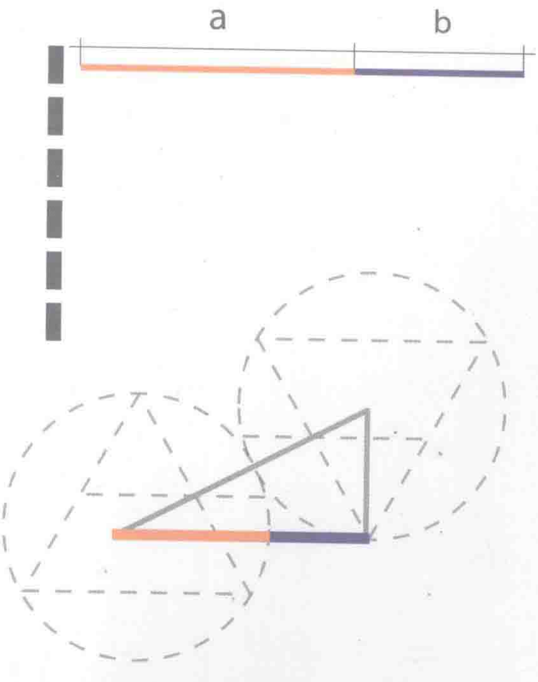
普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

戴立辉　主　编

林大华　吴霖芳　陈　翔　副主编



上海财经大学出版社

SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

戴立辉 主 编

林大华 吴霖芳 陈 翔 副主编

上海财经大学出版社

内容提要

本书按照工科及经济管理类“本科数学基础课程(线性代数部分)教学基本要求”,并结合当前大多数高等院校的学生基础和教学特点编写而成. 全书根据矩阵这条主线,以通俗易懂的语言,全面而系统地讲解线性代数的基本知识,包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换七章内容. 每章分若干节,每节都配有习题,同时每章还配有总习题,书末附有习题和总习题的参考答案.

本书理论系统、举例丰富、讲解透彻、难度适宜,适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的线性代数课程的教材使用,也可供广大考研学子选用作为复习线性代数所用教材,还可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 戴立辉主编. —上海:上海财经大学出版社,2016.8

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5642-2518-6/F.2518

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戴… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 175107 号

□ 责任编辑 袁 敏

□ 封面设计 杨雪婷

XIANXING DAISHU

线性代数

戴立辉 主 编

林大华 吴霖芳 陈 翔 副主编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海华业装璜印刷厂印刷装订

2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷

787 mm×1 092 mm 1/16 13.75 印张 334 千字

印数:0 001—3 000 定价:28.00 元

前　言

“线性代数”是普通高等院校理工类与经管类各专业普遍开设的一门重要的公共基础课程,具有较强的逻辑性和抽象性.线性代数的理论与方法广泛渗透于各个学科之中,线性代数在国民经济与科学技术中的地位和作用越来越重要.为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要,满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点,我们编写了这本线性代数课程的教材.

在编写本书的过程中,我们严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的工科及经济管理类“本科数学基础课程(线性代数部分)教学基本要求”,同时参考了近几年来国内外出版的相关教材.编写中,我们根据多年的教学实践,并广泛听取任课教师提出的宝贵意见,从教学的实际情况出发精心安排各章各节.编写中,我们坚持以“够用”为原则,适当兼顾全国研究生入学考试数学考试大纲的要求(线性代数部分).

本书根据矩阵这条主线,以通俗易懂的语言,深入浅出地讲解线性代数的基本知识,分七章系统讲解行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容.每章分若干节,每节都配有习题,同时每章还配有总习题,书末附有习题和总习题的参考答案.

本书各章具体的主要内容和编写特点如下:

第1章行列式,主要内容为行列式的定义、行列式的性质与计算、行列式展开定理、克拉默法则等.编写时,通过给出传统的行列式“排列逆序”定义,系统证明了行列式的性质,详细讲解行列式的计算方法.简单介绍线性方程组的克拉默法则,给出它的证明,而把相关的其他知识放到第4章.

第2章矩阵,主要内容为矩阵的概念、矩阵的运算、可逆矩阵与逆矩阵、分块矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩等.矩阵是线性代数的重要内容之一,通过系统讲解矩阵的基本知识,突出矩阵的核心作用.

第3章向量,主要内容为向量的概念和运算、向量间的线性关系、向量组的秩、向量空间、向量的内积等.向量是线性代数中的难点内容之一,编写时,以矩阵为工具,强调矩阵初等变换的应用,详细讲解向量的理论知识,简单介绍向量空间.与其他教材不同的是,编写中,我们把向量的内积也作为这一章的主要内容.

第4章线性方程组,主要内容为线性方程组的消元法、线性方程组解的讨论、线性方程

组解的结构等.从消元法出发,系统讲解线性方程组解的理论,进一步讨论向量组的线性相关性.

第5章特征值与特征向量,主要内容为矩阵的特征值与特征向量的概念和性质、相似矩阵、实对称矩阵的对角化等.特征值理论在线性代数中占有重要地位,主要包括矩阵的特征值与特征向量的相关知识以及矩阵的对角化问题等.

第6章二次型,主要内容为二次型的概念及其矩阵表示、化二次型为标准形和规范形、正定二次型等.讲解化二次型为标准形的常用方法,介绍判定实二次型正定的方法,强调合同矩阵、正定矩阵的有关性质.

第7章线性空间与线性变换,主要内容为线性空间定义与性质、维数、基与坐标、基变换与坐标变换、线性变换、线性变换的矩阵表示.将第3章的向量空间进行推广,讲解实数域上的线性空间的基本知识,介绍线性变换的初步知识.

本书由戴立辉担任主编,林大华、吴霖芳、陈翔担任副主编.全书由戴立辉提出编写大纲,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:戴立辉编写第2章、第5章和第6章,林大华编写第3章和第7章,吴霖芳编写第4章,陈翔编写第1章.全书最后由戴立辉统稿并定稿.

在本书的编写过程中,我们参考了书后所列的参考文献,谨此对参考文献的作者表示感谢!本书的出版还得到了闽江学院领导、同事以及上海财经大学出版社的大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平和学识有限,书中不当和疏漏之处在所难免,敬请各位同行和读者不吝赐教,并批评指正.

戴立辉

2016年6月

目 录

第1章 行 列 式

在中学所学代数中，我们讨论过二阶、三阶行列式，并且利用它们来解二元、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要将行列式的概念进行推广. 行列式是一个重要的概念，它在线性代数和后继课程里都有着非常广泛的应用. 作为一个有力的数学工具，行列式在许多实际应用问题中，也发挥着重要作用.

本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法，以及介绍用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§1.1 行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先回顾中学代数中从解线性方程组而引出的二阶与三阶行列式的定义.

1.1.1 二阶与三阶行列式

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

我们以 a_{22} 乘以第一个方程，以 a_{12} 乘以第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似可以求得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了方便记忆 x_1 及 x_2 的表达式，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

式(1.3)称为**二阶行列式**. 其中横写的称作**行**，竖写的称作**列**，二阶行列式含有两行两列.

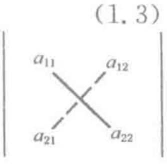


图 1.1

二阶行列式的定义，可用所谓的对角线法则来记忆，参看图 1.1.

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是这样的两项的代数和：一项是在左上角到右下角的对角线(称为**主对角线**)上的两个数 a_{11} 与 a_{22} 的乘积 $a_{11}a_{22}$，取正号；另一项是在右上角到左下角的对角线(称为**副对角线**)上的两个数 a_{12} 与 a_{21} 的乘积 $a_{12}a_{21}$，取负号.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times (-3) = 10.$

根据二阶行列式的定义，式(1.2)中的分子可分别写成

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

这样，方程组(1.1)的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

通过消去 x_2 和 x_3，可得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

为了方便记忆，引进**三阶行列式**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

上述三阶行列式的定义，也可用对角线法则来记忆，参看图 1.2. 图中有三条实线看做是平行于主对角线的联线，三条虚线看做是平行于副对角线的联线，实线上三个元素的乘积冠以正号，虚线上三个元素的乘积冠以负号.

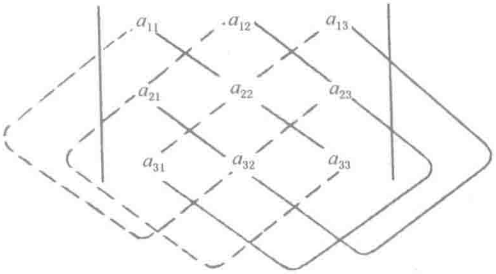


图 1.2

例如，$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times2\times(-2)+(-1)\times1\times4+3\times(-1)\times1$

$$-2\times1\times1-(-1)\times(-1)\times(-2)-3\times2\times4$$
$$=-8-4-3-2+2-24=-39.$$

利用三阶行列式的定义，当 $D\neq0$ 时就得到方程组(1.4)的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

在自然科学与工程技术中，我们会碰到未知数的个数很多的线性方程组，如 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.6}$$

它的解是否也有类似的结论呢？

为此，我们需要解决如下问题：

(1) 怎样定义 n 阶行列式？

(2) 如何计算 n 阶行列式？

(3) 方程组(1.6)在什么情况下有解？有解的情况下，如何表示此解？

作为定义 n 阶行列式的准备，下面先来讨论排列的性质，然后引出 n 阶行列式的概念.

1.1.2　排列及其逆序数

1. 排列与逆序

对于 n 个不同的元素，我们可以给它们规定一个次序，并称该规定的次序为标准次序. 例如 1, 2, …, n 这 n 个自然数，一般规定由小到大的次序为标准次序.

定义 1.1　由 n 个自然数 1, 2, …, n 组成的一个无重复的有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$，称为一个 **n 元排列**.

例如，1234 和 2431 都是 4 元排列，而 45321 是一个 5 元排列.

显然，n 元排列共有 $n!$ 个.

排列 $12\cdots n$ 中元素之间的次序为标准次序，这个排列称为标准排列；其他的排列的元素之间的次序未必是标准次序.

定义 1.2　在 n 个不同元素的任一排列中，当某两个元素的次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 也就是说，在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，如果一个较大的数排在一个

较小的数之前，即若 $j_s > j_t (s < t)$，则称这两个数 j_t，j_s 组成一个逆序．一个排列中所有逆序的总数，称为这个**排列的逆序数**，记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 或 τ．

例如，排列 2431 中，21，43，41，31 是逆序，共有 4 个逆序，故排列 2431 的逆序数 $\tau = 4$．

一般地，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_2$ 前面比 j_2 大的数的个数 $+ j_3$ 前面比 j_3 大的数的个数 $+ \cdots + j_n$ 前面比 j_n 大的数的个数．

定义 1.3 如果排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为奇数，则称该排列为**奇排列**；若排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为偶数，则称该排列为**偶排列**．

例如，2431 是偶排列，45321 是奇排列；标准排列 $12\cdots n$ 的逆序数是 0，因此是偶排列．

2. 对换

为了研究 n 阶行列式的需要，我们先讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系．

定义 1.4 在排列 $j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$ 中，将任意两数 j_s 和 j_t 的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n$．这种作出新排列的手续称为一次**对换**．将相邻两数对换，称为相邻对换．

例如，对换排列 45321 中 5 和 1 的位置后，得到排列 41325．

经过对换，排列的奇偶性有何变化呢？我们有下面的基本事实．

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性．

也就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，而偶排列变成奇排列．

证明 先证明相邻对换的情况．

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$，显然，$a_1 \cdots a_l$；$b_1 \cdots b_m$ 的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 的逆序数改变为：

当 $a < b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a > b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1．

所以，不论是增加 1 还是减少 1，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性改变．

再证明一般对换的情况．

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，对它作 m 次相邻对换，变成排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成排列

$$a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n,$$

总之，经过 $2m+1$（奇数）次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列

$$a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n,$$

所以，这两个排列的奇偶性改变．

推论 任意一个排列与标准排列都可经过一系列对换互换，并且所作对换的次数与这个排列的奇偶性相同．

证明 由定理 1.1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此结论成立． ■

上述推论说明，奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次

数为偶数.

1.1.3 n 阶行列式的定义

我们以三阶行列式的定义为例来分析研究式(1.5)的结构特点,可以归纳为下面三点:

(1) 三阶行列式是表示一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的三个元素构成的乘积;

(2) 这个代数和的总项数是 1, 2, 3 所构成的排列总数 3! =6;

(3) 每一项的符号与元素的列指标排列的逆序数的奇偶性有关(设元素的行指标排列按标准排列,即逆序数为 0),设 τ 表示元素的列指标排列的逆序数,则每一项乘积的符号由 $(-1)^{\tau}$ 而定. 当 τ 为奇数时,取负号;当 τ 为偶数时,取正号.

因此,三阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中, $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三元排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

通过对三阶行列式定义的结构特点的分析,我们可以类似地推广到一般情形,于是有下面 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 称 n^2 个数排成 n 行 n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 ***n* 阶行列式**,它等于所有取自不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 1, 2, …, n 的一个排列,各项按下列规则带有符号:当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时,该项带有正号;当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时,该项带有负号.

n 阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中, $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$, 这里数 a_{ij} 称为行列式的元素, $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

定义 1.5 通常被称为行列式的"排列逆序"定义,它具有三个特点:

(1) 由于 n 元排列的总数是 $n!$ 个,所以展开式共有 $n!$ 项;

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项前的符号取决于 n 个元素列指标所组成排列的奇偶性.

需注意的是，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆.

例 1.1 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，现考虑其中不为零的项.

a_{nj_n} 取自第 n 行，但只有 $a_{nn} \neq 0$，故只能取 $j_n = n$；

$a_{n-1,\, j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1,\, n-1} \neq 0$，$a_{n-1,\, n} \neq 0$，由于 a_{nn} 取自第 n 列，故 $a_{n-1,\, j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列，所以 $j_{n-1} = n-1$；

同理可得，$j_{n-2} = n-2$，$\cdots$，$j_2 = 2$，$j_1 = 1$.

所以不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(1\,2 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

从而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 1.1 中，主对角线以下的元素都为零的行列式称为上三角形行列式，它的值等于主对角线上全部元素的乘积. 类似的，主对角线以上的元素都为零的行列式称为下三角形行列式，主对角线以外的元素都为零的行列式称为对角形行列式，它们的值都是等于各自主对角线上全部元素的乘积. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

定理 1.2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

其中，$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有的 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 求和.

证明　按定义 1.5 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

令 $D_1=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，我们要证明 $D=D_1$.

对 D 中任一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，当列指标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 t 次对换变成标准排列时，相应的行指标排列经过相同的 t 次对换变成排列 $i_1i_2\cdots i_n$.

由定理 1.1 的推论，对换次数 t 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 有相同的奇偶性；同理，t 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性，从而 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性，所以有

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

即 D 中的任一项总有且仅有 D_1 中的某一项与之对应并相等.

同理可证，D_1 中的任一项也总有且仅有 D 中某一项与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，故 $D=D_1$.

习　题　1.1

1. 利用对角线法则计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 求下列各排列的逆序数：

(1) 4 1 5 3 2；　　(2) 3 7 1 2 4 5 6；

(3) 1 3 ⋯ $(2n-1)$ 2 4 ⋯ $(2n)$；　　(4) 1 3 ⋯ $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ ⋯ 2.

3. 求排列 n $(n-1)$ ⋯3 2 1 的逆序数，并讨论该排列的奇偶性.

4. 在四阶行列式中，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 前面应带什么符号？

5. 按行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$，其中未标明的元素都是 0；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

6. 由行列式定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

7. 由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由.

§1.2 行列式的性质与计算

由行列式的定义易知，按定义计算一个 n 阶行列式共需计算 $n!$ 项，每一项需做 $n-1$ 次乘法，所以共需做 $(n-1)\cdot n!$ 次乘法，当 n 相当大时，这是一个很大的数字！为了计算行列式，必须进一步研究行列式的性质，以便利用这些性质将复杂的行列式转化为简单的行列式（如三角形行列式）来计算.

1.2.1 行列式的性质

在以下性质和推论中，我们只对性质 1 和性质 2 给以证明，其余的留给读者完成.

性质 1 行列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 记 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

令 $$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},\quad 即\ b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

按定义 1.5，并根据定理 1.2，有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$
$$=D.$$

■

在性质 1 中，D^{T} 是 D 的各行(列)变成相应的列(行)得到的，称 D^{T} 为 D 的转置行列式. 另外，由性质 1 可知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也成立；反之亦然.

性质 2 交换行列式中两行(列)的位置，行列式的值反号.

证明 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 i, j 两行得到的，即：当 $k\neq i$, j 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$, j 时，$b_{ip}=a_{jp}$, $b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$D_1=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$
$$=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$
$$=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=-\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=-D.$$

其中，$1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的奇偶性相反.

■

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 若行列式中有两行(列)相同，则该行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行(列)乘以一个数，相当于用这个数乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$