高职高专"十二五"规划教材

公共基础类

XIANXINGDAISHU YUGAILVTONGJI

线性代数与概率统计

吴叶民　徐亚丹 / 主编

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

高职高专"十二五"规划教材·公共基础类

线性代数与概率统计

主　编　吴叶民　徐亚丹
副主编　仲　盛　何　鸣

北京
冶金工业出版社
2013

内容简介

本书根据高职高专院校工科及经济管理类专业“线性代数与概率统计”课程教学大纲，由高职高专教学一线富有教学经验的教师团队编写而成。编写本书的指导思想是充分考虑高职高专学生的特点，满足高职高专“线性代数与概率统计”教学的基本要求，淡化理论，注重应用，易学易懂，为学生在专升本、数学建模等各个方面的发展提供接口。

全书分“线性代数”及“概率统计”两篇共8章，包括行列式，矩阵，线性方程组，特征值、特征向量及二次型，线性规划，随机事件与概率，随机变量及其数字特征，数理统计初步。Matlab在线性代数与概率统计中的应用作为附录，有利于培养学生应用数学知识和计算机软件解决实际问题的意识和能力，提高学生素质，促进高职高专数学教学改革。

本书不但可以作为高职院校“线性代数与概率统计”课程的教材，还可以作为成人大专、本科院校“线性代数与概率统计”课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计/吴叶民，徐亚丹编. —北京：冶金工业出版社，2013.1

ISBN 978-7-5024-6216-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吴… ②徐… Ⅲ.①线性代数—高等职业教育—教材②概率论—高等职业教育—教材③数理统计—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第019622号

出 版 人　曹胜利

地　　址　北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009

电　　话　(010)64027926　　电子信箱　yjcbs@cnmip.com.cn

责任编辑　刘　源

ISBN 978-7-5024-6216-1

北京天正元印务有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2013年1月第1版，2013年1月第1次印刷

787mm×1092mm　1/16；13印张；304千字；200页；1-3000册

29.00元

前　言

“线性代数与概率统计”是高职高专各专业的公共基础课，对学生学习专业课程和技能提供了必要的数学基础，有利于培养学生应用数学解决问题的能力和素质。我们在总结多年高职高专“线性代数与概率统计”教学经验的基础上，分析国内外同类教材发展趋势，探索高职高专“线性代数与概率统计”教学的发展动向，组织编写了本书。

本书在编写中坚持以下几点原则：

(1) 在内容的选择上，根据高职高专教育的培养目标和教学的实际需要，知识的介绍从宽从简，注重讲清概念，降低理论要求，重视应用。在内容的编排上，由浅入深，由易到难，循序渐进，符合学生的认知规律和接受能力。

(2) 概念的引入尽可能从实际背景以及数学史入手，讲解基本概念、基本原理时，尽可能用简洁清晰的语言叙述，便于读者接受。

(3) 根据高职高专各专业对“线性代数与概率统计”的基本要求，贯彻“理解概念、强化应用”的教学原理，注重与实际应用联系较多的基础知识、方法和技能的训练，不追求过分复杂的计算和证明。

全书分“线性代数”及“概率统计”两篇共 8 章，包括行列式，矩阵，线性方程组，特征值、特征向量及二次型，线性规划，随机事件与概率，随机变量及其数字特征，数理统计初步。另外把 Matlab 在线性代数与概率统计中的应用编入附录，有利于培养学生数学建模和数学实验的能力。书中加“*”的部分为高职类院校选学内容。

本书可作为高职院校、成人本科及民办高校学生的“线性代数与概率统计”教材，也可作为工程技术人员的参考资料。

本书由吴叶民、徐亚丹任主编，仲盛、何鸣任副主编。全文参加编写的有(按姓氏笔画为序)：朱长坤、仲盛、贡韶红、李彦、吴叶民、何鸣、陆臻、夏罂、顾春华、徐亚丹、缪倩娟。

由于编者水平所限，书中难免有不足之处，敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者(bjzhangxf@126.com)踊跃提出宝贵意见。

编　者

目　录

第一篇　线性代数

第一篇 线性代数

线性代数（Linear Algebra）是数学的一个分支，它的研究对象是向量、向量空间、线性变换和线性方程组等．它的主要理论成熟于19世纪，而第一块基石（二、三元线性方程组的解法）则早在两千年前中国古代数学名著《九章算术》就已经出现．它广泛应用于科学技术的各个领域，尤其是计算机日益发展和普及的今天，线性代数已经成为学生所必备的基础理论知识和重要的数学工具.

第1章　行　列　式

【学习目标】

1. 理解 n 阶行列式的概念和性质.
2. 熟练掌握行列式的计算方法.
3. 会用克莱姆（Cramer）法则解线性方程组及判断线性方程组解的情况.

行列式是线性代数中一个最基本的概念，出现于线性方程组的求解过程中，最早是一种速记表达式，现在它是研究线性代数的重要工具，在其他数学分支及一些实际问题中也常常要用到.

1.1　行列式的概念和性质

1.1.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中，我们用加减消元法求解二元一次方程组，如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

消元得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

为了方便使用和记忆，将未知数 x_1，x_2 的共有系数（$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$）简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

数 a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）称为该行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来记忆．把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式的值便是主对角线上的两元素乘积与副对角线上两元素乘积之差.

根据对角线法则，$a_{22}b_1 - a_{12}b_2$、$a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ 可分别简记为 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，一元二次方程组的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

类似地，由 3^2 个数组成的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

为便于记忆，也可由如下对角线法则来得到

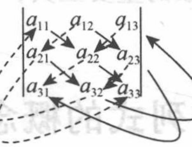

图 1-1

图中三条实线上的三个元素的乘积都带正号，位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负号，它们的代数和就是三阶行列式的值，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

容易验证，三阶行列式可以通过比它低一阶的二阶行列式的展开式来计算，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

其中三个二阶行列式分别是在原来的三阶行列式 D 中划去第一行元素 a_{1j}（$j=1,2,3$）所在的第一行和第 j 列的元素，剩下的元素保持原来的相对位置所组成的二阶行列式，而每一项的符号等于 $(-1)^{1+j}$，即

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

【例 1-1】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$ 的值.

解： 方法一（对角线法则）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)=-14$$

方法二（按第一行展开）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\times 1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 2\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-4)\times\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$=-14$

【例1-2】求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}=0.$

解：因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}=1\times x^2-1\times x=x^2-x$，故 $x^2-x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$.

1.1.2 n 阶行列式

三阶行列式可以按第一行展开成三个二阶行列式的代数和；同样，可用三阶行列式来定义四阶行列式；依此类推，按照这一规律在定义了 $n-1$ 阶行列式的基础上，便可得到 n 阶行列式的定义.

定义1 由 n^2 个数组成的算式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n **阶行列式**，其值为

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

其中 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 是 n 阶行列式 D 的第 i 行第 j 列元素.

n 阶行列式 D 从左上角到右下角的元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 的连线称为**主对角线**，从左下角到右上角的元素 a_{n1}，$a_{n-1,2}$，$\cdots$，$a_{2,n-1}$，a_{1n} 的连线称为**副对角线**.

定义2 在 n 阶行列式 D 中，把元素 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的元素按原次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 又记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

因而 n 阶行列式的定义可简述为：n 阶行列式等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

上式称为将行列式 D 按第一行的展开式.

【例 1-3】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&0&-3\\1&0&3&0\\2&-3&6&1\\1&6&2&-3\end{vmatrix}$ 的值.

解：$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&3&0\\-3&6&1\\6&2&-3\end{vmatrix}+(-3)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&0&3\\2&-3&6\\1&6&2\end{vmatrix}$

$=2\times3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&1\\6&-3\end{vmatrix}+3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3&6\\6&2\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-3\\1&6\end{vmatrix}\right]$

$=-6\times3+3\times(-42+45)$

$=-9$

下面来计算几种特殊的 n 阶行列式，其中未写出的元素都是0.

【例 1-4】 若仅在对角线上有非零元素的行列式称为对角行列式，试证对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad\begin{vmatrix}&&&\lambda_1\\&&\lambda_2&\\&\therefore&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证：第一式，反复按第一行展开即可得到．第二个行列式，注意降阶时，元素 λ_1，λ_2，…，λ_n在第 n，$n-1$，…，2，1 列，故有

$$\begin{vmatrix}&&&\lambda_1\\&&\lambda_2&\\&\therefore&&\\\lambda_n&&&\end{vmatrix}=\lambda_1\ (-1)^{1+n}\begin{vmatrix}&&\lambda_2\\&\lambda_3&\\\therefore&&\\\lambda_n&&\end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1\ (-1)^{1+n}\lambda_2\ (-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix}&&\lambda_3\\&\lambda_4&\\\therefore&&\\\lambda_n&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot\cdots\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

【例 1-5】 称主对角线以上（下）的元素都为0 的行列式为下（上）三角行列式，试证下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证：按 n 阶行列式的定义，依次降低其阶数，每次都仅有一项不为0，故有

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}(-1)^{1+1}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.1.3 行列式的性质

若按照行列式的定义直接计算行列式，当阶数较高时，计算较为麻烦．为了简化运算，我们需要了解行列式的性质．在讨论行列式的性质时，有必要先认识一下转置行列式．

定义3 将行列式 D 的行与相应的列互换所得行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}.

若 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

行列式有以下性质：

性质1 行列式与它的转置行列式的值相等.

由此性质可知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

【例1-6】 计算上三角行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}$ 的值.

解： 由性质1得

$$D=D^{T}=\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

本题说明上三角行列式的值等于其主对角线所有元素的乘积，这个结论为计算行列式提供了一个重要思路.

由性质1我们可知：行列式按第一行展开的定义，也可写成按第一列展开的形式，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

性质2 互换行列式的任意两行（列），行列式的值变为原来的相反数.

推论1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值为零.

证： 因将行列式 D 中相同的两行（列）互换后，D 的值不变，而由性质2有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

这一性质称为**行列式按任意行（列）展开法则**. 利用这一法则，可比直接用定义更灵活地降低行列式的阶数，从而简化运算.

【例 1-7】 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & -5 & 3 & -1\\ 2 & -6 & 0 & -6\\ 4 & -2 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 0 & 3\end{vmatrix}$ 的值.

解： 观察到第三列只有一个非零元素，故按第三列展开，得

$$D=3\times\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -6 & -6\\ 4 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

推论 2 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

证： 将行列式 D 按第 j 行展开，有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}$$

若在上式中把第 j 行元素 a_{jk} 换成第 i 行元素 a_{ik} $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则有

$$\begin{array}{r}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

当 $i\neq j$ 时，上式左端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零，因而

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$

上述证法应用于列，可得：

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

由综合性质 3 及推论 2，得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases};\quad \text{或}\ \sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases}.$$

推论 3 行列式某一行（列）元素全为零，则此行列式等于零.

证： 由性质 3，按元素全为零的那行（列）展开，即得.

性质 4 行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数 k 等于用数 k 乘以该行列式.

推论 4 行列式中某一行（列）的所有元素的公因数可以提到行列式的外面.

性质 5 行列式中如果有两行（列）元素对应成比例，则此行列式为零.

性质 6 若行列式 D_1 中某一行（列）的元素是另两个行列式 D_2 与 D_3 对应行（列）的元素之和，且这三个行列式的其余元素均相同，则这个行列式 D_1 等于行列式 D_2 与 D_3 的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【例 1-8】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 427 & 327 \\ 5 & 543 & 443 \\ 7 & 721 & 621 \end{vmatrix}$ 的值.

解： 原式 $= \begin{vmatrix} 4 & 400+27 & 300+27 \\ 5 & 500+43 & 400+43 \\ 7 & 700+21 & 600+21 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 400 & 300+27 \\ 5 & 500 & 400+43 \\ 7 & 700 & 600+21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 300+27 \\ 5 & 43 & 400+43 \\ 7 & 21 & 600+21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 400 & 300 \\ 5 & 500 & 400 \\ 7 & 700 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 400 & 27 \\ 5 & 500 & 43 \\ 7 & 700 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 300 \\ 5 & 43 & 400 \\ 7 & 21 & 600 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 27 & 27 \\ 5 & 43 & 43 \\ 7 & 21 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \begin{vmatrix} 4 & 27 & 3 \\ 5 & 43 & 4 \\ 7 & 21 & 6 \end{vmatrix} = 5\,400$$

性质 7 把行列式某一行（列）的各元素乘以同一个数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j)$$

1.2 行列式的计算

上节我们学习了行列式的性质，下面我们来讨论行列式的计算问题.

1.2.1 行列式的初等变换

利用行列式的相关性质，我们可以得到三种行列式的初等变换：

(1) 行列式的初等互换变换. 即行列式的任意两行（列）互换，实施该变换之后所得行列式的值变为原行列式的相反数.

若用 r_i，r_j 分别表示行列式的第 i，j 行，用 c_i，c_j 分别表示第 i，j 列. 则行列式的第 i 行（列）与第 j 行（列）互换，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）.

（2）行列式的初等倍乘变换. 即行列式的某行（列）元素都乘以同一个实数 k，实施该变换之后所得行列式的值变为原行列式的 k 倍.

行列式的第 i 行（列）乘以 k，记作 kr_i（kc_i）.

（3）行列式的初等倍加变换. 即行列式的某行（列）元素都乘以同一个实数 k 加到另一行（列）的对应位置，实施该变换之后所得行列式的值与原行列式相同.

行列式第 i 行（列）乘以数 k 加到第 j 行（列），记作 $kr_i + r_j$（列为 $kc_i + c_j$）.

1.2.2 行列式的计算方法

计算行列式常用两种方法：三角法和降阶法.

三角法是利用行列式的初等变换，将行列式化为上（下）三角行列式，此时该行列式的值就等于所得上三角行列式的主对角线所有元素的乘积.

降阶法是利用行列式可以按任意行（列）展开的性质，选择合适的行（列），将高阶行列式展开成低阶行列式来计算.

【例 1-9】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 的值.

解： 方法 1（三角法）

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[-8r_2+r_4]{4r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{5}{4}r_3+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

方法 2（降阶法）

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[-8r_2+r_3]{4r_1+r_2} -\begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{2+1} \cdot 2\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix} = 2 \times (120 - 100) = 40$$

注： 使用降阶法有一个使计算更为简单的诀窍，那就是应选择零最多的那一行（列）展开，有时在展开之前还可以使用行列式的初等变换，使该行（列）出现尽可能多的零.