

非成像光学设计

张 航 严金华 编著



科学出版社

非成像光学设计

张 航 严金华 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书较为系统地介绍非成像光学理论与设计方法,共5章。第1章介绍几何光学的基本理论,接着简单介绍成像光学理论,然后介绍非成像光学的发展历史、现状、基本理论以及设计方法。第2章介绍构建光学表面所需的曲线和曲面理论,包括微分几何的基础理论及NURBS曲线和曲面构造方法。第3章介绍非成像光学的基本概念和基础理论,主要包括光展、光展守恒原理、流线、哈密顿光学和边光原理等内容。第4章介绍较为传统的非成像光学设计方法,包括CPC方法、菲涅尔透镜、流矢法、同步多表面法等。第5章重点介绍基于自由曲面的非成像光学设计法,主要包括Monge-Ampère方程法、网格映射曲面构造法、二次曲面包络法和混合方法等。

本书可作为照明工程、光学工程和太阳能(光伏)等专业的光学设计课程的本科生或研究生教材,也可作为相关领域从事科研、工程设计的广大科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非成像光学设计/张航,严金华编著. —北京:科学出版社,2016.6

ISBN 978-7-03-048864-0

I. ①非… II. ①张… ②严… III. ①光学设计 IV. ①TN202

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第136610号

责任编辑:王 哲 霍明亮 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 倩 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年6月第一版 开本:720×1000 1/16

2016年6月第一次印刷 印张:12 1/4

字数:240 000

定价:68.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

非成像光学是几何光学的一个新兴分支,是伴随太阳能和 LED 照明技术的发展而快速兴起的新学科,直到目前为止非成像光学还处于快速发展之中,严格来说非成像光学还没有形成系统完备的理论体系。非成像光学是从 20 世纪 60 年代中期开始发展的,由苏联的 Baranov、德国的 Ploke 和美国的 Winston 所研究聚光器的光线传输问题而形成了早期的非成像光学理论。1978 年, Welford 和 Winston 出版了第一本专著 *The Optics of Nonimaging Concentrators: Light and Solar Energy*, 书中重点介绍了太阳能聚光器设计中的非成像光学方法。2004 年, Winston 等撰写了 *Nonimaging Optics*, 书中对非成像光学系统进行较为深入的阐述,还介绍了光展守恒、边光原理、光学动量和哈密顿光学等理论,提出了 CPC、流线法和 SMS 法等实用非成像光学设计方法。2008 年, Chaves 完成了 *Introduction to Nonimaging Optics*, 该书更系统地介绍了非成像光学,并将非成像光学理论与方法应用到了照明设计中,尤其为 LED 照明设计提供了理论与方法上的有力支持。2013 年, Koshel 等推出了 *Illumination Engineering: Design with Nonimaging Optics*, 书中系统介绍了非成像光学的基本理论、主流设计方法和设计流程。本书的部分章节内容是以 Chaves 的 *Introduction to Nonimaging Optics* 为底稿编写的。

非成像光学系统包含三个部分:光源、光学器件和接收面。与传统成像光学设计重点关注成像质量(即物像之间一一对应关系和映射的不失真)不同,非成像光学设计的研究重点在于光学系统对光能量传输的控制。非成像光学设计主要针对两类系统:集光系统和配光系统。集光系统应用于太阳能或光电检测中,配光系统主要用于照明设计,尤其是 LED 照明设计。非成像光学设计的终极目标是:管住每一条光线,驾驭每一根光线。只有实现这个目标,才能使配光系统达到最高光效。非成像光学系统的光学过程可以用正反两个数学问题来描述:一是在给定光源和光学器件的情况下,求解在目标(接收)面上的光强(或照度)分布,这类问题我们称为正问题;二是给定光源和目标面光分布,倒过来求光学器件的结构或光学表面,称为逆问题。而非成像光学通常碰到的是逆问题,其求解包含以下四个步骤:①由光源(点源)的配光曲线和目标光分布建立光线的映射关系;②利用映射关系和光学定律求出光源角空间里的法向量场和标架场;③结合设计要求生成关键几何曲面;④添加辅助几何表面以实现三维建模,填充折射率材料完成配光器件的构建。这里每一个步骤都涉及复杂的数学或物理理论,而且仅对点光源适用,针对扩展光源必须另外引入优化算法,因此非成像光学注定是一门复杂而又富有挑

战性的学科。

本书是在作者所授《非成像光学设计》课程讲义基础上整理而成，章节的组织比较传统，先讲理论基础，再介绍具体设计方法，还提供一些设计案例供读者参考。本书中素材有来自课题组发表的相关论文，感谢梁雪、马宇飞、周海波、苏泽宇、何煜和张勇等所完成的研究工作。同时感谢刘锐、陆建东和刘正同学为本书的文字整理、公式录入和图例编辑付出的艰辛劳动。感谢程成教授、林强教授、施建青教授和隋成华教授对本书出版的支持和鼓励。目前国内尚无非成像光学方面的教材或专著，希望本书成为一个补充，帮助兴趣爱好者快速入门。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，还望读者不吝指正，提出宝贵的意见。

张 航

于浙江工业大学理学院

2016年4月

目 录

前言

第 1 章 概论	1
1.1 几何光学	1
1.1.1 基本原理	1
1.1.2 基本定律	2
1.1.3 光迹方程	2
1.1.4 成像光学	3
1.2 非成像光学	5
1.2.1 非成像光学的发展	6
1.2.2 非成像光学系统	6
1.2.3 非成像光学理论框架	8
1.2.4 非成像光学设计方法	10
1.3 数学工具与光学软件	12
第 2 章 曲线与曲面的基本理论	14
2.1 曲线	14
2.1.1 参数化曲线	14
2.1.2 曲率与 Frenet 标架	15
2.1.3 曲线的挠率和 Frenet 公式	17
2.2 曲面	17
2.2.1 参数化曲面	17
2.2.2 切平面、法向量与自然标架	18
2.2.3 曲面的基本形式	19
2.2.4 曲面的曲率	20
2.2.5 曲面论的基本方程	21
2.3 NURBS 曲线和曲面	23
2.3.1 NURBS 曲线	23
2.3.2 NURBS 曲面	24
第 3 章 非成像光学理论基础	26
3.1 光展理论	26
3.1.1 光展	26

3.1.2	光展守恒原理	29
3.1.3	光展的其他表达	34
3.2	哈密顿光学	48
3.2.1	费马原理	48
3.2.2	一般情形的拉格朗日量和哈密顿量	55
3.2.3	几何光学的拉格朗日量和哈密顿量	59
3.2.4	哈密顿量的另一种形式	62
3.2.5	哈密顿方程的坐标系变换	66
3.3	边光原理	71
3.3.1	边光定义	71
3.3.2	边光原理	72
3.3.3	两个例子	72
第 4 章	非成像光学设计方法	76
4.1	CPC 设计	76
4.1.1	简介	76
4.1.2	集光率	79
4.1.3	最大集光能力	84
4.2	菲涅尔配光设计	88
4.2.1	菲涅尔透镜简介	88
4.2.2	几何光学原理	89
4.2.3	菲涅尔透镜设计	92
4.2.4	菲涅尔透镜阵列的设计	94
4.3	流矢设计方法	99
4.3.1	简介	99
4.3.2	流矢的定义	103
4.3.3	基于边缘光线的流矢计算	107
4.3.4	流矢和光展	108
4.3.5	圆盘状光源的流矢	110
4.3.6	集光器的流矢设计方法	114
4.4	同步多表面设计法	116
4.4.1	SMS 简介	116
4.4.2	SMS 光学结构	117
4.4.3	LED 准直器设计	119
4.4.4	SMS 设计方法	123

第 5 章 基于自由曲面的配光设计方法	127
5.1 简介	127
5.1.1 问题解析	127
5.1.2 背景应用	128
5.1.3 现有基础	131
5.1.4 本章安排	140
5.2 Monge-Ampère 方程自由曲面设计方法	141
5.2.1 Monge-Ampère 方程数学推导	141
5.2.2 设计案例	145
5.3 网格映射曲面构造法	149
5.3.1 ODE 方法及其优化方法	149
5.3.2 PDE 方法	155
5.3.3 配焦椭流线法与优化	160
5.3.4 配焦椭流面法与优化	166
5.4 二次曲面包络法	171
5.4.1 SP 方法	172
5.4.2 SE 方法	173
5.4.3 SO 方法	175
5.4.4 案例实现	176
5.5 混合设计方法	179
5.5.1 思路与方法	179
5.5.2 两个案例	181
参考文献	184

第1章 概 论

1.1 几何光学

几何光学 (geometry optics) 是光学学科中以光线为基础、研究光的传播规律的一个重要分支学科, 又称为射线光学 (ray optics)。在几何光学中, 把组成物体的物点看作几何点, 把它所发出的光束看作无数几何光线的集合, 光线的方向代表光能的传播方向。原则上说几何光学只是波动光学的一种特例, 是当光波的波长很小时的极限近似。作此近似后, 几何光学就可以不涉及光的波动本性, 而能以相对简便的方法解决光学仪器设计中的技术问题。

1.1.1 基本原理

1. 费马原理

几何光的理论基础是费马原理 (Fermat principle), 其他几何光学定律可以从费马原理推导得到。费马原理的数学表达为

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (1.1)$$

方程 (1.1) 是个变分方程, 式中, A, B 是光线的起点和终点; $n(\mathbf{r})$ 是折射率在空间中的分布; $\int_A^B n(\mathbf{r}) ds$ 是光程。

费马原理的基本表述为: 从 A 点出发到达 B 点, 光线所经过路径的光程是个极值, 通常情况下是个极小值。

2. 独立传播原理

两束光在传播途中相遇时互不干扰, 仍按各自的途径继续传播; 而当两束光会聚于同一点时, 在该点上的光能量是简单相加的。

3. 光路可逆原理

一束光线从一点出发经过无论多少次反射和折射, 如在最后遇到与光束成直角的界面反射, 光束必然准确地循原路返回出发点。

基于上述光线传播的基本定律, 可以计算光线在光学系统中的传播路径。这种计算过程称为光线追迹, 是设计光学系统时必须进行的工作。

1.1.2 基本定律

在均匀介质中,由费马原理可以导出以下三个几何光学的基本定律。

(1) 直线传播定律 (Hero's law)。

光在均匀介质中沿直线传播。小孔成像和月食等现象都证明这一事实。

(2) 反射定律。

反射定律包含两点:一是入射光线、法线和反射光线共面;二是入射角和反射角相等。主要应用于镜面或界面等光学器件设计。

(3) 折射定律。

又称 Snell's law,定律内容主要包含两点:一是入射光线、法线和折射光线共面;二是入射角和折射角满足一下关系:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.2)$$

式中, n_1 是入射光所在介质的折射率; n_2 是折射光所在介质的折射率; θ_1 是入射角; θ_2 是折射角。

1.1.3 光迹方程

光在渐变折射率介质中传播时,其轨迹一般不再是直线而是曲线,因此情况变得更为复杂,需要引入偏微分方程来描述光的传播行为。

(1) 光迹方程。

对于渐变折射率分布的介质,由费马原理可知光线轨迹应满足:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1.3)$$

称为光迹方程,式中, ∇n 是指折射率的梯度。

(2) 程函方程。

如果引入一个与光程相关的标量函数 $S(\mathbf{r})$, 满足:

$$S(\mathbf{r}) = \text{Const}$$

的方程刻画了三维空间中一个曲面,如果曲面在任意一点上都垂直于过该点的光线,则称 $S(\mathbf{r})$ 为程函(eikonal function)。同样由费马原理可导出程函满足:

$$|\nabla S|^2 = n^2 \quad (1.4)$$

称为程函方程,程函的物理意义与电学中的静电势相类似。

1.1.4 成像光学

成像光学是传统几何光学的核心内容，已经发展得相当成熟了。成像光学系统包括三个部分：物体、透镜和像。成像光学的主要研究内容就是研究怎样的透镜（或成像系统）使像与物的一致性最高，这里一致性包含拓扑结构、几何比例和光色等方面的一致性。成像光学的根本任务是利用成像系统实现不失真或尽可能少失真的信息变换或传输。

光学成像主要分为三类：小孔成像、镜面成像和透镜成像。它们分别是上面几何光学三大定律的直接应用。

1. 小孔成像

用一个带有小孔的板遮挡在屏幕与物之间，屏幕上就会形成物的倒像，我们把这样的现象叫小孔成像（图 1.1）。前后移动中间的板，像的大小也会随之发生变化。这种现象反映了均匀介质中光线直线传播定律。

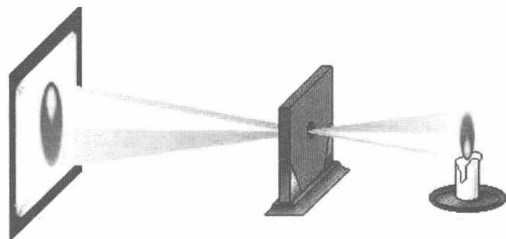


图 1.1 小孔成像

这个现象最早的文字记载是在《墨子·经说下》里，可以说是墨子最早阐述了光的直线传播原理。光的直线传播特性，在中国古代天文历法中得到了广泛的应用，并制造了圭表和日晷，测量日影的长短和方位，以确定时间、冬至点、夏至点；在天文仪器上安装窥管，以观察天象，测量恒星的位置。

2. 镜面成像

镜面成像分为三种情形：平面镜成像（图 1.2）、凸面镜成像和凹面镜成像（图 1.3）。一般情况下，平面镜和凸面镜成虚像，凹面镜成实像。

成像用的凹面镜通常采用近轴球面镜，其焦距和成像关系如下：

$$f = \frac{-R}{2} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (1.6)$$

式中， R 是凹面镜的半径； z_1 是物距； z_2 是像距； f 为负表示焦点与物体在反射镜的同侧。

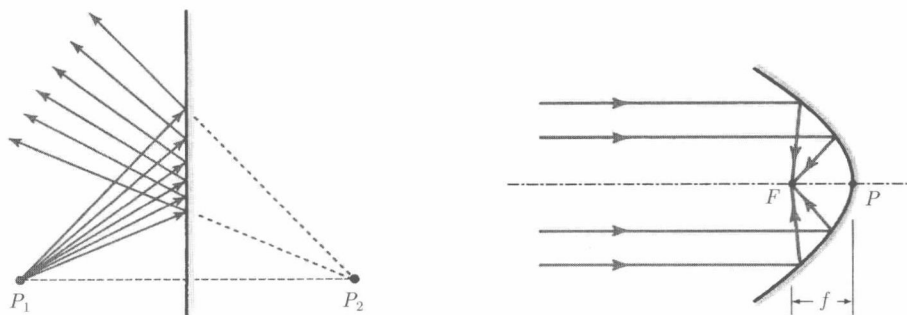


图 1.2 镜面成像

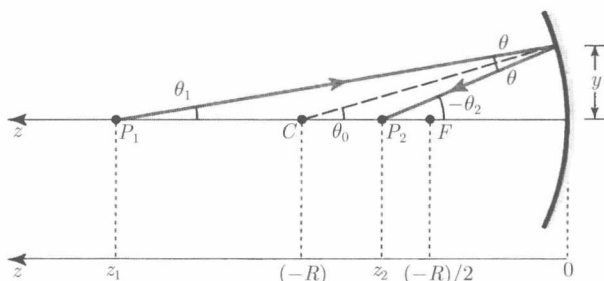


图 1.3 凹面镜成像

镜面成像是利用光的反射定律完成的。由于镜面成像存在光路设计困难、尺寸大和难以变焦等缺陷，所以在一般照相机上极少使用，但也有不会引入色差、可以折返等优点，因此被广泛地应用于专业天文望远镜上，哈勃太空望远镜就是一个典型成功案例。

3. 透镜成像

透镜成像的原理就是光的折射定律。对薄透镜而言其焦距和成像公式为

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (1.8)$$

以及物像的放大关系为

$$y_2 = -\frac{z_2}{z_1} y_1 \quad (1.9)$$

式中， z_1 是物距； z_2 是像距； y_1 是物高； y_2 是像高； R_1 是透镜左球面半径； R_2 是透镜右球面半径； f 为正表示焦点与物体在透镜的异侧，如图 1.4 所示。

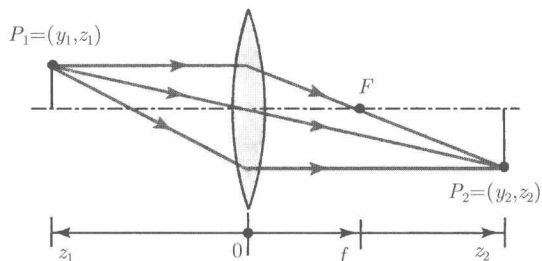


图 1.4 薄透镜成像

为了确定物、像关系，在镜面成像和透镜成像中建立一套统一的符号规则。

(1) 光线与主轴交点的位置从顶点算起，凡在顶点右方者，距离为正，在顶点左方者，距离为负。物点或像点到主轴的距离，在主轴上方为正，下方为负。

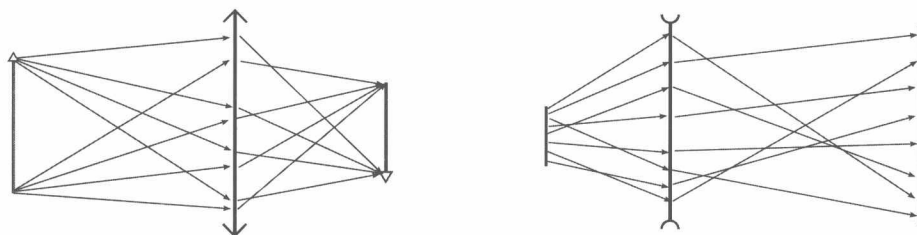
(2) 由主轴为起始线确定光线方向的倾斜角度，以小于 $\pi/2$ 的角度，由主轴转向光线，顺时针为正，逆时针为负。

(3) 凡图中出现的长度和角度都是正的，如 R 表示的凹面镜半径是负的，则在图中用 $(-R)$ 表示。

透镜成像通常存在球差、彗差、场曲、像散、畸变和色差等像差问题。为了克服这些像差，成像透镜往往采用非球面透镜以及多透镜组合等技术。

1.2 非成像光学

非成像光学 (Nonimaging Optics, Anidolic Optics) 是几何光学的一个新兴分支，是伴随太阳能和 LED 照明技术的发展而快速兴起的崭新学科。非成像光学系统也包含三个部分：光源、光学器件和接收者。与传统成像光学重点关注物像的一一对应关系和映射不失真不同，非成像光学重点研究光学系统对光能量传输的控制，如图 1.5 所示。非成像光学在太阳能聚光器和灯具照明设计两个领域得到了广泛的应用。



(a) 成像光学

(b) 非成像光学

图 1.5 成像光学与非成像光学

1.2.1 非成像光学的发展

目前非成像光学还处于成长阶段, 尚未形成系统的完善的理论体系, 正在不断探索和完善中。

非成像光学是从 20 世纪 60 年代中期开始发展的, 在这期间苏联的 Baranov、德国的 Ploke 和美国的 Winston 各自独立地在研究聚光器的非成像光学理论。1978 年, Welford 和 Winston 出版了第一本专著 *The Optics of Nonimaging Concentrators: Light and Solar Energy*, 书中重点介绍了太阳能聚光器设计中的非成像光学方法。2004 年, Winston 等撰写了 *Nonimaging Optics*, 书中对非成像光学系统进行较为深入的阐述, 还介绍了光展守恒、边光原理、光学动量和哈密顿光学等理论, 提出了 CPC、流线法和 SMS 法等实用非成像光学设计方法。2008 年, Chaves 完成了 *Introduction to Nonimaging Optics*, 该书更系统地介绍了非成像光学, 并将非成像光学理论与方法更多地应用到了照明设计中, 尤其为 LED 照明设计提供了理论与方法上的有力支持。2013 年, Koshel 等推出了 *Illumination Engineering: Design with Nonimaging optics*, 书中系统介绍了非成像光学的基本理论、主流设计方法和设计流程。

1.2.2 非成像光学系统

非成像光学系统按应用可以分为两类: 集光系统和配光系统, 集光系统应用于太阳能或光电检测中; 配光系统主要用于照明设计, 尤其是 LED 照明设计。

1. 集光系统

集光系统的作用是尽可能多地将来自光源的光线聚集到目标区域, 并不太关注其光强分布。以太阳光集光器为例, 如图 1.6 所示。

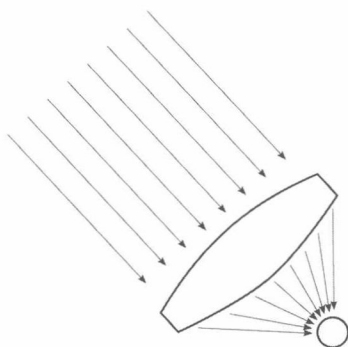


图 1.6 集光系统

一般情形下, 集光系统是以提高光能量密度为目的的。集光器件通常距离光源较远, 集光系统中的接收面一般具有距离近和面积小的特点, 因而集光系统主要是

采用凸透镜或凹面镜等光学器件为主。

2. 配光系统

配光系统的任务有两个：一是将来自光源的光线投射到目标区域形成指定的光强分布；二是在完成第一个任务的前提下实现尽可能高的效率。由此可见配光系统的设计要求要比聚光设计严苛，设计难度也会增加。

一般情形下，配光系统应对的光源具有大功率、高亮度和距离近等特点，而目标面具有面积大、距离远等特点。从光源到目标面光的能量密度是降低的，如图 1.7 所示。

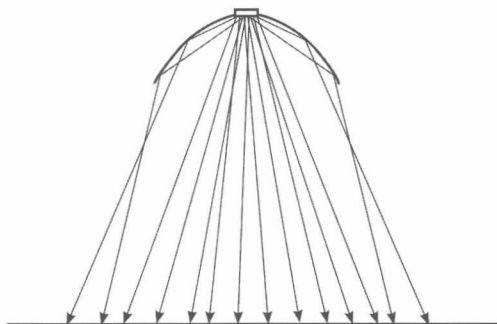


图 1.7 配光系统

3. 数学问题

在给定光源和光学器件的情况下，求解在目标面上的光强（或照度）分布，这类问题称为正问题，可以表示为

$$\Psi(u, v) = \Gamma * S(\theta, \phi) \quad (1.10)$$

式中， $\Psi(u, v)$ 是目标面上的光强分布； (u, v) 是目标面上的两个自由度； $S(\theta, \phi)$ 是光源的配光特性； (θ, ϕ) 是光源所在角空间的两个自由度； Γ 是光学算子，表示光学器件中反射、折射或多重组合的光学作用。 Γ 算子跟空间的折射率分布 $n(\mathbf{r})$ 相关，服从光迹方程，可以表示为

$$\Gamma = \Gamma(n(\mathbf{r}))$$

在照明中，介质都是区域均匀的，因此折射率的空间分布是由光学表面来确定的， Γ 算子进一步具体化为

$$\Gamma = \Gamma(n, M_1, M_2, \dots, M_N) \quad (1.11)$$

式中, n 是光学器件材料的折射率; M_i 是所有 N 个光学表面中的第 i 个表面, 整个过程服从几何光学的三个基本定律。由矩阵光学可知, 每一个表面上发生反射或折射均可以用一个矩阵 (或算子) 表示, 则式 (1.11) 可写成

$$\Gamma = M_N * M_{N-1} * \cdots * M_1 \quad (1.12)$$

式中, M_i 是光学表面 M_i 相对应的算子。对反射器而言 M_i 算子由光学表面的几何特性决定, 对透镜而言 M_i 算子由光学表面的几何特性和折射率共同决定, 一般折射率的作用是线性的。

光学表面的几何特性中最根本的是几何曲面的标架场, 这个标架场决定了光线的下一步偏折, 也决定了几何曲面的所有几何内容。

非成像光学系统的设计通常面临的是给定光源和目标面光分布, 倒过来求光学器件的结构, 这种问题称为逆问题。在非成像光学设计中一个逆问题的求解包含以下四个步骤。

- (1) 由光源 (点源) 的配光曲线和目标光分布建立光线的映射关系。
- (2) 利用映射关系和光学定律求出光源角空间里的法向量场和标架场。
- (3) 结合设计要求生成关键几何曲面。

(4) 添加辅助几何表面以实现三维建模, 填充折射率材料完成配光器件的构建。

上面的每一个步骤都涉及复杂的数学或物理理论, 而且仅对点光源适用, 针对扩展光源必须另外引入优化算法, 因此非成像光学注定是一门复杂而又富有挑战性的学科。随着现代数学的发展, 尽管非成像光学的发展任务是艰巨的, 我们相信前景是光明的。

1.2.3 非成像光学理论框架

1. 光展理论

光展 (光学扩展量) 是几何光学系统中的一个重要光学属性, 用来刻画光学系统的通光能力。这种通光能力对一定面积和一定出光立体角的面光源来说就是发光能力, 可以由面积和立体角的乘积来衡量; 对一个光学器件 (如透镜等) 而言通光能力体现为光的传输能力; 对于一个光电接收器, 通光能力又表示为对光的接收能力。归纳言之, 通光能力是指传输光能量本领的体现, 但在几何光学中光由光线来描述, 光线本身并没有赋予能量大小的属性, 默认每条光线承载相同的能量, 因此通光能力由光线能到达的相空间和光线密度的乘积来描述。这样通光能力作为一个物理量可以由一个纯粹的几何量“光展”来刻画。

对于理想光学系统光展是一个守恒量, 而对于非理想系统光展只增不减, 正是光展守恒为非成像光学设计带来了方便。

2. 边光原理

边光原理是非成像光学中的一个基础原理，其内容可以表述为：来自光源边缘的光线经过若干有序正则光学曲面后依然落在投射光斑的边缘，而来自光源内部的光线也将落在光斑内部。这里的边缘包含两层含义：① 二维曲面边缘；② 光束立体角边缘。对于需要考察光斑内部分布的照明配光器件而言，利用边光原理可以生成一个基础方案，也为设计带来方便。

3. 流线理论

流线理论是又一个非成像光学重要理论。流线的本质是光学动量的平衡轨迹，其性质可表述为在辐射场中放置一条反射性的流线，并不会改变辐射场的分布情况。由于流线的引入，为非成像光学设计带来了如下方便：① 改变光源的尺寸和位置；② 改变光源特性（如发散或会聚）；③ 改变光源配光特性（如光线发散角等）。流线设计方法可以针对光源形状和辐射场分布设计出特定的二次流线反射器形状，从而实现对光源的配光。

非成像光学设计中通常引入二次流线，典型的二次流线有：椭流线、双曲流线和抛物流线。在传统聚光灯具的光学设计中多采用抛物流线，而在 LED 照明设计中更多采用的是椭流线。

4. 哈密顿光学

哈密顿光学主要利用泛函理论描述光的传播行为。在几何光学中，从费马原理出发引入欧拉·拉格朗日 (Euler-Lagrangian) 方程，定义光学动量、拉格朗日量和哈密顿量，并建立哈密顿方程 (Hamilton equation)。尤其是由空间坐标和广义光学动量相结合形成相空间来表述光展等概念，可以更好地理解光展的物理意义。

5. Monge-Ampère 方程

Monge-Ampère 方程是一类二阶非线性偏微分方程。Monge 在 1784 年，Ampère 在 1820 年，他们先后研究了这个问题，并奠定了理论基础，因此以他们的名字联合命名为 Monge-Ampère 方程。随后由 Bernstein, Pogorelov, Fefferman 以及 Nirenberg 等深入研究取得了重要结果。

给定两个自变量 x, y ，因变量 u ，一般 Monge-Ampère 方程可写成

$$L[u] = A(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + Bu_{xx} + Cu_{xy} + Du_{yy} + E = 0 \quad (1.13)$$

式中， A, B, C, D 和 E 是关于 x, y, u, u_x, u_y 的变量。

对于点光源的反射面问题，可以从反射定律出发推导出 Monge-Ampère 方程为

$$L[u] = \det D^2u - f(x, u, D^2u) = 0 \quad (1.14)$$