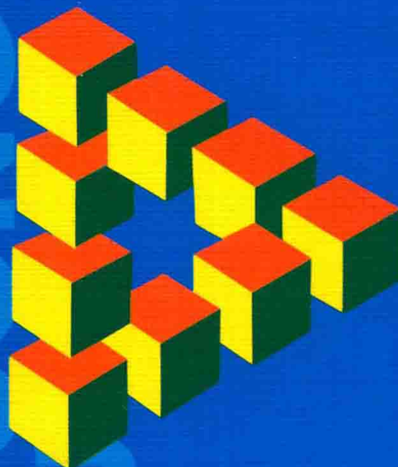
数学奥林匹克小丛书

高中卷 3

Shuxue Aolinpike XIAOCONGSHU



# 三角函数

曹瑞彬 张杰 编著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

olinpike



数学奥林匹克小丛书

高中卷 3

# 三角函数

Olinpike Xiao Congshu

曹瑞彬 张杰 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．三角函数／曹瑞彬，张杰编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4082-4

I.数... II.①曹...②张... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016376号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

# 三角函数

编　　著　曹瑞彬　张　杰
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　汪小玉
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂
开　　本　787×960　16开
印　　张　12
字　　数　225千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001-16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4082-4/G·2322
定　　价　13.00元

出 版 人　朱杰人

# 本书导读

本书精选了有关三角函数的各类题型，按“知识要点”“例题讲解”“习题训练”三大模块编写成书，供高中学生以及数学爱好者阅读和训练．知识要点：对本单元的知识点提要性地进行整理归纳．例题讲解：根据知识要点，从历年的高考试题和模拟试题中遴选20道例题，对每一题作详细的讲解，并力求做到一题多解、一题多证，同时对一些结论加以推广和拓展．习题训练：每个单元选配了30道精而经典、新而多样的习题，供读者模仿练习．本书虽为奥林匹克系列丛书，但所选例题与习题均源于教材、高于教材，层次分明，特别是习题中的前25题都是与高考题相同或相仿的习题，对于每一个参加高考的学生来说，都有能力解决，你不妨动手做一做，只有当你感到无从下手时，看一看书后的提示，再体会一下后独立完成，以期达到“顿悟”的境界．

**曹瑞彬**　1962年11月出生，1983年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，中国数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学数学首席教师．长期从事数学研究工作及数学奥林匹克竞赛，近年来培养了一大批数学尖子，其中有100多人获得全国高中数学联赛一等奖，多人入选国家数学奥林匹克集训队，其中有两位学生在国际数学奥林匹克中摘金夺银．主编了《奥林匹克教材》、《数学研究性学习》等20多部专著及教辅用书．

## 数学奥林匹克小丛书

| | |
|---|---|
| 冯志刚 | 第44届IMO中国队副领队<br>上海中学特级教师 |
| 葛　军 | 中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任<br>南京师范大学副教授 |
| 冷岗松 | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>上海大学教授、博士生导师 |
| 李胜宏 | 第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员<br>浙江大学教授、博士生导师 |
| 李伟固 | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>北京大学教授、博士生导师 |
| 刘诗雄 | 中国数学奥林匹克委员会委员<br>武钢三中校长、特级教师 |
| 倪　明 | 数学奥林匹克小丛书总策划<br>华东师范大学出版社副总编辑 |
| 单　墫 | 第30、31届IMO中国队领队<br>南京师范大学教授、博士生导师 |
| 吴建平 | 中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席<br>第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编 |
| 熊　斌 | 第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员<br>华东师范大学副教授 |
| 余红兵 | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>苏州大学教授、博士生导师 |
| 朱华伟 | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>广州大学软件所常务副所长、研究员 |

# 总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

# 目　录

# 1 任意角的三角函数

我们知道，在初中平面几何中角的定义是“从一点引出的两条射线所组成的图形”. 又可以看作“以一条射线绕它的端点旋转而形成的角”. 进入高中，我们采用后者的定义方法，把角推广到实数范围内的任意角.

我们规定，按逆时针方向旋转而形成的角叫做正角；按顺时针方向旋转而形成的角叫做负角；如果一条射线没有任何旋转，那么形成的角为零角.

在研究三角函数时，我们通常将角放置在直角坐标系中进行讨论. 使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 $x$ 轴的正半轴上，角的终边落在第几象限内，就称这个角是第几象限角；如果角的终边与坐标轴重合，那么称该角为轴上角，它不属于任何一个象限. 所有与角 $\alpha$ 终边相同的角连同角 $\alpha$ 在内可表示为 $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha,\ k \in \mathbf{Z}$ 的形式，即终边相同的两个角，它们之差一定是 $360^\circ$ 的整数倍.

在初中几何中规定角度为周角的 $\frac{1}{360}$ 的角为 1 度的角，这种用度作为单位来度量的单位制叫做角度制. 在高中数学中，通常用另一种单位制，即弧度制表示角，我们规定长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，即用弧度制度量的，这样的圆心角等于 1 rad. 当角的概念推广后，弧度的概念也随之推广，正角的弧度数是一个正数；负角的弧度数是一个负数；零角的弧度数是 0；角 $\alpha$ 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$，其中 $l$ 是角 $\alpha$ 作为圆心角时所对弧的长，$r$ 是圆的半径.

由于周角的弧度数是 $2\pi$，而在角度制中，它是 $360^\circ$，所以角度与弧度的互换公式是：

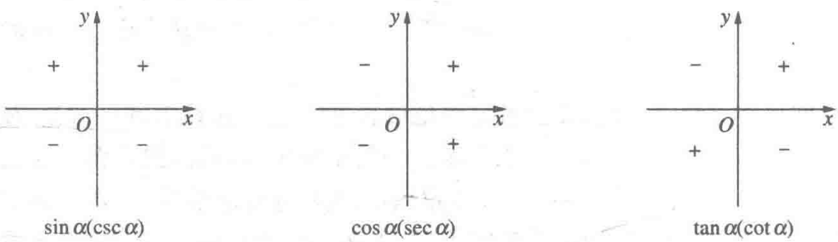
$$360^\circ = 2\pi\ \text{rad},\ 180^\circ = \pi\ \text{rad}.$$

从而 $$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad} \approx 0.017\,45\text{ rad}.$$

$$1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

当我们掌握了有关角的基本概念后，就可以使用坐标法对任意角定义三角函数.具体地说，就是将角的顶点置于坐标系的原点，角的始边与 $x$ 轴的正方向重合，从角 $\alpha$ 的终边上任取一点（不是顶点）$P(x, y)$，记 $P$ 到原点的距离为 $r$ $(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，定义任意角 $\alpha$ 的六个三角函数：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\cot\alpha=\frac{x}{y}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

由上述定义，容易知道六个三角函数值在各个象限内的正负号：




在角 $\alpha$ 的终边上取一点 $P$，使 $r=1$，即角 $\alpha$ 的终边与单位圆（圆心在原点 $O$，半径等于单位长度的圆）相交于点 $P(x, y)$，过 $P$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足为 $M$；过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线与角 $\alpha$ 的终边（当 $\alpha$ 为第一、四象限角时）或其延长线（当 $\alpha$ 为第二、三象限角时）相交于点 $T$，得到三角函数线，如图 1-1 所示.

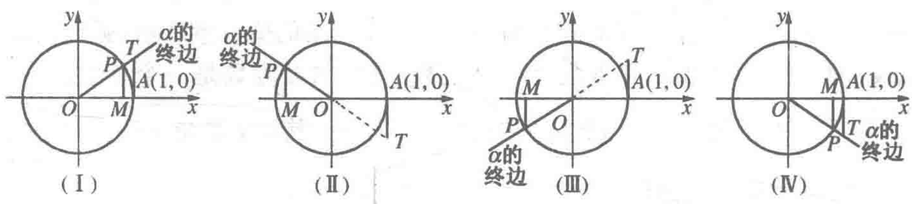



图 1-1

有向线段 $MP$、$OM$、$AT$ 分别叫做角 $\alpha$ 的正弦线、余弦线、正切线，即 $\sin\alpha=MP$、$\cos\alpha=OM$、$\tan\alpha=AT$. 三角函数线是三角函数中数形结合的重要工具.

根据三角函数定义，可以探讨出同角的三角函数关系式是：

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$，$\csc^2\alpha=1+\cot^2\alpha$.

商数关系：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$.

倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$，$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$，$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$.

根据三角函数定义，结合点的对称点，可以将任意角的三角函数转化为锐角三角函数，即诱导公式. 列表如下：

| | $-\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ | $2k\pi+\alpha$ $k\in\mathbf{Z}$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| cos | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |

其规律可概括为：$k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$ 的正弦、余弦值，当 $k$ 为偶数时，得角 $\alpha$ 的同名三角函数值；当 $k$ 为奇数时，得角 $\alpha$ 相应的余函数值；而函数值的符号与角 $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ 所在象限的函数符号一致. 可简单地说成“奇变偶不变，符号看象限”.

**例1** 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于 $90^\circ$ 的角$\}$，下列四个结论 ① $A=B=C$；② $A\subseteq C$；③ $C\subseteq A$；④ $A\cap C=B$. 其中正确的个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

**分析** 有关集合之间的关系，主要从集合中元素的性质来判断. 对于本题来说，若能举出反例，则说明结论错误；若不能举出反例，则再从定义出发加以证明.

**解** 从集合 $B$ 来看，所谓锐角就是小于 $90^\circ$的正角，从而 $B\subsetneqq C$，且 $B\subsetneqq A$，所以结论①错误；从集合 $A$ 来看，元素 $380^\circ$是第一象限角，但不是小于 $90^\circ$的角，从而 $A\not\subseteq C$，结论②错误；同理，如元素 $-60^\circ\in C$，而 $-60^\circ\notin A$，从而 $C\not\subseteq A$，结论③错误；又如 $-330^\circ\in A$，$-330^\circ\in C$，但 $-330^\circ\notin B$，从而结论④错误.

综上所述，题中四个结论均错误，故选 A.

**评注** 每一象限内的角可用区间来表示. 如第一象限角可以表示为 $(k\cdot 360^\circ, k\cdot 360^\circ+90^\circ)$，$k\in\mathbf{Z}$；第二象限角可以表示为 $(k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\cdot 360^\circ+180^\circ)$，$k\in\mathbf{Z}$；第三象限角可以表示为 $(k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\cdot 360^\circ+$

$270°)$, $k\in\mathbf{Z}$; 第四象限角可以表示为 $(k\cdot 360°+270°,\ k\cdot 360°+360°)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

**例2** 若 $\alpha$ 是第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{3}$ 分别是哪个象限的角? 又 $2\alpha$ 的终边在哪里?

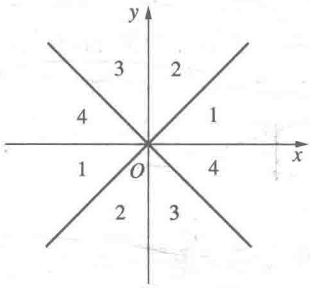
**分析** 要判定一个角是第几象限角,一般把 $\alpha$ 写成 $k\cdot 360°+\theta$ 或 $2k\pi+\theta$ $(0\leqslant\theta<360°$ 或 $0\leqslant\theta<2\pi$, $k\in\mathbf{Z})$ 的形式,再根据 $\theta$ 在第几象限来确定 $\alpha$ 在第几象限.

**解** 因 $\alpha$ 是第三象限角,所以 $k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°$ $(k\in\mathbf{Z})$,从而得 $k\cdot 180°+90°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+135°$ $(k\in\mathbf{Z})$. 于是当 $k$ 为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角;当 $k$ 为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

同理 $k\cdot 120°+60°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot 120°+90°$ $(k\in\mathbf{Z})$,于是当 $k=3n$ 时,$\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角;当 $k=3n+1$ 时,$\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角;当 $k=3n+2$ 时,$\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限角,其中 $n\in\mathbf{Z}$.

又因 $k\cdot 720°+360°<2\alpha<k\cdot 720°+540°$ $(k\in\mathbf{Z})$,所以 $2\alpha$ 的终边在第一、二象限及 $y$ 轴的正半轴上.

**评注** 由已知角的终边位置确定相关角的终边位置常用不等式法. 有时也采用"数形结合"的方法,即由 $\alpha$ 所在象限确定 $\frac{\alpha}{2}$ 或 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限时,可以根据图 1-2 所示,把各象限二(或三)等分,$\alpha$ 在第几象限,$\frac{\alpha}{2}$ 或 $\frac{\alpha}{3}$ 就在图中标号为几的区域.



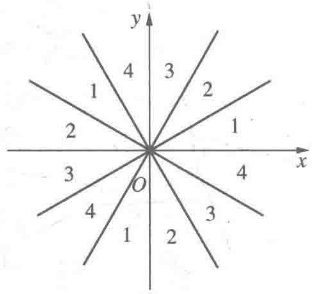




图 1-2

从图 1-2(1)可以看到,当 $\alpha$ 在第三象限时,$\frac{\alpha}{2}$ 在第二、四象限;从图 1-2(2)可以看到,当 $\alpha$ 在第三象限时,$\frac{\alpha}{3}$ 在第一、三、四象限.

**推广** 已知 $\alpha$ 是第 $m$ 象限的角 $(m=1, 2, 3, 4)$,求$\frac{\alpha}{n}$是第几象限角的问题,可先将各象限分成 $n$ 等分,然后从 $x$ 轴正方向上方第一个区域起,按逆时针方向顺序标上 1、2、3、4;1,2,3,4;…依次循环,直至标完所有区域,其中出现数字 $m$ 的区域即为$\frac{\alpha}{n}$所在象限.

**例 3** 设集合 $A=\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\left\{\beta \middle| \beta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 $A$ 和 $B$ 的关系是(　　).

(A) $A\subsetneqq B$　　(B) $B\subsetneqq A$

(C) $A\neq B$　　(D) $A=B$

**分析** 当集合中元素个数较少时,可通过枚举的手法确定集合之间的关系.本题两集合中元素个数虽然无数,但终边相同的角仅有有限个,所以采用枚举法.

**解** 在集合 $A$ 中,角 $\alpha$ 的终边所有可能的位置是与$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$、$\frac{3\pi}{2}$、$\frac{11\pi}{6}$等角终边相同;同理集合 $B$ 中,角 $\beta$ 的终边也与上述各角的终边相同,所以得 $A=B$, 选 D.

**评注** 欲证两集合 $A=B$, 也可从定义出发,即任意的 $\alpha\in A$,证 $\alpha\in B$,得 $A\subseteq B$;再任意的 $\beta\in B$,证 $\beta\in A$,得 $B\subseteq A$,从而 $A=B$. 本题也可采用如下证法:

当 $k=2n\ (n\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\in B$;

当 $k=2n-1\ (n\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=\frac{2n\pi-\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{2n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\in B$,所以 $A\subseteq B$.

又 $\beta=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\in A$, $\beta=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2k-1}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\in A$,所以 $B\subseteq A$.

综上所述得 $A=B$.

**例 4** 在半径为 $r$ 的圆中,一扇形的周长等于半圆的长,求扇形的圆心

角和该扇形的面积.

**分析** 利用公式直接求解.

**解** 设扇形弧长为 $l$,圆心角为 $\alpha$ rad,则 $\begin{cases} l+2r=\pi r, \\ l=r\alpha, \end{cases}$ 解得 $\alpha=\pi-2$.

从而该扇形面积为 $S=\dfrac{1}{2}\alpha r^2=\dfrac{1}{2}(\pi-2)\cdot r^2$.

**评注** 若将本题改编为:扇形的周长为定值 $l$,求该扇形具有怎样的中心角时,面积最大?

可这样解:设扇形的半径为 $r$,则弧长为 $l-2r$,扇形面积 $S=\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2=\dfrac{1}{2}r^2\cdot\left(\dfrac{l-2r}{r}\right)=-r^2+\dfrac{1}{2}rl$,所以当 $r=\dfrac{1}{4}l$ 时,$S$ 有最大值,此时 $|\alpha|=\dfrac{l-2\times\dfrac{1}{4}l}{\dfrac{1}{4}l}=2(\text{rad})$. 即该扇形的中心角为 2 rad 时,有最大面积 $\dfrac{1}{16}l^2$.

**例5** 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\ \tan\alpha)$ 在第一象限,则在 $(0,\ 2\pi)$ 内 $\alpha$ 的取值范围是(　　).

(A) $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(B) $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right)$

(C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$

**分析** 根据题设条件列出不等式,确定 $\alpha$ 的取值范围.

**解** 因点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\ \tan\alpha)$ 在第一象限,所以

$$\begin{cases} \sin\alpha-\cos\alpha>0, & ① \\ \tan\alpha>0. & ② \end{cases}$$

利用三角函数线,由①知

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5\pi}{4},$$

又由②知

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.$$

从而取它们的交集为 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}$,故选 A.

**评注** 利用三角函数线，结合“在三角形中大角对大边”的定理. 我们可以推知：

当 $\alpha \in \left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$或$\alpha \in \left(2k\pi+\frac{5\pi}{4},\ 2k\pi+2\pi\right)$时，$\sin\alpha < \cos\alpha$；

当 $\alpha \in \left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$时，$\sin\alpha > \cos\alpha$.

上述结论也可从今后学习到的三角函数曲线中观察得到.

**例 6** 已知 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$，判断 $\theta$ 是第几象限的角.

**分析** 利用已知条件估算出$\frac{\theta}{2}$的大致取值范围，从而确定 $\theta$ 是第几象限角.

**解法一** 因为 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $4k\pi+\frac{\pi}{3}<\theta<4k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

又因为$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$，或 $2k\pi+\frac{7\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$. 即 $4k\pi+\frac{3\pi}{2}<\theta<4k\pi+\frac{5\pi}{3}$ 或 $4k\pi+\frac{7\pi}{3}<\theta<4k\pi+\frac{5\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

综合得 $4k\pi+\frac{3\pi}{2}<\theta<4k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

故 $\theta$ 应是第四象限的角.

**解法二** 根据题意得 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{24}{25}<0$，$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{7}{25}>0$，所以 $\theta$ 为第四象限角.

**评注** 上述两种解法，其优劣可想而知. 解法一的分类讨论需要一定的技巧，若不深入挖掘 $\sin\frac{\theta}{2}>\frac{1}{2}$ 和$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\theta<-\frac{\sqrt{2}}{2}$这一条件，可能误判 $\theta$ 为第三或第四象限的角. 当我们学习了倍角公式之后，利用解法二便迎刃而解了.

本题中$\frac{\theta}{2}$的估算，是利用三角函数线得出的. 如图 1－3 所示.