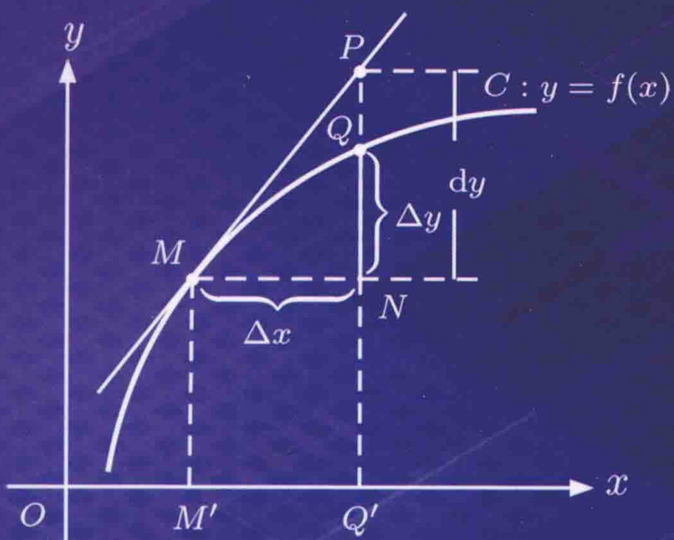
"十二五"江苏省高等学校重点教材　　南京大学·大学数学系列

微积分 I（第二版）

张运清 黄卫华 孔 敏 邓卫兵 廖良文 周国飞 编



科学出版社

"十二五"江苏省高等学校重点教材(编号：2014-1-137)

南京大学·大学数学系列

微积分 I
(第二版)

张运清　黄卫华　孔　敏
邓卫兵　廖良文　周国飞　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本套书由《微积分 I（第二版）》、《微积分 II（第二版）》两本书组成.《微积分 I（第二版）》内容包括极限与函数的连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、向量代数与空间解析几何. 在附录中简介了行列式和矩阵的部分内容.《微积分 II（第二版）》内容包括多元函数微分学、二重积分、三重积分及其应用、曲线积分、曲面积分、场论初步、数项级数、幂级数、傅里叶级数、广义积分的敛散性的判别法、常微分方程初步等. 本套书继承了微积分的传统特色, 内容安排紧凑合理, 例题精练, 习题量适难易恰当.

本套书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材, 也可供相关专业的工程技术人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. I /张运清等编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2016.6
"十二五"江苏省高等学校重点教材. 南京大学·大学数学系列
ISBN 978-7-03-048410-9
I. ① 微… II. ①张… III. ①微积分-高等学校-教材 IV.①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 117210 号

责任编辑: 黄　海　许　蕾 / 责任校对: 郑金红
责任印制: 张　倩 / 封面设计: 许　瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第 一 版　开本: 787×1092 1/16
2016 年 6 月第 二 版　印张: 16 1/2
2016 年 6 月第四次印刷　字数: 380 000
定价: 39.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书第一版在 2013 年 8 月正式出版, 2014 年被江苏省教育厅列入江苏省高等学校重点教材立项建设名单 (修订教材). 自 2013 年以来, 我们在南京大学 2013、2014、2015 级的本科生中使用了该教材, 在教学使用中取得了良好的效果. 在使用过程中, 我们也发现了第一版存在的一些问题和不足之处. 在多次倾听任课老师的建议以及学生的意见后, 根据这些建议和意见, 并根据教学实践中积累的经验, 我们对第一版进行了修订, 从而形成了本书的第二版.

在此次修订中, 我们保持了这套教材原有的编写思想与基本内容框架, 但对一些在教学过程中发现的不能适应课堂教学的部分进行了修改. 我们首先纠正了第一版中的一些排版错误, 更正了习题参考答案中的个别错误答案. 其次, 我们对部分知识点进行了重写 (如第 7 章两类曲线积分之间的关系, 第 10 章微分方程积分因子等), 修改了一些结论的证明 (如第 7 章格林公式的证明、第 8 章正项级数柯西积分判别法的证明等), 修改了一些例题的解法 (如第 6 章二重积分换元积分法部分的例题, 第 7 章格林公式部分的例题, 第 8 章幂级数部分的例题, 以及第 8 章广义积分敛散性判别法部分的例题等), 并对微积分 I 和微积分 II 的几乎所有章节都有针对性地增加了大量难度不同的习题, 删除了第一版中某些难度不合适的习题, 从而使本书更加适应于微积分课程的教学, 也更适合学生自学和自我检测.

此次修订工作由张运清老师具体负责, 邓卫兵、黄卫华、孔敏、廖良文和周国飞老师提供了具体的修订意见, 并进行了审阅. 南京大学数学系主任秦厚荣教授、副主任朱晓胜教授对本书的再版提供了很多具体的支持和帮助, 很多任课教师也对本书的编写和修订提出了许多宝贵的意见和建议, 在此谨向他们致以诚挚的谢意. 编者特别感谢科学出版社黄海、许蕾等编辑和工作人员为本书的出版所付出的辛勤劳动.

由于编者水平有限, 书中错误和不足之处在所难免, 期盼广大读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

第一版前言

为了使大学数学的教学内容更加适应新形势的需要，我们根据南京大学新的招生形式(按大类招生)、国际交流的需要，以及“三三制”教学模式的要求，在数学系和教务处的指导下，对我校非数学系的外系科大学数学的教学进行了多次研讨，确定了外系科大学数学的教学模式和教学大纲．微积分是大学生必修的基础数学课，学习微积分学可以培养学生的逻辑思维能力，提高学生的数学素养，对学生以后的发展起着重要的作用．本教材是我们为南京大学理工科第一层次的一年级本科生（包含物理、电子、计算机、软件工程、天文、工程管理、地球科学、大气科学、地理科学以及商学院等专业）编写的大学数学教材．南京大学理工科第一层次大学数学共开设两个学期，总课时为128课时，另加64课时的习题课．整套教材分上、下两册，上册主要包含极限，一元函数微积分学，空间解析几何与向量代数；下册主要包含多元函数微积分学，级数及常微分方程初步等．

在编写本教材的过程中，我们参阅了国内外部分教材，汲取其精华，根据我们的理解和经验，对教材作了现有的编排，并配备了相当数量的习题．其中黄卫华编写了第 1、4 章以及附录，邓卫兵编写了第 2 章，孔敏编写了第 3 章，张运清编写了第 5、6 章，廖良文编写了第 7、8、9 章，周国飞编写了第 10 章．张运清绘制了上、下册的大部分图形．全书由黄卫华统稿，周国飞对下册也作了部分统稿工作．附录中，我们给出了习题的参考答案．但建议读者不要依赖参考答案，尽量独立思考．

在本教材的编写过程中，我们得到了系领导的关怀，无论在资金还是时间上都得到了他们大力的支持，在此表示衷心的感谢！数学系党委书记秦厚荣教授、系主任尤建功教授、副系主任师维学教授、尹会成教授、朱晓胜教授、数学系陈仲教授、罗亚平教授、宋国柱教授、姚天行教授、姜东平教授、梅家强教授等对本教材进行了审阅并提出了非常宝贵的意见．此外，在本教材的试用阶段 (2010.9 ~ 2013.6)，邓建平、陆宏、潘灏、肖源明、耿建生、李军、吴婷、李春、崔小军、苗栋、王奕倩、程伟、谭亮、王伟、刘公祥、窦斗、石亚龙、杨俊峰、钱志、李耀文、陈学长等老师也提出了许多有益的建议，在此表示感谢！

此外，2009年本教材获南京大学“985工程”二期“精品教材”建设基金的支持，在此表示由衷的感谢！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免，期盼读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章　极限与连续性

1.1　预 备 知 识

本节我们把读者在初高中学习过的一些与高等数学联系较紧密的初等数学知识做简单的概括, 以便读者能够在学习高等数学需要用到有关初等数学知识时可以较方便地检索到, 从而能更好地学习高等数学.

首先介绍本书常用到的一些符号.

一、常用集合

$\mathbb{N}$ —— **自然数集**;　$\mathbb{Z}$ —— **整数集**;　$\mathbb{R}$ —— **实数集**;

$\mathbb{R}^+$ —— **正实数集**;　$\mathbb{R}^-$ —— **负实数集**;　$\mathbb{C}$ —— **复数集**.

二、逻辑符号介绍

(1) $\exists$: 表示"存在某个", "至少有一个". 例如, "$\exists N \in \mathbb{N}$", 表示"存在某个自然数 N", 或表示"至少存在一个自然数 N".

(2) $\forall$: 表示"对于任意给定的" (当用在符号"$\exists$"之前或命题开始时), 或表示"对任意一个", "对所有的" (当用在命题之末时). 例如"$\forall a > 0, \exists c > 0$ 使得 $0 < c < a$"表示对任意给定的正数 a, 存在正数 c, 使得 $0 < c < a$. 再如"$x^2 + y^2 \geqslant 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$"表示对所有的实数 x, y 成立不等式 $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

(3) $P \Longrightarrow Q$: 表示命题 P 的必要条件是 Q; 或由 P 可推得 Q.

(4) $P \Longleftarrow Q$: 表示命题 P 的充分条件是 Q.

(5) $P \Longleftrightarrow Q$: 表示命题 P 与 Q 等价, 或 P 的充分必要条件是 Q.

(6) $\square$: 表示一个定理、推论证明结束, 或一个例题解答完毕.

1.1.1　集合

集合的概念在初高中时已经学过. 我们把具有某种性质的研究对象的全体称为具有该性质的**集合**. 例如, "某高校某年所有新生的集合", "所有正实数的集合"等.

集合通常用大写字母 A, B, C, D 等表示, 集合中的每一个个别的对象称为**集合的元素**, 通常用小写字母 a, b, x, y 等表示. a 是集合 A 的元素, 记为 $a \in A$. b 不是集合 A 的元素, 记为 $b \notin A$.

只含有有限多个元素的集合称为**有限集**. 含无穷多个元素的集合称为**无限集**. 不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$. 若 $\forall x \in A \iff x \in B$, 则称集合 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$, 否则, 称 A 和 B 不相等, 记为 $A \neq B$. 若 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, 则称 A 为 B 的**子集**, 也称 A **包含于** B 或 B **包含** A, 记为 $A \subseteq B$. 空集是任一集合的子集. 由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**.

设A, B是两个集合, 则集合$A\bigcup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$称为A与B的**并集**; 集合$A\bigcap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$称为A与B的**交集**; 集合$A\setminus B=\{x|x\in A$但$x\notin B\}$称为A与B的**差集**; 集合$C_UA=\{x\,|\,x\in U$但$x\notin A\}$称为A的**补集**, 其中U为全集.

集合具有下述运算法则:

(1) 交换律: $A\bigcup B=B\bigcup A$, $A\bigcap B=B\bigcap A$;

(2) 结合律: $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$, $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$;

(3) 分配律: $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$; $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$;

(4) 德·摩根 (De Morgan*)律: $C_U(A\bigcup B)=C_UA\bigcap C_UB$, $C_U(A\bigcap B)=C_UA\bigcup C_UB$.

1.1.2 数学归纳法·不等式·极坐标系·复数

一、数学归纳法

在初等数学中, 数学归纳法在证明一些结论时是一种经常使用的行之有效的方法, 它在大学数学中也是证明定理、命题成立的一种重要的方法.

数学归纳法 (又称**完全归纳法**): 设以下出现的α, k, n均为自然数, 如果某一个命题对于数α正确 (其中α是使这个命题有意义的最小的自然数), 并且从它对于$k\,(\geqslant\alpha)$ 正确就能推出它对于$k+1$也正确, 那么这个命题对于大于α的自然数n都成立.

数学归纳法证明命题的步骤:

(1) 检验命题对于使它有意义的最小自然数α是正确的;

(2) 从命题对于k正确, 推出它对于$k+1$也正确;

(3) 这两步证明如果都能完成, 那么根据数学归纳原理可以断定, 这个命题对于一切大于α的自然数n都正确.

数学归纳法有第一和第二数学归纳法之分. 对于一个关于自然数n的命题$P(n)$, 用第一数学归纳法证明命题的步骤如下:

(1) 证明$n=1$时, 命题$P(1)$成立;

(2) 假设$n\geqslant 2$时, 命题$P(n-1)$成立, 由此推得命题$P(n)$成立, 则命题$P(n)$对于所有的$n\in\mathbb{N}$成立.

用第二数学归纳法证明命题的步骤如下:

(1) 证明$n=1$时, 命题$P(1)$成立;

(2) 假设对于小于 n 的自然数, 命题$P(1), P(2), P(3), \cdots, P(n-1)$都成立, 由此推得命题$P(n)$成立, 则命题$P(n)$对于所有的$n\in\mathbb{N}$成立.

例 1.1.1 用数学归纳法证明: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

证明 $n=1$时, 左边$=1$, 右边$=1$. 所以结论对于$n=1$成立.

假设结论对于$n=k$时成立, 即有 $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$, 那么对于$n=k+1$, 有

* 德·摩根 (De Morgan, 1806～1871), 英国数学家.

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\Big[\frac{k(k+1)}{2}\Big]^2+(k+1)^3\\
&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}\\
&=\frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}=\Big[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\Big]^2.
\end{aligned}
$$

所有结论对于$n=k+1$时成立. 由数学归纳法知结论对于所有的自然数$n\in\mathbb{N}$成立. □

二、不等式

不等式在微积分中的地位非常重要, 熟悉一些基本不等式和掌握证明不等式的基本方法, 对以后的学习是十分重要的. 我们在这里只给出一些常用的不等式, 证明留给读者作为练习.

1. 三角不等式: 设$a,b\in\mathbb{R}$, 则

$$\big|\,|a|-|b|\,\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1.1.1}$$

2. 方幂不等式: 设$x,y\in\mathbb{R}$, 则

$$x^2+y^2\geqslant 2xy. \tag{1.1.2}$$

当且仅当$x=y$时, 等号成立.

3. 伯努利 (Bernoulli*) 不等式: 设$a_i\in\mathbb{R}$, $a_i>-1$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 且符号相同, 则有

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant 1+\sum_{i=1}^{n}a_i. \tag{1.1.3}$$

特别地, 当a_i均相等时, 记为$x>-1$, 则有

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\ \ (\forall\, n\in\mathbb{N},\ x>-1). \tag{1.1.4}$$

由此立得

$$1+\frac{x}{n}\geqslant(1+x)^{\frac{1}{n}}.$$

4. 设n个正数之积为 1, 则这n个数之和必不小于n. 即若$a_i\in\mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 且$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant n. \tag{1.1.5}$$

当且仅当这n个数相等时, 等号成立.

* 伯努利 (Bernoulli J, 1667～1748), 瑞士数学家.

5. 正数的几何平均数不大于其算术平均数. 即设 $a_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{1.1.6}$$

6. 正数的几何平均数不小于其调和平均数. 即设 $a_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}. \tag{1.1.7}$$

7. 柯西–施瓦兹 (Cauchy† - Schwarz‡) 不等式: 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 . \tag{1.1.8}$$

8. 闵可夫斯基 (Minkowski§) 不等式: 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\Big]^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{1/2}. \tag{1.1.9}$$

例 1.1.2 证明: $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>1,\, n \in \mathbb{N})$.

证明 由式 (1.1.6),

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{(n+1)}{2} .$$

不等式两边 n 次方, 得 $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ $(n>1,\, n \in \mathbb{N})$. □

三、极坐标系

在平面解析几何中除了直角坐标系外, 常用的还有一种坐标系称为**极坐标系**. 现在我们来建立这种坐标系.

在平面上取一定点 O, 称为**极点**. 从 O 点作射线 Ox(习惯上 Ox 指向右), 称为**极轴**. 且在其上定义好单位长度. 这就构成了**极坐标系**(图 1.1). 设 A 为平面上除极点 O 外的任一点, A 点到极点的距离为 ρ, 又设 Ox 与 OA 的夹角为 $\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi$, θ 的单位为弧度, 它是由 Ox 按逆时针方向绕 O 点旋转得到), 则记 A 点的**极坐标**为 (ρ,θ), 称 ρ 为**极径**, θ 为**极角**. 除了极点外, 平面上任一点均有唯一的极坐标. 此外, 规定当 $\rho=0$ 时 A 点就是极点, 此时 θ 不定. 因此对任意给定的一对有序实数 (ρ,θ), 其中 $\rho>0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, 在极坐标系下有唯一的一点与之对应, 而该点的极坐标为 (ρ,θ).

† 柯西 (Cauchy A L, 1789～1857), 法国数学家.
‡ 施瓦兹 (Schwarz H A, 1843～1921), 德国数学家.
§ 闵可夫斯基 (Minkowski H, 1864～1909), 立陶宛、德国数学家.

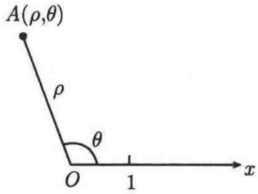


图 1.1

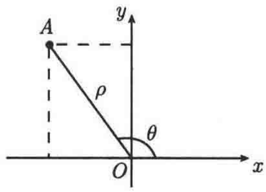


图 1.2

当 $\rho<0$ 时, 我们规定 $(\rho,\,\theta)$ 与 $(-\rho,\,\theta+\pi)$ 为同一点; 当 $\theta\geqslant 2\pi$ 或 $\theta<0$, 我们规定 $(\rho,\,\theta)$ 与 $(\rho,\,\theta+2k\pi)\,(k\in\mathbb{Z})$ 为同一点.

下面我们来建立极坐标与直角坐标之间的转换公式.

在平面上同时建立直角坐标系与极坐标系 (图 1.2), 使得原点与极点重合 (均用字母 O 表示), x 轴正向与极轴方向一致, 均用 Ox 表示. 设 A 为平面上任意一点, A 点的直角坐标为 $(x,\,y)$, 极坐标为 $(\rho,\,\theta)$. 由平面解析几何知

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\,, \\ y=\rho\sin\theta\,. \end{cases}$$

这就是从极坐标 $(\rho,\,\theta)$ 到直角坐标 $(x,\,y)$ 的转换公式. 我们还可以得到从直角坐标 $(x,\,y)$ 到极坐标 $(\rho,\,\theta)$ 的转换公式如下:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$$

有时我们也用字母 r 代替 ρ, 在平面解析几何中 r 与 ρ 具有相同的含义.

例如, 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在直角坐标系中是以原点为圆心、R 为半径的圆的方程. 利用极坐标与直角坐标的转换公式可以将其化为

$$\rho=R.$$

此式就是在极坐标系中, 以极点为圆心、极径 R 为半径的圆的方程.

四、复数

每个复数 z 都具有 $a+b\mathrm{i}$ 的形式, 其中 a 和 b 都是实数, 分别称为 z 的**实部**和**虚部**, 记为 $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$. i 称为虚数单位, 满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 给定两个复数 z_1 与 z_2, 当且仅当 $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$ 时才成立 $z_1=z_2$.

我们可以在平面上表示复数. 在平面上取定一个直角坐标系 xOy. 对于复数 $a+b\mathrm{i}$, 我们用平面上具有横坐标 $a=\mathrm{Re}(z)$ 与纵坐标 $b=\mathrm{Im}(z)$ 的点 $(a,\,b)$ 来表示 (图 1.3); 反过来, 若给出平面上的一点 $(a,\,b)$, 我们取复数 $a+b\mathrm{i}$ 与这个点对应. 这样, 就建立了平面上所有的点和一切复数之间的一个一一对应的关系. 正因为如此, 这个平面就称为**复平面**, 记为 $\mathbb{C}$, z 点在平面上, 就可以记为 $z\in\mathbb{C}$, Ox 轴称为**实轴**, Oy 轴称为**虚轴**.

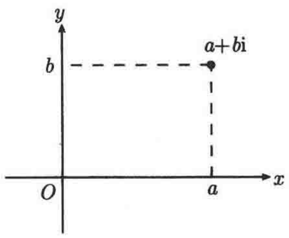


图 1.3

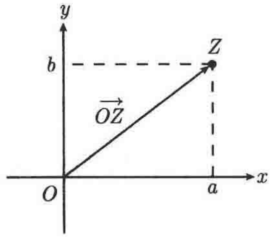


图 1.4

我们还可以把复数看成**平面向量**, 所谓向量, 是指既有方向又有大小的量. 给定一个复数 z, 以原点 O 为起点, 以点 Z 为终点, 可得一个向量, 用 $\overrightarrow{OZ}$ 表示 (图 1.4). 反之, 画出一个由 O 点作为起点的向量, 它的终点便唯一地确定了一个复数. 从而, 平面上所有从原点出发的向量与一切复数之间也建立了一一对应的关系. 所以就有

$$z = \overrightarrow{OZ}.$$

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度记为 $|\overrightarrow{OZ}|$. 令 $r = |\overrightarrow{OZ}|$, 易知

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

称为**复数的模**. 而向量的方向可以用 $\overrightarrow{OZ}$ 与实轴正向之间的夹角 θ (称为**复数的幅角**, 记为 $\theta = \arg z$ 且 $-\pi \leqslant \theta < \pi$, 或 $0 \leqslant \theta < 2\pi$) 来表示. 当 z 在包括实轴在内的上半平面时, θ 取非负值并满足 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; 当 z 在不包括实轴在内的下半平面时, θ 取负值并满足 $-\pi < \theta < 0$. 只有 $z = 0$ 是例外, 这时无法给定 θ 的值, 规定 $\overrightarrow{OZ} = \mathbf{0}$.

由图 1.4 可知

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta.$$

所以对于任何异于零的复数 $a + b\mathrm{i}$ 都可以写为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

称为**复数的三角表示式**. 若记

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

就有

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

称为**复数的指数表示式**.

复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 的**共轭复数**记为: $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

例如, 已知一个复数为 $z = 2 + 2\mathrm{i}$, 则其共轭复数为 $\overline{z} = 2 - 2\mathrm{i}$, 其模为 $|z| = 2\sqrt{2}$, 其幅角为 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

已知 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 则有

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1.$$

更一般地, 有

$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n}=1\quad (n\in\mathbb{N}).$$

设有两个复数 $z_1=a_1+b_1\,\mathrm{i}$, $z_2=a_2+b_2\,\mathrm{i}$, 则复数四则运算的代数式如下:

(1) 复数的加减法运算: $z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\,\mathrm{i}$;

(2) 复数的乘法运算: $z_1\cdot z_2=(a_1\,a_2-b_1\,b_2)+(a_2\,b_1+a_1\,b_2)\,\mathrm{i}$;

(3) 复数的除法运算: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1\,a_2+b_1\,b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2\,b_1-a_1\,b_2}{a_2^2+b_2^2}\,\mathrm{i}$.

如果复数用指数式表示, 即 $z_1=r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}$, $z_2=r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}$, 则复数乘除法运算的指数式如下:

(1) 复数的乘法运算: $z_1\cdot z_2=r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}$, 特别地, $z_1^n=r_1^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\theta_1}$;

(2) 复数的除法运算: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1-\theta_2)}$.

例 1.1.3　已知 $z_1=2+2\,\mathrm{i}$, $z_2=3+4\,\mathrm{i}$, 求 z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^n.

解

$$z_1+z_2=5+6\,\mathrm{i};$$

$$z_1-z_2=-1-2\,\mathrm{i};$$

$$z_1\cdot z_2=-2+14\,\mathrm{i};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{14}{25}-\frac{2}{25}\,\mathrm{i};$$

$$z_1^n=(2\sqrt{2})^n\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}.$$

□

1.1.3　区间 · 邻域 · 数集的界

我们称数轴上某一段中连续的点的集合为**区间**, 依据区间端点的隶属关系以及区间是否有限, 可分为以下几种情形 (下列各式中 $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$):

(1) 闭区间:　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$;

(2) 开区间:　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$;

(3) 半开区间:　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$, $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$;

(4) 无穷区间:　$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}$, $[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$,
$(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\}$, $(-\infty,b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\}$,
$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$.

上述前三种区间是有限区间, $b-a$ 是其长度. 第四种区间是无穷区间. 注意“∞”是个符号, 并不是具体的实数, 表示“无穷大”.

有时我们用大写的 I 或其他大写字母表示区间.

设 $x_0\in\mathbb{R}$, δ 为某个正数, 称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$ 为**点** x_0 **的** δ **邻域**, 简称**点** x_0 **的邻域**, 记为 $N_\delta(x_0)$, 即 $N_\delta(x_0)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$. 称 $N_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 为**点** x_0 **的** δ **去心邻域**, 简称**去心邻域**, 记为 $\overset{\circ}{N}_\delta(x_0)$. 称开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 为**点** x_0 **的右邻域**, 记为 $N_\delta^+(x_0)$; 开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为**点** x_0 **的左邻域**, 记为 $N_\delta^-(x_0)$.

注　有时在表示上述各种邻域的记号中, 右下角的“δ”可以省去不写.

当 M 为充分大的正数时, 如下数集

$$U(\infty)=\{x\,|\,|x|>M\},\quad U(+\infty)=\{x\,|\,x>M\},\quad U(-\infty)=\{x\,|\,x<-M\},$$

分别称为 ∞ 邻域, $+\infty$ 邻域, $-\infty$ 邻域.

下面给出数集“界”的概念.

定义 1.1.1 (数集的界)　设 S 为 $\mathbb{R}$ 中的一个数集, 若存在实数 M (或 m) 使得 $x \leqslant M$ (或 $x \geqslant m$), $\forall x \in S$, 则称 M (或 m) 为**数集 S 的上界 (或下界)**, 并称 S 为**上有界 (或下有界) 集合**. 若 S 既有上界又有下界, 则称 S 为**有界集合**. 若 $\forall M > 0$, $\exists x \in S$ 使得 $x > M$(或 $x < -M$), 则称 S 为**上无界 (或下无界) 集合**, 上无界集合和下无界集合统称**无界集合**.

显然, S 为有界集合 $\Longleftrightarrow \exists K > 0$ 使 $|x| \leqslant K, \forall x \in S$. 这时称 K 为数集 S 的**界**.

可以证明任何有限区间都是有界集合, 无限区间都是无界集合, 由有限个数组成的数集都是有界集合.

定义 1.1.2 (上确界与下确界)　若一个数集 S 上有界, 则其就有无限多个上界, 而上界中的最小者被称为 S 的**上确界**, 记为 $\sup S$, 即一个数集的上确界是该数集的最小上界; 若一个数集 S 下有界, 则其就有无限多个下界, 而下界中的最大者被称为 S 的**下确界**, 记为 $\inf S$, 即一个数集的下确界是该数集的最大下界.

实际上, 如果 $M \in \mathbb{R}$ 是数集 S 的上确界, 即 $\sup S = M \Longleftrightarrow \forall x \in S$, 有 $x \leqslant M$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in S$, 使得 $x_1 > M - \varepsilon$.

如果 $m \in \mathbb{R}$ 是数集 S 的下确界, 即 $\inf S = m \Longleftrightarrow \forall x \in S$, 有 $x \geqslant m$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_2 \in S$, 使得 $x_2 < m + \varepsilon$.

例如, 若 $S = (0,1)$, 则 $\sup S = 1$, $\inf S = 0$; 对数集 $E = \left\{ (-1)^n \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, 有 $\sup E = \dfrac{1}{2}$, $\inf E = -1$. 这两个例子说明 $\sup S$, $\inf S$ 可能属于 S, 也可能不属于 S.

我们知道无限多个实数组成的集合中不一定有最大数, 也不一定有最小数. 例如开区间 $(0,1)$ 中既无最大数, 也无最小数. 因此, 我们当然要问上有界集合是否必有上确界? 下有界集合是否必有下确界? 答案是肯定的, 我们有下述定理:

定理 1.1.1 (确界存在公理)　*每一个非空上有界(或下有界)集合必有唯一的实数作为其上确界(或下确界).*

上述定理是本课程的理论基础, 它的证明涉及实数的理论, 故略去. 此定理在后面的章节中有重要的应用.

1.1.4　一元函数

一、映射与函数

定义 1.1.3 (映射)　设 A, B 为两个非空集合, 若对于任意的 $x \in A$, 按某对应法则 Ψ 有唯一的 $y \in B$ 与之对应, 则称 Ψ 为 A 到 B 的**映射**, 记为 $\Psi: A \to B$. 并称 y 为 x 关于映射 Ψ 的**像**, 记为 $\Psi(x) = y$, 称 x 为 y 的**原像**, 称 A 为映射 Ψ 的**定义域**, 记为 $D(\Psi)$, 称像 $\Psi(x)$ 的集合为映射 Ψ 的**像域 (或值域)**, 记为 $\Psi(A)$.

特别地, 若 $B = \Psi(A)$, 称 $\Psi: A \to B$ 为**满映射**, 或称 Ψ 将 A **映到** B **上**; 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ 有 $\Psi(x_1) \neq \Psi(x_2)$, 称 $\Psi: A \to B$ 为**单映射**; 若 $\Psi: A \to B$ 是满映射, 又是单映射, 则称 $\Psi: A \to B$ 为 $1-1$ **映射, 或双映射**.

例 1.1.4　设 A 是平面上多边形集合, $\forall x \in A$, $y = \Psi(x)$ 表多边形顶点个数, 则 $\Psi: A \to \mathbb{N}$ 不是满映射 (因无顶点个数是 1 或 2 的多边形), 也不是单映射 (因平面上有无穷多个

三角形).

例 1.1.5　设 A 表某大学大学生的集合, $\forall x \in A$, $y = \Psi(x)$ 表该大学生 x 的学号, 则 $\Psi : A \to \mathbb{N}$ 是单映射.

例 1.1.6　$y = \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 既不是满映射也不是单映射; $y = \sin x : \mathbb{R} \to [-1,1]$ 是满映射不是单映射. $y = \sin x : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ 是双映射.

定义 1.1.4 (函数)　设 $A \subseteq \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 称映射 $f : A \to \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 为**函数**, 记为函数 $f : A \to \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 或函数 $y = f(x)$, $x \in A$. 称 x 为**自变量**, y 为**因变量**, $f(x)$ 为函数 f 在 x 的**函数值**. $D(f) = A$ 为函数的**定义域**, $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$ 为函数的**值域**.

注　确定一个函数必须具有两个要素: 定义域与对应法则, 而值域不是要素, 因为当定义域与对应法则确定后, 值域也随之确定.

函数有三种表示法: 公式法, 图像法, 表格法. 而我们在本课程中主要通过函数的解析表达式 (公式) 来研究函数的性质.

特别地: 当 x, y 皆为实数时, 称 $y = f(x)$ 为**实变函数**, 简称**实函数**; 当 x 为实数, y 为复数时, 称 $y = f(x)$ 为**复值函数**; 当 x, y 皆为复数时, 称 $y = f(x)$ 为**复变函数**, 简称**复函数**.

例如, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 注意到函数的定义域通常理解为使该解析式有意义 (在实数范围内) 的一切自变量的全体. 对此处给出的函数, 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则定义域 $D = (-1,1)$; 若 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C}$, 则定义域 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; 若 $x, y \in \mathbb{C}$, 则定义域 $D = \mathbb{C} \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$.

本课程仅限于讨论实函数, 简称为函数. 对于复函数, 本课程不予讨论.

定义 1.1.5 (逆映射与复合映射)　设 $\Psi : A \to B$ 为 $1-1$ 映射, 则 $\forall y \in B$ 存在唯一的 $x \in A$, 使得 $\Psi(x) = y$, 这个由 B 到 A 的映射称为 Ψ 的**逆映射**, 记为

$$\Psi^{-1} : B \to A.$$

设有映射 $\Psi : A \to B, \Phi : B \to C$, 则由 $\Phi\circ\Psi(x) = \Phi(\Psi(x))$ 定义的 A 到 C 的映射称为 Ψ 与 Φ 的**复合映射**. 记为

$$\Phi\circ\Psi : A \to C.$$

若在上述定义中 $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $C \subseteq \mathbb{R}$, 则 $\Psi^{-1} : B \to A$ 为**反函数**, $\Phi\circ\Psi : A \to C$ 为**复合函数**.

注　注意在复合函数中, 并不是任意两个函数都是可以复合的, 例如, $y = \arcsin x$, $x = \sqrt{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, 这两个函数是不可以复合的. 两个函数 $f(x)$ $(x \in A)$, $g(y)$ 可以复合必须满足: $f(A) \subseteq D(g)$. 而在这个例子中, 反正弦函数的定义域为: $|x| \leqslant 1$, 但 $x = \sqrt{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ 的值域是: $|x| \geqslant 1$.

$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图像相同; $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y = x$ 对称.

例 1.1.7　设 $f(x) = x^2$, $g(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, 求函数 $f\circ g(x), g\circ f(x), g^{-1}(x)$, 并确定其定义域.

解

$$f\circ g(x) = (\log_a x)^2 \ (x > 0);$$
$$g\circ f(x) = 2\log_a |x|, \ (x \neq 0);$$
$$g^{-1}(x) = a^x (a > 0, a \neq 1) \ (x \in \mathbb{R}).$$

□