GONGKE SHUXUE JICHU

工科数学基础

褚蕾蕾　郭元春　李彩虹　陈思源◎主编

陈绥阳◎主审

清华大学出版社

工科数学基础

褚蕾蕾　郭元春　李彩虹
陈思源　陈绥阳　主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了高等数学的基本概念、思想和方法，主要包括极限、连续函数、一元微积分和二元微积分，以及常微分方程的初步知识，并采用 MATLAB 仿真软件作为数学机械化的支持工具，介绍了所述高等数学内容的机械化求解方法，书中提供了大量的 MATLAB 程序代码与上机实验参考题。

本书可以作为应用型普通高等院校工科专业的本科教学用书和教学参考用书，也可供高职高专相关专业的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

工科数学基础/褚蕾蕾等主编．—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-44653-8

I. ①工…　II. ①褚…　III. ①高等数学-高等学校-教材　IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 179977 号

责任编辑： 苏明芳
封面设计： 刘　超
版式设计： 刘艳庆
责任校对： 赵丽杰
责任印制： 何　芊

出版发行： 清华大学出版社
　　网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
　　社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
　　投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课 件 下 载： http://www.tup.com.cn，010-62788903
印 装 者： 北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×230mm　　**印　　张：** 19.75　　**字　　数：** 408 千字
版　　次： 2016 年 9 月第 1 版　　**印　　次：** 2016 年 9 月第 1 次印刷
印　　数： 1～2500
定　　价： 39.80 元

产品编号：062423-01

前　　言

《工科数学基础》是适用于应用型普通高等院校工科专业的教学用书。

本书所介绍的高等数学内容，主要包括连续函数、一元和二元微积分、常微分方程求解的基本概念、思想与机械化方法，其目的是为后续专业课程的学习提供必要的数学基础与现代技术方法支持。本书内容选择是根据高素质应用型技能/技术人才的培养目标，按专业教学计划中高等数学基础课内容体系的结构要求而定，体现以应用为主的原则，兼顾知识点、思想性、技术性的要求。

17 世纪微积分诞生，渐渐发展成以基础理论导向的数学分析和以工程应用导向的高等数学，这在精英式的普通高等教育中起着坚如磐石的基础与导向作用。在 20 世纪后半叶，随着计算机科学与技术的发展，尤其是数学机械化理论与方法的渐渐成熟，从根本上改变了高等数学中符号计算依赖经验法则与手工劳动的状态。21 世纪以来，由于我国高等教育进入大众化教育阶段，入学率大幅提高，更从另一视角呼唤高等数学的教学改革，一方面是高等数学需要适应应用型普通高等教育的发展需要，另一方面是高等数学的体系与方法需要与现代信息技术相结合。同时，在高等数学的教材教法中，首先要厘清其概念、思路与方法，而不宜过度地以定理为核心来组织知识体系。

应当看到，从方法论的层面上看高等数学的珍贵价值，一是在用概念描述同一类现象的数学本质时提供了无穷小分析方法；二是从中学阶段以欧几里得平面几何为代表的亚里士多德命题逻辑，上升到含量词的一阶谓词演算，即进入数理逻辑的范畴；三是视函数为空间中的一个点而将其在一个无穷维基底上展开，即从高等代数的有限维空间进入无穷维空间。正是这些深邃的数学思想，展现了许多数学家的心路历程和智慧之光，也指导着本书的架构和编写。

采用数学模型，可以丰富高等数学的内容，但由于学时的限制，讨论数学模型又可能涉及过多的背景知识，使得采用数学建模的方法来讲述高等数学有较多困难。因而，近 10 年来，有不少作者探讨在高等数学教材中引入计算机工具和实验教学的方法。这就在教学方法中产生一个问题，像高等数学这样有严谨理论体系的课程，能否引入基于认知心理学建构主义的教学方法，从而，学习高等数学中面向任务的计算技术，以帮助学生建立自己对高等数学的认知，而不仅仅作为定理、法则的应用和练习。

本书的特色是将所涉及的数学内容架构在数学机械化的基础之上，为此专门设立第 1 章来说明这一问题。数学机械化是数学与计算机技术相结合的交叉性学科。近 50 年来，随着计算机科学与技术的发展，数学机械化在计算数学与符号计算两大领域有了长足的发展。我国在其中的一些分支上已达到国际先进水平。同时，在国际上已有许多运用相当成

熟的数学软件系统和工程仿真系统，为数学教学走机械化的道路提供了先进的工具。

数学机械化是不同于数学公理化的另一类数学体系。它不是从公理出发，利用初始的概念演绎出以定理形式表达的结论，而是面向实际问题，构建模型、研究算法并通过机械求解而得出结论。这更具有构造性、能行性、可执行性等工程范畴上的特征。因此，学生在学习中不再困于符号的手工推演，而是在概念清晰的基础上学习机械求解的方法。只需要掌握概念和方法，而把解算交给机器，这对工程应用型人才而言是很重要的。

数学教学必须现代化。公理化的道路在现代数学领域内已经获得巨大的成功，但期望人人具有公理化的素养却不一定能够实现。也许在工程与应用领域内，数学机械化是数学教学现代化的一条现实途径。

本书选用 MATLAB 仿真软件作为数学机械化的支持工具。MATLAB 既支持数值计算，又支持符号演算。同时，MATLAB 软件的多种工具箱还支持若干工科专业方向的专业教学和研究仿真。教学实践证明，在大学一年级第一学期计算机文化课中添加 MATLAB 软件使用知识，同时使用本书是可以为学生所接受的。

本书共分 8 章。第 1 章介绍数学机械化的方法、语言（MATLAB）和数学函数的可视化。第 2 章介绍极限、一元连续函数、连续函数的性质及其在算法描述中的应用。第 3 章介绍导数与微分的概念和计算方法、微分中值定理，以及导数在函数形态讨论中的应用。第 4 章介绍定积分、不定积分、广义积分的概念及计算方法与应用。第 5 章介绍数项级数、幂级数、Taylor 级数、Fourier 级数，以及积分变换。第 6 章介绍二元函数、二元函数的图像、连续性与二元连续函数的性质。第 7 章介绍二元函数微分的概念、偏导数的计算和应用，以及二重积分与曲线积分的概念、计算及其在几何计算上的应用。第 8 章介绍常微分方程的概念、初等积分法和线性微分方程，以及基于微分方程的数学模型。

本书在进行六年教学实践、四年教学改革的基础上写成，四易其稿，在基本内容选择上有“电子信息工程数学基础”和“工科高等数学基础”两个版本；在工具选择上分别尝试基于 MATLAB 和 Mathematica 两个版本；在体系架构上曾试探两种写作模式，一是高等数学基本内容、数学建模、程序实现相结合，二是高等数学基本内容与数学机械化相结合，经过多年的教学实践和使用而形成本书这个版本。在教学过程中，也尝试在局部使用基于建构主义的教学法、面向任务的过程式教学法，均有一定成效，而能贯穿全书的还是基于 MATLAB 的数学机械化方法。

全书由褚蕾蕾、郭元春、李彩虹、陈思源主编，褚蕾蕾统稿，陈绥阳主审。对西安交通大学教师陈绥阳、西安工业大学教师马元生等人的参与及推动也一并表示感谢。

在数学教学现代化的道路上，采用数学机械化的技术路线，本书也仅是开始，还缺乏足够的理论指导和丰富的经验支持。囿于编者的知识水平，本书错误与不足在所难免，敬请读者斧正。

编　者

目　　录

第 1 章　数学机械化

数学机械化，是利用数学工具的必由之路，也是应用性数学教学的价值取向。

1.1　高等数学的机械化方法

用一个固定的算法程式去解决一类问题，是数学机械化的基本思想。数学机械化不是一个新概念，它作为一种思维模式、一种数学体系、一种成果表达方式，存在于古今，并一直在发展、创新，迸发出耀眼的光辉。

1.1.1　高等数学的研究对象

1876—1877 年间，恩格斯为莱比锡《前进报》撰稿，谈到数学概念的产生时曾讲："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。"

函数，即一个实数集对应到另一个实数集的数量关系。在一个平面直角坐标系中，当自变量在横轴上连续运动时，因变量作为自变量的函数是否也能不间断地运动呢？这就产生连续函数的概念。连续函数是高等数学的研究对象。

作为现实的材料，例如，一根非均匀的直杆，要求其某一点的密度，或者一个质点在一条直线上做变速运动，要求某一位置的瞬时速度，这就产生微分的概念；反之，要求密度非均匀直杆的重量，或者质点做直线变速运动时在某一时段内运行的距离，这就产生积分的概念，而极限运算是讨论连续、微分、积分的基础。

所以，极限、连续、微分、积分是高等数学的基本概念。

1669 年，英国数学家牛顿写出了关于微积分的第一篇论文——《运用无限多项方程的分析》。1684 年，德国数学家莱布尼茨在莱比锡发表了第一篇关于微积分算法的 6 页短文——《关于求极大极小及切线问题的新方法，对有理量及无理量均可通用，且对这类运算特别适用者》。自此，发祥于微积分的分析学科正式诞生，一百多年（近两百年）后，清朝数学家李善兰将其介绍到中国。由于在工程上有广泛的应用，高等数学在世界各国成了理工类专业的必修课程，甚至成了逻辑思维的训练工具。

1.1.2 数学的机械化方法

中国古代对数与图形的研究走了一条面向问题、模型化、算法化、机械化的道路，其典型代表是《九章算术》。

吴文俊教授曾指出："以《九章算术》为代表的中国古代传统数学，与以欧几里得《几何原本》为代表的西方数学，代表着两种不同的体系，其思想与方法各呈特色。前者着重应用与计算，其成果往往以算法的形式表达，后者着重概念与推理，其成果一般以定理的形式表达。前者的思维方式是构造性与机械化的，而后者则往往侧重于存在唯一以及概念之间相互关系等非构造性的逻辑思维。前者由于其机械化的思维方式与算法形式的具体成果，从思想上与方法上正好切合于计算机出现后的时代要求。"[①]

数学问题大体上可以分为两类，一类是计算题，另一类是证明题，即求解与求证。能不能将许多几何命题的证明分门别类，变成有章可循的计算工作呢？

这个愿望由来已久。17 世纪，法国数学家笛卡儿（R.Descartes）在其名著《方法论》中提出一个设想，其意思是将一切问题化为数学问题，一切数学问题化为代数问题，一切代数问题化为代数方程求解问题。

20 世纪初，德国数学家希尔伯特（D.Hilbert）提出了公理系统中的判定问题，即是否存在一种机械的方法（算法），对一个公理系统中的每个命题加以检验，判明它成立与否。因此，检验就是证明。然而，对这个问题的回答是否定的。

电子数字计算机的产生与发展为数学机械化提供了现代化的工具，这推动了数值计算与符号计算的快速发展。前者属于计算数学及其应用领域，计算结果是近似的、有误差的，后者属于人工智能的领域，其运算与推演是形式的，也是精确的、没有误差的。

符号计算作为数学与计算机科学的一门交叉学科，肇始于 20 世纪 60 年代。

1958—1960 年，著名数理逻辑学家和计算机科学家王浩设计了三个程序，用计算机证明了罗素（B.A.W.Russell）和怀特海特（A.N.Whitehead）的名著《数学原理》中几百条有关命题和一阶逻辑的定理。他明确提出了"走向数学机械化"的口号。

1976 年底，我国数学家吴文俊在中国古代数学机械化与代数化思想的影响下[②]，写出了现称为"吴方法"的奠基性论文——《初等几何判定问题与机械化证明》。随后，国际上也有一些重要的研究问世。至此，经过三百多年的努力，建立了初等几何证明机械化的完整体系。

本书试图用数学机械化的方法，主要是函数可视化的方法和符号计算的方法进行教与学。

---

① 中外数学简史编写组. 中国数学简史[M]. 济南：山东教育出版社，1986.

② 吴文俊. 中国科学，Vol 20：507-516，1977.

1.1.3　数学机械化的算法特征

1. 模型化方法

在数理逻辑上，模型被严格定义为满足一组非逻辑公理的代数结构，但在应用上，徐利治教授通俗地指出："数学模型乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构。"[①]这种从实际问题出发的模型化方法，可用图 1-1 表示。

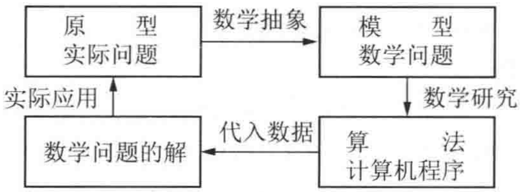

图 1-1　数学问题的模型化思想

这种模型化方法的基本特点是构造性的和可计算求解的。从本质上讲，计算机是一个符号处理系统。因而，数值计算与符号计算的共同点是代数的，或者说是离散的，面对的模型是结构化的。

2. 算法的构造性

算法的基本特征有两点：算法由若干确定的可执行的步骤组成，并在有限步与有限时间内执行完毕。

下面考虑一个连续函数的零点问题。

设连续函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上定义，有 $f(a)<0$，$f(b)>0$，即 $f(a)f(b)<0$，如图 1-2 所示。方程 $f(x)=0$ 的根 x，称为函数 $f(x)$的零点，即函数 $f(x)$与 x 轴的交点。

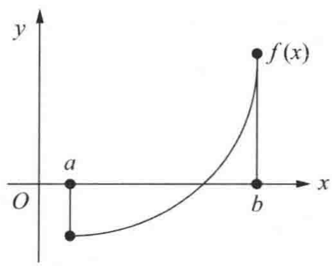

图 1-2　函数的零点

① 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉：华中工学院出版社，1983.

这里，可以提出两个问题，一是证明$f(x)$在区间$[a, b]$上至少存在一个零点，二是求出该零点。作为存在性证明，可以采取下面的方法。

记区间$[a, b]$为I_0。取区间I_0的中点a_1，如果$f(a_1)f(b)<0$，则取区间$[a_1, b]$为I_1，否则取$[a, a_1]$为I_1。这时区间I_1包含在区间I_0内，记为$I_0 \supset I_1$，且长度为I_0的一半。按此方法无穷地取下去，得到一串长度一半一半减小的区间。

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

利用极限的理论可以证明零点的存在性，但这种证明方法不是计算机可执行的构造性算法。下面的例子中，根据该方法的思想，设计出了相应的算法。

例 1.1 已知$f(a)f(b)<0$，用二分法求函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的零点。

解 现给出二分法的算法。

step1 记$a_0=a$，$b_0=b$，并给出一个充分小的正数ε。

step2 如果区间$[a_n, b_n]$已知，且$f(a_n)f(b_n)<0$，则置$a_{n+1}=(a_n+b_n)/2$。

如果$f(a_{n+1})f(b_n)<0$，则$b_{n+1}=b_n$；否则置$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=(a_n+b_n)/2$。

step3 重复 step2，直至$b_{n+1}-a_{n+1}<\varepsilon$。这时取$c=(a_{n+1}+b_{n+1})/2$。

step4 输出c，end。 ■

这时将c作为零点的近似值，且误差不会超过ε。

其中，“置$a_{n+1}=a_n$”，表示置a_{n+1}为a_n，或读作“将a_{n+1}赋值为a_n”，式“$b_{n+1}=b_n$”表示“置$b_{n+1}=b_n$”。在算法描述中，符号“=”表示赋值，而不是数学意义下的等号，但这一意义仅限于算法描述。

3. 算法的复杂性

算法结构与计算机程序结构有密切的联系。和计算机程序结构类似，基本的算法结构有顺序结构、选择结构、循环结构和递归结构。

在下例中，算法结构的作用，一是描述逻辑关系，二是追求计算的效率。

例 1.2 求多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$在$x$点处的值。

解 利用 MATLAB 软件，求解这一问题是很简单的。下面给出的算法是秦九韶算法。首先，有表达式

$$\begin{aligned}f(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\\&=(a_nx+a_{n-1})x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\\&=((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\\&\cdots\\&=(\cdots(((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\cdots+a_1)x+a_0\end{aligned}$$

有如下秦九韶算法的计算序列

$$
\begin{aligned}
&A_0=a_n\\
&A_1=A_0\,x+a_{n-1}\\
&A_2=A_1\,x+a_{n-2}\\
&\cdots\\
&f(x)=A_n=A_{n-1}\,x+a_0
\end{aligned}
$$

■

该算法只需做 n 次乘法，而如果用 $f(x)$进行计算，则要做 $n(n-1)/2$ 次。可见，秦九韶算法的复杂度较低，而效率较高。

4. 算法的实现

例 1.1 和例 1.2 运用的是数学算法，但不是计算机程序算法，因为它没有解决数据在计算机内部的存储问题。从逻辑上描述存储问题，叫作数据结构。

这里称 x 是一个存储单元，或是一个变量，是给出了这个存储单元的地址，这个地址的名字叫“x”，就像房间号一样，而存储单元就是房间，如图 1-3 所示。

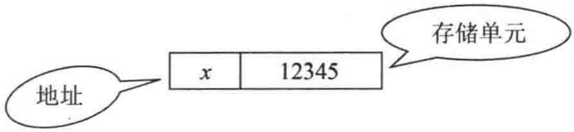

图 1-3　存储单元与地址

x=12345，是指在房间号（地址）为“x”的房间（单元）里存放的数值是“12345”。于是

$$x=a$$

是说把数值 a 赋值于地址为 x 的存储单元，简称把 a 赋值于 x。这时，单元 x 的值为 a。于是

$$x=x+b$$

是说把 x 中的值（这时是 a）取出来与数值 b 相加后，再存放回 x 中，于是 x 中的当前值是 $a+b$。这时，$a+b$ 将覆盖掉原来存放的值 a。

这样，例 1.1 的算法可以写为：

step1　$x=a$，$y=b$，并给出一个充分小的正数 ε；

step2　如果区间$[x, y]$已知，且 $f(x)f(y)<0$，则 $c=(x+y)/2$。如果 $f(c)f(y)<0$，则 $x=c$，否则 $y=c$；

step3　重复 step2，直至 $y-x<\varepsilon$；

step4　输出 c，end。

■

有了这样一个程序算法，就便于写计算机程序了。由此可见，数学算法是不描述存储结构的，因而，计算机程序的编制有一个从数学算法到数据结构，再从数据结构到程序算法的过程。

同样，例 1.2 的秦九韶算法可以描述如下：

step1 给出初始条件 $x=a$，$A_0=a_n$;

step2 for (k=1; $k<n+1$; $k++$) $A_k=A_{k-1}x+a_{n-k}$;

step3 输出 A_n，end。

输出的 A_n 即为 $f(a)$。 ■

其中，for 语句是循环语句，表示 k 从 1 开始，作 $A_1=A_0x+a_0$，然后作 $k++$，即 k 增加 1，只要 $k<n+1$，就作 $A_k=A_{k-1}x+a_{n-k}$。

1.2 数学机械化的语言——MATLAB

计算机代数系统，也称数学软件包。目前，广泛使用的通用数学软件包主要有 MATLAB、Mathematica、Maple 等[①]，它们都支持符号计算。本章将对 MATLAB 及其数学应用（主要是符号计算）进行简单介绍。

1.2.1 MATLAB 基础知识

MATLAB 的名称源自 Matrix Laboratory，其首创者是在数值线性代数领域颇有影响的 Cleve Moler 博士，他也是生产经营 MATLAB 产品的美国 MathWorks 公司的创始人之一。MATLAB 是一种科学计算软件，专门以矩阵的形式处理数据。MATLAB 将高性能的数值计算和可视化集成在一起，并提供了大量的内置函数，被广泛地应用于科学计算、控制系统、信息处理等领域的分析、仿真和设计工作中。利用 MATLAB 产品的开放式结构，用户可以非常容易地对 MATLAB 的功能进行扩充，从而在不断深化对问题的认识的同时，逐步完善 MATLAB 产品以提高产品自身的功能。

1. MATLAB 的安装和启动

MATLAB 软件的安装与一般的 Windows 软件一样，当计算机的软硬件均达到 MATLAB 的安装要求后，只需将 MATLAB 的安装光盘放入光驱，安装程序将会自动提示安装步骤，按所给提示做出选择，便能顺利完成安装。

[①] 关于 MATLAB 的 MathWorks 公司的网址是 http://www.mathworks.com，关于 Mathematica 的网址是 http://www.wolfram.com/products/ mathematica，关于 Maple 的网址是 http://www.maplesoft.com。