 x_0 为极限, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

8^0 常用的几个数列极限. 将已知数列凑成已知极限的数列的形式.

9^0 初等变形. 有时数列通项比较复杂, 可以先通过初等变形 (如: 分子、分母同乘、除一个因子或者有理化等) 将通项变成容易求极限的形式.

10^0 递推法. 递推有简单递推、复杂递推、耦合型递推等, 经常把递推数列和压缩数列、单调有界等结合使用.

11^0 平均收敛定理.

(算术平均收敛) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(几何平均收敛) 设 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

注　除了这两个常用的平均, 还有调和平均、积分平均等.

12^0 Stolz 公式.

设 $\{y_n\}$ 是单调递增的正无穷大量, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$($a$ 可以是有限数和 $+\infty$,$-\infty$),

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a.$$

证 (1) 若 $a=0$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=0$ 知 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时有

$$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon|y_n-y_{n-1}| \quad 且 \quad y_{N_1}>0,$$

于是

$$\begin{aligned}|x_n-x_{N_1}|&\leqslant|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{N_1+1}-x_{N_1}|\\&<\varepsilon(y_n-y_{n-1})+\varepsilon(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+\varepsilon(y_{N_1+1}-y_{N_1})\\&=\varepsilon(y_n-y_{N_1}),\end{aligned}$$

即

$$\frac{|x_n-x_{N_1}|}{y_n-y_{N_1}}<\varepsilon,$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}}{y_n}=0\Longrightarrow\exists N>N_1,\forall n>N:\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|<\varepsilon,$$

故此时

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|=\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\cdot\frac{y_n-y_{N_1}}{y_n}+\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|\leqslant\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\cdot\frac{y_n-y_{N_1}}{y_n}\right|+\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|<2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0.$$

(2) 若 $a\neq0$. 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$, 只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}-a=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-ay_n}{y_n}=0$. 记 $z_n=x_n-ay_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a=0,$$

由情形 (1) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}-a=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a.$$

(3) 若 $a=+\infty$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$ 知 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时有

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0 \quad 且 \quad x_n-x_N>y_n-y_N,$$

即当 $n>N$ 时, $\{x_n\}$ 为单调递增的正无穷大量. 对 $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ 应用 (1) 的证明方法可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty.$$

(4) 若 $a=-\infty$. 记 $z_n=-x_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty,$$

由 (3) 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{y_n}=-\infty.$$

注　在 Stolz 定理中,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty \not\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty.$$

如: $x_n=(-1)^n n, y_n=n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}不存在 \not\Longleftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}不存在.$$

如: $x_n=(-1)^n, y_n=n$.

Stolz 公式可以看成推广的“离散型 L'Hospital”.

13^0 利用上、下极限.

关于上、下极限, 有下面两种常用的定义方法.

定义 1　(1) 设 $\{a_n\}$ 是一数列.

(i) 如果 $\{a_n\}$ 有上界, 则去掉前 n 项后剩下的数列 $\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$ 仍有上界, 由确界原理定有上确界 β_n, 即 $\beta_n=\sup\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$, 显然 $\{\beta_n\}$ 单调递减.

(a) 当 $\{\beta_n\}$ 有下界时, 则 $\{\beta_n\}$ 收敛, 称 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$ 为 $\{a_n\}$ 的上极限, 记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

(b) 当 $\{\beta_n\}$ 无下界时, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=-\infty$, 此时规定 $\{a_n\}$ 的上极限为 $-\infty$.

(ii) 如果 $\{a_n\}$ 无上界, 规定 $\{a_n\}$ 的上极限为 $+\infty$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 是一数列.

(i) 如果 $\{a_n\}$ 有下界, 则去掉前 n 项后剩下的数列 $\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$ 仍有下界, 由确界原理定有下确界 α_n, 即 $\alpha_n=\inf\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$, 显然 $\{\alpha_n\}$ 单调递增.

(a) 当 $\{\alpha_n\}$ 有上界时, 则 $\{\alpha_n\}$ 收敛, 称 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 为 $\{a_n\}$ 的下极限, 记 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$.

(b) 当 $\{\alpha_n\}$ 无上界时, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$, 此时规定 $\{a_n\}$ 的下极限为 $+\infty$.

(ii) 如果 $\{a_n\}$ 无下界, 规定 $\{a_n\}$ 的下极限为 $-\infty$.

定义 2　设 $\{a_n\}$ 是有界数列. 记 $E=\{\xi|\xi\,为\{a_n\}的聚点\}$, 称 $\beta=\max E,\alpha=\min E$ 分别为数列 $\{a_n\}$ 的上、下极限.

若 $\{a_n\}$ 无上界, 规定 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 若 $\{a_n\}$ 无下界, 规定 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

关于上、下极限的几个重要定理.

定理 1　任意数列 $\{a_n\}$: $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n,\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$ 均存在 (可为 $+\infty,-\infty$), 且

$$\lim_{n\to\infty}a_n\ 存在 \Longleftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty}a_n=\varliminf_{n\to\infty}a_n.$$

我们将知道, 函数在一点极限存在的充要条件是左右极限存在且相等; 函数连续的充要条件是左右连续; 函数可导的充要条件是左右导数存在且相等; 函数可积的充要条件 Darboux 大和、小和的极限相等. 这些结果形式非常类似.

定理 2　(1) 设 $\beta=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$ 是有限实数, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n<\beta+\varepsilon$.

(2) 设 $\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$ 是有限实数, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>\alpha-\varepsilon$.

上下极限的几条常用结论.

定理 3　设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是两个有界数列, 则

(i) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$.

(ii) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n,\quad \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

定理 4　设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是两个有界数列,

(i) 若 $x_n,y_n\geqslant 0$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n,\quad \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\geqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(ii) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n,\quad \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

注　$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=-\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)$.

14^0 Taylor 公式.

15^0 定积分. 利用定积分的定义, 有时将极限写成积分和的形式, 从而达到方便求出极限的目的. 有的数列是用积分的形式表示的, 可结合积分的性质求极限, 如: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

16^0 级数方法. 在数学分析中, 学习数列主要是为学习级数作准备, 利用级数收敛的必要条件 (级数收敛通项一定趋于零) 与 Cauchy 准则, 可以方便地求证极限. 同时, 有时数列的通项恰好是级数的前 n 项和, 利用级数的敛散性判别法达到求证极限的目的. 如: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

17^0 压缩原理. 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_n - x_{n-1}| \leqslant r|x_{n-1} - x_{n-2}|, n = 3, 4, \cdots (0 < r < 1)$, 则称它为压缩数列. 任意压缩数列一定收敛.

18^0 Fourier 级数. 对某个函数 Fourier 展开, 然后代入某点的值就是我们所求的数列. 如: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6}$ 等.

注 这个结论告诉我们无限多个有理数的和不一定是有理数, 可见从有限到无限将产生质的飞跃.

二、 函数极限

1. 函数极限的定义

1^0 ε-δ 定义. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义, A 为定数. 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限.

注 (1) 不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 等价于 $x \in U^o(x_0, \delta)$, 而不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 等价于 $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

(2) 定义中的 δ 依赖于 ε, 但不唯一.

(3) $|f(x) - A| < \varepsilon$ 可改为 $|f(x) - A| \leqslant \varepsilon$ 或 $|f(x) - A| \leqslant M\varepsilon$ (M 为定数).

类似地可以定义函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左右极限, 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A. \tag{1}$$

应用 (1) 式可方便地求分段函数在分段点的极限.

定义的否定叙述: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义, A 为定数. 若 $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x_1 : 0 < |x_1 - x_0| < \delta$ 使得

$$|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时不以 A 为极限.

2^0 $x \to +\infty$ 的极限定义. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, A 为定数. $\forall\varepsilon > 0, \exists M \geqslant a$, 当 $x > M$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时以 A 为极限.

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 和 $x \to \infty$ 时的极限, 且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

3^0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的定义. $\forall G > 0, \exists\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > G$.

类似地可以给出 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ 等的定义.

函数极限的形式 $\lim\limits_{x\to[6\text{种情形}]} = [4\text{种情形}]$, 共 24 个概念, 加上否定叙述共 48 个.

2. 函数极限的性质

1^0 唯一性. 对两个常数 a, b, 若对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $|a-b|<\varepsilon$, 则 $a=b$. 不能乱用这个结果, 在数列 $\{a_n\}$ 极限中 $|a_n-a|<\varepsilon$ 得不到 $a_n=a$.

2^0 局部有界性. 这和收敛数列一定有界有区别. 因为函数在 x_0 点的极限只是研究该点去心邻域内函数值的变化特征.

3^0 局部保不等式性 (保号). 这一性质和数列是极为类似. 但要注意 $f(x)<g(x), x\in U^o(x_0,\delta)$ 推不出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4^0 迫敛性 (两边夹). 这一性质可帮助我们求函数极限. 常用的一个简单不等式 $x-1<[x]\leqslant x$.

5^0 四则运算. 四则运算是在函数极限都存在的前提下才成立! 同时, 这一性质只适用于有限个函数的情形.

3. 函数极限存在的条件

1^0 单调有界定理. 设 f 为定义在 $U_+^o(x_0)$ 内的单调有界函数, 则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在.

类似地, 可以得到 $U_-^o(x_0)$, $(x_0,+\infty)$, $(-\infty,x_0)$ 上的单调有界定理.

问题　若 f 为定义在 $U(x_0)$ 内的单调有界函数, 能否得到 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在?

2^0 设 f 为 $U_-^o(x_0)$ 上的递增函数. 证明: 若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^o(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, 则有 $f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^o(x_0)} f(x)=A$.

问题　类似地给出 f 在 $U_-^o(x_0)$ 上递减; f 在 $U_+^o(x_0)$ 上单调性的有关结果.

3^0 Cauchy 准则. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 (有限) $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对 $\forall x_1,x_2\in D_f$, 当 $0<|x_1-x_0|<\delta, 0<|x_2-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 (有限) $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0$, 对 $\forall x_1,x_2>M$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

类似地可以给出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 (有限), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在 (有限), $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)$ 存在 (有限) 的 Cauchy 准则. 但要注意, 此定理中极限“有限”不可少, 请举例说明.

4^0 Heine 定理 (归结原理). 设 f 在 $U^o(x_0)$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对任何含于 $U^o(x_0)$ 中且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在 (且相等).

注　类似地, 给出 $\lim\limits_{x\to\infty,\pm\infty,x_0^\pm} f(x)$ 的归结原理.

练习　写出函数发散的充要条件.

4. 求函数极限的常用方法

1^0 函数极限定义. 既可以证明极限存在也可以证明极限不存在. 但用定义必须预见函数的极限, 然后再用定义证明, 这是定义法的不足之处.

2^0 四则运算 (只适用于任意有限项).

3^0 两边夹定理. 找出两个极限相同的简单函数把要求极限的函数夹在中间.

4^0 单调有界原理.

5^0 Cauchy 收敛准则.

注　此定理的必要性证明可由极限定义得出, 充分性证明可由数列的 Cauchy 收敛准则及 Heine 定理得出. Cauchy 收敛准则不用预见函数的极限, 只要从函数本身入手即可证明极限是否存在. 但是这种方法不一定能方便地求出极限, 这是 Cauchy 收敛准则的不足之处.

6^0 Heine 定理.

7^0 证明左右极限存在且相等. 在求单侧极限时常用单调有界函数极限一定存在, 其极限就是它的确界.

8^0 常用的几个重要极限. 把所求极限凑成熟知的函数的极限的形式. 如: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 等, 其实这些极限用 L'Hospital 法则可立即得到.

9^0 无穷小量等价代换. 注意等价代换只使用于积、商. 为防止等价代换出错, 直接用 Taylor 公式展开. 如: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

注　无穷小量等价代换的理论根据就是 Taylor 公式, 在处理某些极限问题时可以考虑用 Taylor 展开.

10^0 L'Hospital 法则. L'Hospital 主要有两种形式: $\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型, 其实这两种形式是可以互化. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型可以扩展为 $\dfrac{*}{\infty}$ 型. 常应用取对数等方法将函数化成上述形式.

11^0 Taylor 展开. Taylor 展开是用初等函数表示函数的一种有效方法, 在求极限时将复杂的函数展成初等函数, 为求极限带来很多方便.

12^0 变限积分、函数项级数和含参变量积分. 变限积分、函数项级数和含参变量积分是表示函数的重要方法, 利用它们的性质可帮助我们求极限.

13^0 函数上、下极限法.

函数子极限: 设 x_0 为集合 E 的一个聚点, 函数 $f(x)$ 在集合 E 上有定义. 数 a 称为 $f(x)$ 在 x_0 点处的子极限 (或部分极限), 当且仅当存在 $\{x_n\}\subset E(x_n\neq x_0, n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$.

上、下极限: 设函数 $f(x)$ 在集合 E 上有定义, x_0 是 E 的一个聚点, 当且仅当 β 为 $f(x)$ 在 x_0 处所有子极限的最大者, β 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的上极限, 记 $\beta=\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$.

当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 附近无上界, 规定 $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.

类似地, 子极限的最小者 α 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的下极限, 记 $\alpha=\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$. 当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 附近无下界, 规定 $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

由此可以得到函数极限存在的一个充要条件: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)=\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$.

三、 实数系的基本理论

1. 确界的概念

设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的数集.

1^0 若 β 满足: $\begin{cases}\forall x\in S, & 有 x\leqslant\beta,\\ \forall\varepsilon>0, & 存在 x_0\in S 使得 x_0>\beta-\varepsilon.\end{cases}$ 则称 β 是数集 S 的上确界, 记

$\beta = \sup S$.

2^0 若 α 满足: $\begin{cases} \forall x \in S, & \text{有} x \geqslant \alpha, \\ \forall \varepsilon > 0, & \text{存在} x_0 \in S \text{使得} x_0 < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$ 则称 α 是数集 S 的下确界, 记 $\alpha = \inf S$.

上确界就是上界中的最小者, 下确界就是下界中的最大者. 确界不一定属于 S, 若 S 有最值, 最值一定属于 S, 这时最大 (小) 值就是上 (下) 确界.

2. 实数系几个基本定理

1^0 确界原理. 设 S 是非空数集. 若 S 有上界, 则 S 一定有上确界; 若 S 有下界, 则 S 一定有下确界.

2^0 单调有界数列收敛定理. 单调递增 (递减) 且有上界 (下界) 数列必收敛.

3^0 闭区间套定理.

注 必须是闭区间才能套出唯一点, 开区间不一定成立.

4^0 Weierstrass 聚点原理. 实数轴上的有界无限点集 S 至少有一聚点.

此定理是很直观的, 向一个有界的小盒子里面不断投粒子, 至少会有一个地方堆积如山, 这个地方就对应一个聚点. 注意: 聚点不一定属于点集 S.

$4'^0$ 致密性定理. 有界的数列一定有收敛的子列.

5^0 Heine-Borel 有限覆盖定理. 开区间集覆盖闭区间, 一定能选出有限个开区间将闭区间覆盖.

从有限到无限是质的飞跃, 例如, 无限个有理数的和可能是无理数等. 此定理帮助实现从无限覆盖到有限覆盖的转变.

6^0 Cauchy 收敛准则.

实数系几个基本定理与闭区间连续函数性质定理总结如下.

I.

$$\text{连续函数根的存在定理} \Longleftarrow \text{确界原理} \Longrightarrow \text{单调有界定理} \Longrightarrow \text{区间套定理}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{(1)聚点原理} \Longrightarrow \text{Cauchy 收敛准则}, \\ \text{(2)有限覆盖定理}, \\ \text{(3)连续函数根的存在定理}. \end{cases}$$

II.

$$\text{单调有界定理} \Longrightarrow \text{致密性定理} \Longrightarrow \begin{cases} \text{(1)连续函数有界性定理}, \\ \text{(2)一致连续性定理}, \\ \text{(3)Cauchy 收敛准则}. \end{cases}$$

III.

$$\text{区间套定理} \Longrightarrow \text{确界原理} \Longleftarrow \text{Cauchy 收敛准则}.$$

IV.

$$\text{有限覆盖定理} \Longrightarrow \begin{cases} (1)\text{聚点原理}, \\ (2)\text{连续函数有界性定理}, \\ (3)\text{连续函数根的存在定理}, \\ (4)\text{一致连续性定理}. \end{cases}$$

V.

$$\text{确界原理} \Longrightarrow \text{单调有界定理} \Longrightarrow \text{区间套定理} \Longrightarrow \text{有限覆盖定理}$$
$$\Longrightarrow \text{聚点原理} \Longrightarrow \text{Cauchy 收敛准则} \Longrightarrow \text{确界原理}.$$

典 型 例 题

一、 数列极限

例 1-1-1 求下列极限.

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}\,(a>0)$.

解 分情况考察 n^2 与 a^n 的大小.

当 $0<a\leqslant 1$ 时,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=1;$$

当 $a>1$ 时,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=a. \quad ■$$

注 当 $a>1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}\,(c>0)$.

解 (解一) (1) 当 $0<c\leqslant 1$, $0<\dfrac{c^n}{n!}<\dfrac{1}{n!}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$;

(2) 当 $c>1$, 记 $[c]=k$, $0<\dfrac{c^n}{n!}=\dfrac{c^k}{1\cdot 2\cdots k}\dfrac{c}{k+1}\cdots\dfrac{c}{n-1}\dfrac{c}{n}<\dfrac{cM}{n}\to 0$, $M=\dfrac{c^k}{k!}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}=0$.

(解二) 由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c^n}{n!}$ 收敛, 再由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n}{n!}=0$.

(解三) 记 $a_n=\dfrac{c^n}{n!}$, 则 $a_n=\dfrac{c}{n}a_{n-1}$, 当 $n>[c]$ 时 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 对 $a_n=\dfrac{c}{n}a_{n-1}$ 两边求极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. ■

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解 (解一) 因为

$$1\leqslant(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$