主编 王娴 鲍俊艳 谷银山

CALCULUS TUTORIALS

微积分学教程

（下）

高等教育出版社

微积分学教程（下）

CALCULUS TUTORIALS

主编　王娴 鲍俊艳 谷银山
副主编　刘红 张玉芬 赵文胜 周厚春

高等教育出版社·北京

内容简介

本教材共 11 章，分上、下两册。上册内容包括预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数应用和不定积分；下册内容包括定积分、多元函数微积分学、级数、常微分方程和差分方程。全书系统介绍了微积分学的基本概念、基本理论和基本方法。教材结构顺序合理、讲解透彻易懂，设置同步训练和问题研讨，同时配备不同层次的习题供学生练习，注重知识关联与综合能力的提高。

本书可作为高等学校经济管理类专业的微积分教材，也可作为相关工作人员的参考书。

微积分学教程 Calculus Tutorials

WEIJIFENXUE JIAOCHENG

图书在版编目(C I P)数据

微积分学教程.下 / 王娴，鲍俊艳，谷银山主编.
-- 北京：高等教育出版社，2016.9
ISBN 978-7-04-045535-9
Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… ②鲍… ③谷… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 107822 号

策划编辑 高 丛
责任编辑 高 丛
封面设计 张申申
版式设计 张申申
插图绘制 杜晓丹
责任校对 吕红颖
责任印制 朱学忠
出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京信彩瑞禾印刷厂
开 本 850mm × 1168mm 1/16
印 张 17.25
字 数 280 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2016 年 9 月第 1 版
印 次 2016 年 9 月第 1 次印刷
定 价 35.80元

Gottfried Wilhelm Leibniz

1646 — 1716

Sir Isaac Newton

1643 — 1727

目 录
Contents

第六章　定积分 · 001

§6.1　定积分的概念 · 002
　　一、两个经典实例 · 002
　　二、定积分的定义 · 004
　　三、定积分的几何意义 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 005
§6.2　定积分的基本性质 · 007
§6.3　微积分基本定理 · 011
　　一、积分上限函数 · 011
　　二、微积分基本公式 · 014
§6.4　定积分的计算方法 · 016
　　一、定积分的换元积分法 · · · · · · · · · · · · · · · · · 016
　　二、定积分的分部积分法 · · · · · · · · · · · · · · · · · 019
§6.5　定积分的应用 · 022
　　一、定积分与微分的关系及微元法 · · · · · · · · · · · 022
　　二、平面图形的面积 · 024
　　三、立体的体积 · 027
　　四、经济应用举例 · 029
§6.6　反常积分初步 · 031
　　一、无穷限反常积分 · 031
　　二、瑕积分 · 033
　　三、Γ 函数 · 037
*§6.7　综合与提高 · 038
　　一、与定积分的定义和性质有关的问题 · · · · · · · · 038
　　二、关于积分上限函数的问题 · · · · · · · · · · · · · · 040
　　三、与定积分有关的证明题 · · · · · · · · · · · · · · · 041

习题六 043

第七章　多元函数微积分学 055

§7.1 空间解析几何简介 056
一、空间直角坐标系 056
二、空间中两点间的距离 057
三、空间曲面与方程 057
§7.2 多元函数及其极限 061
一、平面区域的概念 061
二、二元函数的概念 062
三、二元函数的极限 064
四、二元函数的连续性 066
§7.3 偏导数与全微分 067
一、变量的偏改变量 067
二、偏导数 068
三、偏导数的几何意义 073
四、偏导数的经济应用 073
五、高阶偏导数 075
六、全微分 076
§7.4 复合函数与隐函数微分法 079
一、多元复合函数微分法 079
二、隐函数微分法 083
§7.5 二元函数的极值与最值 087
一、二元函数的极值 087
二、条件极值和拉格朗日乘数法 090
三、二元函数的最值 092
§7.6 二重积分 094
一、二重积分的概念 094
二、二重积分的性质 097
三、直角坐标系下二重积分的计算 098
四、极坐标系下二重积分的计算 109
五、积分区域无界的反常二重积分 113
*§7.7 综合与提高 114
一、最小二乘法 114
二、多元函数的导数举例 116
三、二重积分举例 119

习题七 …… 124

第八章 级数 …… 135

§8.1 常数项级数的概念和性质 …… 136
一、级数的概念 …… 136
二、级数的基本性质 …… 138
§8.2 常数项级数的审敛法 …… 140
一、正项级数及其审敛法 …… 140
二、交错级数及其审敛法 …… 146
三、绝对收敛与条件收敛 …… 148
§8.3 幂级数 …… 150
一、函数项级数的概念 …… 150
二、幂级数及其收敛域 …… 150
三、幂级数的代数和运算 …… 155
四、幂级数的和函数 …… 156
§8.4 函数展开成幂级数 …… 158
一、函数展开成幂级数的条件 …… 158
二、函数展开成幂级数的方法 …… 162
*§8.5 综合与提高 …… 167
一、常数项级数敛散性的判别 …… 167
二、幂级数收敛域及和函数的求法 …… 169
三、函数的幂级数展开及应用 …… 172
习题八 …… 175

第九章 常微分方程 …… 187

§9.1 微分方程的基本概念 …… 188
一、引例 …… 188
二、基本概念 …… 189
§9.2 一阶微分方程 …… 191
一、可分离变量方程 …… 192
二、齐次微分方程 …… 193
三、一阶线性微分方程 …… 195
§9.3 二阶微分方程 …… 198
一、可降阶的二阶微分方程 …… 198

二、二阶线性微分方程解的结构 …… 201
三、二阶常系数线性齐次微分方程 …… 203
四、二阶常系数线性非齐次微分方程的解 …… 206
*§9.4 **高阶微分方程** …… 211
一、线性方程解的结构定理 …… 212
二、n阶常系数齐次微分方程 …… 213
三、n阶常系数非齐次微分方程 …… 215
*§9.5 **综合与提高** …… 217
一、化积分方程为微分方程的求解问题 …… 217
二、二阶常系数线性非齐次微分方程求解问题 …… 218
三、有几何背景的微分方程问题 …… 221
四、伯努利方程 …… 222
习题九 …… 225

第十章 差分方程 …… 235

§10.1 **差分方程的基本概念** …… 236
一、差分 …… 236
二、差分方程 …… 237
三、差分方程的解 …… 238
§10.2 **线性差分方程及其解的结构** …… 239
一、线性差分方程 …… 239
二、线性差分方程解的基本定理 …… 240
§10.3 **一阶常系数线性差分方程** …… 242
一、齐次差分方程的通解 …… 242
二、非齐次差分方程的特解与通解 …… 243
§10.4 **二阶常系数线性差分方程** …… 247
一、齐次差分方程的通解 …… 247
二、非齐次差分方程的通解 …… 250
§10.5 **差分方程的应用举例** …… 252
*§10.6 **综合与提高** …… 254
一、高阶常系数线性差分方程 …… 254
二、非线性差分方程 …… 255
习题十 …… 257

参考文献 …… 263

6 第六章 定积分
Chapter 6

重点难点提示：

知识点	重点	难点	要求
定积分的概念	•		理解
定积分的几何意义	•		理解
定积分的基本性质	•		掌握
定积分的基本积分法	•		掌握
定积分的换元积分法和分部积分法	•	•	掌握
定积分的应用	•	•	掌握
反常积分		•	了解

数学中的定积分，让我们充分理解了积少成多的含义．一点一滴的知识积累，可以使我们学识渊博，小成绩的积累，可以让我们取得大成就……因此，它给我们的人生以启迪，给我们的行动以指导．可以设想如下取得成就的逻辑思路：

首先做好规划（确立目标），其次进行微分（做好细节），最后进行积分（实现目标）．

前一章学习了导数的逆运算——不定积分，本章我们要讨论定积分．看到这两个名称，大家不禁要问：不定积分和定积分有什么关系？其定义和运算方式有什么不同？定积分有什么特点和性质？定积分可以解决哪些问题？让我们带着这些问题进入本章的学习．

§6.1 定积分的概念

一、两个经典实例

下面从两个经典的实例出发，看看定积分定义的由来和形式．

例 1　求曲边梯形(trapezoid with curve side)的面积 S.

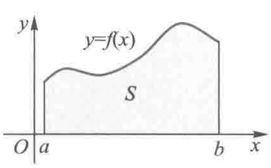

图 6-1 曲边梯形的面积

曲边梯形是由非负连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形，如图 6-1 所示.

分析　在初等数学中，我们利用公式计算过矩形、梯形等规则平面图形的面积，而一些不规则的平面图形的面积就没有计算公式了．由图 6-1 不难看出，曲边梯形和规则的梯形是不同的，所以不能用梯形的面积公式来计算它的面积，必须另寻方法．不过，我们看到 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，因此，考虑把区间 $[a,b]$ 划分成许多小区间，在很小的一段区间上 $f(x)$ 变化不大．在每个小区间上任选一点处的高来近似代替这个小区间所对应的小曲边梯形的高，这样，小曲边梯形面积就可以用小矩形面积来近似代替，如图 6-2 所示．然后把所有的小矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值．当区间 $[a,b]$ 无限细分，即每个小区间的长度都趋于零时，这个近似值的极限就是曲边梯形的面积．下面我们按这样的思路，来得到所求的面积.

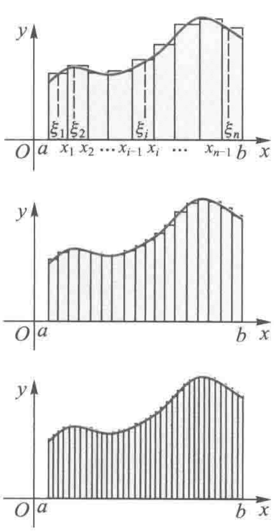

图 6-2 划分越细密小矩形面积之和越接近曲边梯形面积

解　第一步：划分

在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$，我们也将这个过程称为对区间 $[a,b]$ 的一个**划分**(partition)．这些小区间的长度分别记为

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$；

第二步：近似替代

在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意取一点 ξ_i，将以 $f(\xi_i)$ 为高，Δx_i 为宽的矩形面积近似看作第 i 个小曲边梯形的面积，记第 i 个小曲边梯形的面积为 ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$；

第三步：求和

曲边梯形的面积 S 等于各个小曲边梯形面积之和，将 n 个小矩形的面积求和就得到曲边梯形总面积的近似值，即

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i;$$

第四步:取极限

记 $\Delta x=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，当 $\Delta x\to 0$ 时，每一个 $\Delta x_i\to 0(i=1,2,\cdots,n)$，此时分点的个数 $n\to\infty$，若和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 的极限存在，则极限值就是曲边梯形的面积，即

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \tag{6.1}$$

□

例 2　求变速直线运动的路程 s.

设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间变量 t 的非负连续函数，求在时间段 $[A,B]$ 内该物体所经过的路程 s.

分析　虽然本例与例 1 是两个具有不同实际背景的问题，但是它们有某些内在的共同点．既然在解决例 1 时可以"以直代曲"，采用"先近似后精确"的策略解决问题，在本例中也可以考虑"以匀速代变速"的方法来解决.

解　第一步:划分

任意插入 $n-1$ 个分点 $A=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=B$，将 $[A,B]$ 划分成 n 个小时间段 $[t_0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$\cdots$，$[t_{n-1},t_n]$. 这些小时间段的长记为

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

第二步:近似替代

在 $[t_{i-1},t_i]$ 上任意取一个时刻 τ_i，将 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 作为时间段 $[t_{i-1},t_i]$ 上的平均速度，或者说将这个小时间段物体的运动看作速度为 $v(\tau_i)$ 的匀速运动．设在第 i 个小时间段内物体的路程为 Δs_i $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\cdot\Delta t_i;$$

第三步:求和

将 n 个小时间段上的近似路程求和，便得到总路程的近似值，即

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\cdot\Delta t_i;$$

第四步:取极限

记 $\Delta t=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，当 $\Delta t\to 0$ 时(此时必有每一个 $\Delta t_i\to 0$，且

分点的个数 $n\to\infty$)，若和式 $\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\cdot\Delta t_i$ 的极限存在,则极限值就是变速直线运动的路程,即

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\cdot\Delta t_i. \tag{6.2}$$

□

对比(6.1)式和(6.2)式,我们发现上述两个例子都将问题归结为求一个和式的极限.

其实,还有很多实际问题都可以用这种方法解决,其结果也都可归结为求和式极限的问题,例如,已知产品产量的速度函数 $q(t)$,求一个时间段内的总产量;已知细菌的繁殖速度 $b(t)$,求一个时间段内的细菌增长总量;求水库闸门在一定高度范围内受到的总压力,等等. 因此,数学家们将这类和式极限的实际背景去掉,抽象出定积分的概念.

二、定积分的定义

定义 6.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界,任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 把 $[a,b]$ 划分成 n 个小区间,每个小区间的长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$,作和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

设 $\Delta x=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$,如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 总存在,且极限值与 $[a,b]$ 的划分方法及点 ξ_i 的取法无关,则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积**,并称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**(definite integral),记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i, \tag{6.3}$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**(integrand),$[a,b]$ 称为**积分区间**(interval of integration),a 称为**积分下限**(lower limit of integration),b 称为**积分上限**(upper limit of integration),x 称为**积分变量**(integral variable),和式 S_n 称为**积分和或黎曼和**(Riemann sum).

关于定积分的概念给出以下几点注意:

(1) 在定义中,当 $\Delta x\to 0$ 时,必有划分出的小区间个数 $n\to\infty$.

特别地，如果对区间做均匀划分(每个小区间长度相等)，则 $\Delta x\to 0$ 与 $n\to\infty$ 是等价的．但是，一般情况下由 $n\to\infty$ 不能得到 $\Delta x\to 0$.

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个**常数**，它仅与被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与 $[a,b]$ 的划分方法和点 ξ_i 的取法无关．

(3) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与积分变量用什么字母表示无关，即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

(4) 定义中明确要求被积函数在积分区间上有界，被积函数有界不一定可积(例如，有界但处处不连续的函数就是不可积的)，所以被积函数有界是可积的必要条件．另外，如果被积函数无界，则此时的积分属于反常积分(**知识预告**：本章§6.6 瑕积分).

那么，什么样的函数一定可积呢？有以下结论．

可积的充分条件：

① 闭区间上的连续函数是可积的；

② 闭区间上只有有限个间断点的有界函数是可积的．

(5) 在定积分定义及记号 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 中，实际上假定了 $a<b$，且从 a 到 b 插入分点后也限定了 $\Delta x_i>0$，而 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 则表示从 b 到 a 插入分点，则 $\Delta x_i<0$，故有

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6.4}$$

这表明，定积分的上限与下限互换时，定积分的值变号．

特别地，当 $a=b$ 时，有

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

三、定积分的几何意义

由例 1 及定积分的定义可知，如果连续函数 $f(x)\geqslant 0$，$a<b$，则函数 $y=f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上的定积分，就是由曲线 $f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S_1，如图 6-3(a)所示，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=S_1\quad (f(x)\geqslant 0).$$

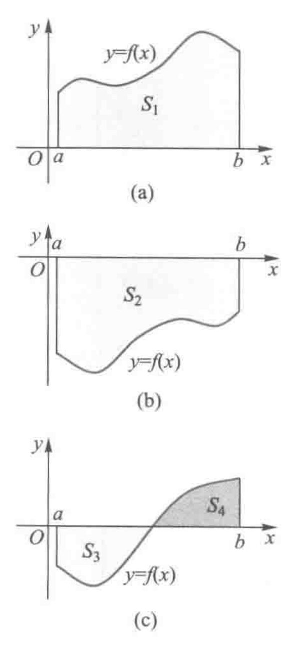

图 6-3 定积分的几何意义

这就是定积分的几何意义．它反映了在一定条件下，定积分与曲边梯形面积间的数量关系．

如果在区间$[a,b]$上，连续函数$f(x)\leqslant 0$，由定积分的定义容易知道，此时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，它其实就是由曲线$f(x)$，直线$x=a$，$x=b$及$x$轴所围成的曲边梯形的面积$S_2$的相反数，如图6-3(b)所示，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-S_2\quad (f(x)\leqslant 0).$$

若函数$f(x)$的取值是任意的，则函数$y=f(x)$在积分区间$[a,b]$上的定积分，是曲线$f(x)$与直线$x=a$，$x=b$，$y=0$，围成的x轴上方图形的面积与x轴下方图形的面积之差(如图6-3(c))，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=S_4-S_3.$$

由此定积分的几何意义及上述关系式可知，一方面可以利用定积分求得一个平面图形的面积，另一方面也可以利用面积求出定积分的值．请看下面的例子．

例3　利用定义求定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，并解释其几何意义．

分析　因函数$y=x^2$在$[0,1]$上连续，故可积．因此，不论对区间$[0,1]$分法及点ξ_i取法如何，都不影响定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$的值．为方便计算，不妨取$[0,1]$的一个特殊划分和特殊的点ξ_i进行计算．

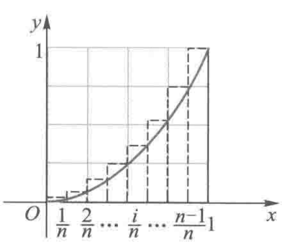

图6-4　例3的图形

解　将区间$[0,1]$ n等分，如图6-4所示，分点为$x_i=\frac{i}{n}$，则$\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，再取点$\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$，于是积分和为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}.$$

即有

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}S_n=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

其几何意义为：抛物线$y=x^2$与直线$x=0$，$x=1$及x轴所围成的图形的面积$S=\frac{1}{3}$．　□

例 4　利用定积分的几何意义求定积分 $\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$.

分析　本题中的被积函数

$$y=\sqrt{1-(x-1)^2},\ 即\ y^2+(x-1)^2=1\quad (y \geqslant 0),$$

其图像为某个单位圆的上半部分,如图 6-5 所示 . 容易计算这个半圆的面积,根据定积分的几何意义,这个面积值也就是该定积分的值 .

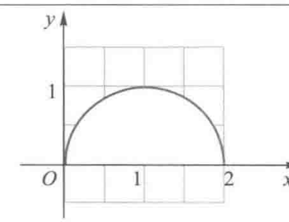

图 6-5 例 4 的图形

解　该定积分的被积函数为 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}\,(0 \leqslant x \leqslant 2)$, 所以这个定积分的值就是由曲线 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$, $x=0$, $x=2$ 及 x 轴所围成的图形的面积,而这个图形是个半圆,如图 6-5 所示,利用圆的面积公式知这个图形的面积为 $\frac{\pi}{2}$, 故有

$$\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$ □

同步训练

分别利用定积分的几何意义和定积分的定义两种方法求定积分 $\int_a^b 2x\,dx\ (0<a<b)$.

§ 6.2 定积分的基本性质

上节学习了定积分的定义,但是利用定义计算定积分的值太麻烦,为了寻求计算定积分的方法,我们来了解定积分的基本性质 . 假设下面涉及的函数均是可积的.

性质 1　$\int_a^b dx=b-a.$　　(6.5)

由定义可直接得出 . ■

性质 2(线性性质)　设 k_1, k_2 为常数,则有

$$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\,dx=k_1\int_a^b f(x)\,dx+k_2\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.6}$$

证明　由公式(6.3)和极限的性质,有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\,dx\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n [k_1 f(\xi_i)+k_2 g(\xi_i)]\cdot \Delta x_i\\
&=\lim_{\Delta x\to 0} k_1\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot \Delta x_i+\lim_{\Delta x\to 0} k_2\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\cdot \Delta x_i\\
&=k_1\int_a^b f(x)\,dx+k_2\int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}$$ ■

推论 1　一般地,设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数,则有

$$\int_a^b[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)]\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x+\cdots+k_n\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

推论 2　当 $k_1=1,k_2=\pm1$ 时,有

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 3　当 $k_2=0$ 时,可得

$$\int_a^b k_1f(x)\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3(定积分的可加性)　设 a,b,c 为不相同的常数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

证明　(1) 若 $a<c<b$,则由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积可知,积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

的极限存在(当 $\Delta x\to0$ 时),且此极限值与 $[a,b]$ 的划分方法无关.因此,在划分 $[a,b]$ 时,总取 c 为一个分点,S_n 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的积分和,T_{n_1} 和 U_{n_2} 分别为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的积分和,于是有

$$S_n=T_{n_1}+U_{n_2}.$$

Δx 为 $[a,b]$ 上小区间的最大宽度,故当 $\Delta x\to0$ 时,由极限性质和定积分定义可得

$$\lim_{\Delta x\to0}S_n=\lim_{\Delta x\to0}T_{n_1}+\lim_{\Delta x\to0}U_{n_2},$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $c<a<b$,则由(1)有

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

移项得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_c^a f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对于 $a<b<c$ 的情形,可与(2)类似地讨论. ■

思考与讨论　性质 3 可以用于哪些情况?

研讨结论____

____

性质 4(定积分的可比性)　当 $a<b$ 时,如果对任意 $x\in[a,b]$,恒有

$$f(x)\geqslant g(x),$$

那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

当且仅当 $f(x)\equiv g(x)$ 时,等号成立.

证明　因为 $f(x)\geqslant g(x)$,即 $f(x)-g(x)\geqslant 0$,由定积分性质 2 的推论、定义及极限的性质有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i\geqslant 0,\end{aligned}$$

移项即得结论. ■

推论 1(定积分的保号性)　设在 $[a,b]$ 上总有 $f(x)\geqslant 0$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0\quad(a<b),$$

当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时,等号成立.

证明　性质 4 中取 $g(x)=0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$. ■

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\ (a<b)$.

注意到 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$,请读者自行证明推论 2. ■

性质 5(定积分的可估性)　设 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别为 m 和 M, 则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).\tag{6.9}$$

证明　因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,由性质 4,性质 2 的推论 3 和性质 1 可证. ■

性质 6(定积分中值定理)　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).\tag{6.10}$$

证明　因 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取得最大值 M 和最小值 m. 于是,由性质 5 有