PPT

内置二维码，链接更多资源

（详见前言）

"十二五"江苏省高等学校重点教材

普通高等教育经济管理类专业精品教材

运筹学

OPERATIONS RESEARCH

南京大学　周晶◎主编

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

“十二五”江苏省高等学校重点教材

普通高等教育经济管理类专业精品教材

运筹学

OPERATIONS RESEARCH

主　编　周晶

副主编　徐薇

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

本书着重介绍运筹学的主要分支，包括线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络、决策论、博弈论、排队论、存储论等。本书在选材上详略得当，重点突出，对专业词汇给出中英文对照；注重内容阐述的启发性和新颖性，对经典方法的讲解由浅入深，适当增加了运筹学的最新研究理论和方法，拓展读者的视野；强调理论阐述的严密性，给出必要的算法思路和逻辑推演过程；引入了具有时代性的应用案例分析；介绍了如何用 Excel 来求解模型，增强了本书的实用性。

本书适合作为普通高等院校相关专业开设“运筹学”课程的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/周晶主编. —北京：机械工业出版社，2016.6

普通高等教育经济管理类专业精品教材 “十二五”江苏省高等学校重点教材

ISBN 978-7-111-54158-5

Ⅰ.①运… Ⅱ.①周… Ⅲ.①运筹学－高等学校－教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 150626 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：易 敏 责任编辑：易 敏 陈崇昱 李 乐
责任校对：陈 越 封面设计：鞠 杨
责任印制：李 洋
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2016 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
185mm×260mm · 23.5 印张 · 561 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-54158-5
定价：52.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

二维码使用说明

为了加强学习效果，本书在正文重点和难点处链接了书本外资料，主要是书中实例的 Excel 求解过程，以及扩展例题、公式推导等。本书使用者只需用智能手机联网扫描相关处出现的二维码，即可获得以上资源。

前　言

朴素的运筹思想古已有之，在我国古代文献中有许多记载。如战国时期流传后世的赛马比赛——田忌赛马，就是一个经典的博弈案例。田忌赛马的故事说明事前的筹划安排是十分重要的。在已有的条件下，经过精心筹划、安排，选择一个好的方案，就会取得满意的效果。敌我双方交战，要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上，研究制定最佳的对付敌人的策略和战术，这就是所谓的“运筹帷幄之中，决胜千里之外”。

运筹学这个名词最早出现于1938年，当时的英国为了研究整个防空作战系统的合理运行，以便有效地防备德国飞机入侵，成立了由来自物理、数学等不同学科领域的科学家组成的研究小组，他们的研究工作在有效打击敌人和减少盟军的损失方面发挥了重要作用。他们在一份研究报告中首次使用了 Operation Reseach 一词。第二次世界大战结束后，运筹学研究的重点转向民用领域，并获得成功。1947年，美国数学家 G. B. Dantzig 提出了求解线性规划模型的有效方法——单纯形法，并于20世纪50年代初应用电子计算机求解线性规划问题获得成功。到20世纪50年代末，学者们对企业中的一些普遍性优化问题，如库存、资源分配、设备更新、任务分派等问题进行研究，并成功地应用到建筑、纺织、钢铁、煤炭、石油、电力、农业等诸多行业。20世纪60年代，运筹学方法又广泛应用到了服务性行业和社会公共事业。

运筹学一词在英国称为 Operational Research，在美国称为 Operations Research，缩写为 O. R. 。《大英百科全书》中阐明：“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学，运筹学为掌握这类系统的人提供决策目标和数量分析工具”。

运筹学最早主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题。随着时代的进步和科学技术的发展，运筹学的应用更为广泛，而且解决问题的规模也越来越大、越来越复杂。现实中的优化问题虽然千差万别，但用运筹学来分析和处理问题时，一般都遵循以下几个工作步骤：确定目标、制订方案、建立模型、提出解法。不同类型的问题可归结为多类不同的数学模型，从而形成了不同的运筹学学科分支，如数学规划（包含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划等）、图论与网络流、决策论、对策论、排队论、存储论，等等。

数学规划的研究对象是最为一般的优化问题，即在给定的限制条件下，按某一衡量指标来寻找最优方案。它可以表示为求函数在满足约束条件下的极大或极小值问题。数学规划中最简单的一种问题就是线性规划。线性规划及其单纯形法对运筹学的发展起到了重大的推动作用。许多实际问题都可以转化成线性规划来解决，单纯形法是解决线性规划的一个行之有效的算法，而计算机技术的发展，使一些大型复杂的实际优化问题的解决成为现实。

图论是一种用直观的图形来表述和解决一类优化问题的运筹学分支。最小支撑树、最短路、最大流等问题是图论中经典的最优化问题。一些不具有图形特征的优化问题也可以用图形来表述和求解，并且更为直观和简便，如匹配问题、设备更新问题等。网络分析技术则利用图形来描述一个工程项目中各项活动之间的关联和时间进度，从而可以对项目进度进行控制和优化。

现实生活中，人们常常需要在一些可选方案中进行选择，而选择的情景可能是不确定的或有风险的，或者是评价方案的目标有多个。如何进行选择或决策，就是决策论要解决的问题。而如果决策者面对一个与他有竞争的决策者时，决策问题就变成了一个博弈问题，前面提到的田忌赛马就是典型的博弈案例。研究博弈问题的理论和方法就是博弈论（也叫作对策论）。

排队论是运筹学的一个重要分支，它又叫作随机服务系统理论。它的研究目的是要回答如何改进服务机构或如何组织被服务的对象，使得某种指标达到最优的问题。比如一个港口应该有多少个码头，银行营业厅应设置多少服务窗口等。排队是一个随机现象，因此在研究排队问题时，需要以概率论作为分析工具。

存储论是研究如何平衡供给与需求之间矛盾的理论与方法。其基本的数学问题就是在特定的需求假设下，确定最优的订货量或生产量。

和所有的其他数学分支一样，运筹学的内容有其经典不变的一面，但是随着社会经济的发展和科学技术的变革，其应用对象所呈现出的丰富性和复杂性也与日俱增。因此，运筹学的理论研究和应用前景都面临更大的机遇和挑战。比如，随着人们对决策行为的关注，已经提出行为运筹学的概念。此外，随着移动互联网技术的发展，可获得海量的实际数据，这些为运筹学的应用提供了更为广阔的空间，使其能够发挥越来越重要的作用。迪士尼游乐场的 Fastpass 系统中就运用了排队论方法。又如目前交通出行的叫车 App 应用软件，其中也包含了最优匹配等优化算法。

本书着重介绍运筹学的主要分支内容，在选材上详略得当，重点突出，对专业词汇给出中英文对照；注重内容阐述的启发性和新颖性，对经典方法的讲解由浅入深，适当增加了运筹学的最新研究理论和方法，拓展读者视野；注重内容理论阐述的严密性，给出必要的理论性证明和推理；注重案例的时代性，教材中引入了一些新的应用案例，由案例问题引出理论分析方法，再回到实际问题的解决过程；案例及附件中介绍了如何用 Excel 来求解模型，增强了本书的实用性。

本书由周晶担任主编，徐薇担任副主编，负责教材内容选择和审定。其中周晶参与编写了第 7 章、第 9 章、第 10 章和第 11 章。徐薇负责编写第 1 章、第 2 章和第 5 章；朱振涛、鲁涛负责编写第 3 章和第 4 章；安智宇负责编写第 6 章；伊俊敏负责编写第 7 章；徐红利负责编写第 8 章；吴孝灵负责编写第 9 章；王虹负责编写第 10 章；孙玉玲负责编写第 11 章。

编　者

目　　录

前言

第 1 章　线性规划 …… 1

1.1　线性规划建模 …… 1

1.2　线性规划的解 …… 6

1.3　线性规划的图解法 …… 7

1.4　线性规划的基本定理 …… 11

1.5　单纯形法 …… 12

1.6　单纯形法的进一步讨论 …… 18

1.7　应用举例 …… 28

习题 …… 31

第 2 章　线性规划的对偶理论 …… 35

2.1　线性规划的对偶问题 …… 35

2.2　对偶理论 …… 40

2.3　影子价格 …… 44

2.4　对偶单纯形法 …… 45

2.5　灵敏度分析 …… 48

习题 …… 53

第 3 章　线性规划的扩展 …… 56

3.1　运输问题 …… 56

3.2　目标规划 …… 80

3.3　数据包络分析 …… 89

习题 …… 98

第 4 章　整数规划 …… 104

4.1　整数规划问题及其数学模型 …… 104

4.2　分支定界法 …… 106

4.3　割平面法 …… 113

4.4　0 - 1 整数规划 …… 116

4.5　指派问题 …… 121

4.6　整数规划案例 …… 125

习题 …… 128

第 5 章　非线性规划 …… 132

5.1　概述 …… 132

5.2　非线性规划问题的解 …… 134

5.3　凸函数和凸规划 …… 137

5.4　下降迭代算法 …… 140

5.5　一维搜索 …… 142

5.6　无约束极值问题的求解算法 …… 148

5.7　约束极值问题的最优性条件 …… 154

5.8　约束极值问题的求解算法 …… 159

习题 …… 164

第 6 章　动态规划 …… 166

6.1　多阶段决策问题 …… 166

6.2　动态规划的基本概念和基本方程 …… 168

6.3　最优化原理与最优性定理 …… 175

6.4　动态规划问题的求解 …… 177

6.5　动态规划的应用举例 …… 182

习题 …… 194

第 7 章　图与网络 …… 198

7.1　图与网络基础概念 …… 198

7.2　树 …… 202

7.3　最短路问题 …… 205

7.4　最大流问题 …… 210

7.5　最小费用流问题 …… 215

7.6　中国邮递员问题 …… 219

7.7　网络计划 …… 222

习题 …… 229

第 8 章　决策论 …… 233

8.1　决策的概念与分类 …… 233

8.2　确定型决策分析 …… 236

8.3　不确定型决策分析 …… 236

8.4　风险型决策分析 …… 239

8.5　多准则决策分析 …… 246

8.6　效用函数 …… 255

8.7　行为决策理论 …… 258

习题 …… 263

第 9 章　博弈论 …… 266

9.1　博弈的基本要素与分类 …… 266

9.2　完全信息静态博弈 …… 268
9.3　零和博弈 …… 277
习题 …… 289
第10章　排队论 …… 292
10.1　排队服务系统的基本概念 …… 292
10.2　到达间隔与服务时间的分布 …… 296
10.3　生灭过程与系统状态方程 …… 299
10.4　单服务台负指数分布排队模型 …… 301
10.5　多服务台排队模型 …… 307
10.6　其他类型排队模型 …… 312
10.7　排队系统的优化 …… 317
习题 …… 319
第11章　存储论 …… 321
11.1　存储论概述 …… 321
11.2　确定性需求的存储模型 …… 323
11.3　随机需求的基本存储模型 …… 334
习题 …… 344
附录A　线性规划问题的Excel求解 …… 346
附录B　名词术语中英文对照 …… 361
参考文献 …… 365

第 1 章　线 性 规 划

线性规划（Linear Programming）是在线性约束下求解线性目标函数最优值的数学理论与方法，它是运筹学中研究较早，发展较快，理论研究最为透彻的一个重要分支。

早在 1826 年，19 世纪的法国数学家 J. Fourier 就为求解线性不等式组而提出了Fourier－Motzkin 消去法，线性规划的思想初现端倪。1939 年，苏联数学家 L. V. Kantorovich 出版了《生产组织与计划中的数学方法》，正式提出了线性规划问题，据此模型研究了工业生产的资源合理利用和计划等问题。几乎同时，荷兰裔美国经济学家 T. C. Koopmans 将线性规划问题引入到经济学领域。1975 年，Kantorovich 与 Koopmans 因他们在线性规划中的杰出工作共享了当年的诺贝尔经济学奖。1947 年，G. B. Dantzig 提出了单纯形法（Simplex Method），为线性规划的求解提供了切实、可操作的算法，并能由计算机编程实现，推动了线性规划在各个领域更为广泛的应用。同年，J. von Neumann 提出了对偶理论，完善了单纯形法的理论基础。直到今天，单纯形法仍然是求解线性规划问题最好的、应用最广泛的一种算法。1984 年，美国贝尔实验室的研究员，美籍印度裔数学家 N. Karmarkar 提出了求解线性规划的多项式时间内点算法，进一步发展了线性规划的数值解法。

本章将首先介绍线性规划的数学模型，然后通过简单的图解法了解线性规划问题解的特征，进而介绍求解线性规划的一般方法——单纯形法。我们将详细阐述单纯形法的基本原理和计算步骤，并给出其矩阵表达。最后，列举一些生产实践中的常见案例，说明建立线性规划模型的技巧和其广泛的应用性。

1.1　线性规划建模

在日常经营管理中，资源的最佳配置问题无处不在。例如，企业的生产管理者总是想尽可能多地生产产品，但会受到原材料供应和设备运转能力的限制；工程建设项目的项目经理总是想实现最短的工期，但会受到劳动力、建设资金等多方面的限制；养殖场主总是希望最小化饲料的成本，但要保证牲畜的正常生长和基本营养。这些问题如果用数学模型来描述都可以建立成一类带有约束的数学规划模型，其共同特点是根据问题要达到的目标选取适当的决策变量，然后将问题的目标和限制条件都用决策变量的函数形式表达。当目标函数和约束函数均为线性时，这类模型就被称为线性规划。“规划（Programming）”这里并不是指计算机程序，而是“计划”的同义词。因此，常见的线性规划问题就是为各类活动制定最佳计划。

下面，我们通过两个简单例子来描述线性规划问题的基本特征，并给出其数学模型的一般形式和标准形式。

1.1.1　线性规划引例

例 1.1　某工厂计划生产两种产品 A 和 B，已知生产单位产品时所消耗的资源和用

量，以及销售的单位利润（见表1.1）。请问该工厂应生产产品A、B各多少件，可获得最大利润？（仅给出求解模型）

表1.1 工厂生产计划的数据

资源＼产品	A	B	备用资源
钢材/t	1	2	30
劳动力/工时	3	2	60
特种设备/台时	0	2	24
利润/(元/件)	40	50	

解 要建立该问题的数学规划模型，我们从以下几个方面进行考虑：

1）决策变量（Decision Variables）。假设 x_1，x_2 分别表示工厂计划生产产品A、B的数量，这是该问题需做出的决策。

2）目标函数（Objective Function）。决策者通常需要对决策变量的某个函数求最大值（如利润函数）或最小值（如费用函数），该函数被称为目标函数。这里，显然目标函数是利润函数，即

$$\max z = 40x_1 + 50x_2 \tag{1-1}$$

3）约束条件（Constraints）。随着 x_1，x_2 的增加，目标函数（1-1）的值也在增加。如果对 x_1，x_2 没有任何限制，那么工厂必定会任意扩大产量以追求更大利润。但事实上，问题中对 x_1，x_2 是有如下约束的。

条件1 钢材资源只有30个单位，即需满足不等式

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 30$$

条件2 劳动力资源只有60个单位，即需满足不等式

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 60$$

条件3 设备资源只有24个单位，即需满足不等式

$$2x_2 \leqslant 24$$

除此以外，我们还必须注意所有决策变量的符号。这里 x_1，x_2 为生产的数量，因此不可能为负数，所以还需要增加两个非负约束条件，即 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$。

综上，该问题的数学规划模型为

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 60 \\ 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

其中，“s. t.”是词组“subject to”的缩写，表示决策变量 x_1 和 x_2 需满足所有约束条件（包括符号约束）。

例1.2 某养殖场可选用市场上四种不同的饲料（编号为1、2、3、4）来喂养奶牛。已知每单位饲料中维生素A、B、C的含量见表1.2。此外，表中还给出了每种饲料的单

位使用成本，以及每头奶牛每天对三种维生素的最低需求。请问养殖场如何制定一个既保证维生素摄入量，又最经济的配食方案？（仅给出求解模型）

表 1.2 维生素含量表

	维生素 A/mg	维生素 B/mg	维生素 C/mg	饲料成本/（元/单位）
饲料 1	4	1	0	2
饲料 2	6	1	2	5
饲料 3	1	7	1	6
饲料 4	2	5	3	8
每天维生素的最低需求	12	14	8	

解 要建立该问题的数学规划模型，我们仍从以下几个方面进行考虑：

1）决策变量。假设 x_1、x_2、x_3、x_4 分别为每天给每头奶牛喂食饲料 1、2、3、4 的单位量。

2）目标函数。这里要求最经济也就是成本最低，因此目标函数是成本函数，即

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

3）约束条件。

条件 1 每头奶牛每天维生素 A 的需求不低于 12 个单位，即需满足不等式

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 12$$

条件 2 每头奶牛每天维生素 B 的需求不低于 14 个单位，即需满足不等式

$$x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geqslant 14$$

条件 3 每头奶牛每天维生素 C 的需求不低于 8 个单位，即需满足不等式

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 \geqslant 8$$

除此以外，决策变量显然也要求非负，即 x_1，x_2，x_3，$x_4 \geqslant 0$。

综上，该问题的数学规划模型为

$$\min z = 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 12 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 \geqslant 14 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

1.1.2 线性规划模型的一般形式

从上面的引例中可以看出，规划问题的数学模型一般由决策变量、目标函数和约束条件三个要素组成。如果模型中目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是决策变量的线性等式或线性不等式，则该类规划问题被称为线性规划。所谓线性，通常是指以下两层含义：比例性（Proportionality），如生产某产品对资源的消耗量和可获得的利润与其生产数量是成比例的；可叠加性（Additivity），如生产多项产品时，可获得的总利润是各项产品的利润之和，并且对某种资源的消耗量亦等于各项产品对该资源的消耗量之和。现实中，很多问题并不完全符合上述条件，但为处理方便，在建模时往往是做了满足线性条件的近似处理。

线性规划问题的**一般形式**如下：

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n)
\end{aligned} \tag{1-4}
$$

这里，x_j 为决策变量，c_j 为目标函数中 x_j 的系数(通常称为**价值系数**)，b_i 为约束条件中的右端项(通常称为**资源量**)，a_{ij}为约束条件中 x_j 的系数，其表示 x_j 取值为 1 个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量(通常称为**技术系数**)。

1.1.3 线性规划模型的标准形式

由于实际问题的描述各不相同，因而在直接构造的线性规划模型中，其目标函数以及约束条件的表达形式多种多样。正如式（1-4）中所见，目标函数可能是求最大值也可能是求最小值，约束条件可能是“≤”形式，“=”形式或“≥”形式。而对于决策变量，其实也未必都有非负约束，有时并没有限制。但是，为了方便模型求解，尤其是采用单纯形法进行求解，我们会在建模后把一般形式的线性规划问题转换成如下的**标准形式**(Standard Form)，即

$$
\begin{aligned}
&\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\
&\qquad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n)
\end{aligned} \tag{1-5}
$$

并且要求 $b_i \geqslant 0$，$i=1$，…，m。

这里所谓的“标准”包含四点：①目标函数求最大值“max”；②约束条件是等式约束；③决策变量非负；④等式约束的右端项非负。值得注意的是，对于目标函数，标准的定义并不统一，有些书中也以求最小值“min”为标准。而这两者之间事实上只需一个负号就可以相互转换，因此并没有本质区别。**本书中，我们以“max”为标准。**

对于约束条件的右端项，若 $b_i \leqslant 0$，那么只需等式两端同时乘以“-1”即可满足“标准”的要求。接下来，我们再看一看约束条件和决策变量是如何通过适当转换来满足“标准”的要求的。

➢ **约束条件**

若约束条件为线性不等式，那么有下面两种情况。

【第一种情况】

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \tag{1-6}
$$

此时引入变量 $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$，那么式（1-6）可改写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i,\ y_i \geqslant 0$$

这里通过引入新的非负变量 y_i，将“≤”不等式约束转化为等式约束，称这样的 y_i 为松弛变量(Slack Variable)。

【第二种情况】

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \tag{1-7}$$

此时引入变量 $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$，那么式（1-7）可改写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i,\ y_i \geqslant 0$$

这里通过引入新的非负变量 y_i，将“≥”不等式约束转化为等式约束，称这样的 y_i 为剩余变量（Surplus Variable）。

由此可见，任何线性不等式约束都可以通过适当引入松弛变量或剩余变量转换为线性等式约束。当松弛变量或剩余变量引入线性规划模型后，为保持原问题目标函数不变，只需设定它们在目标函数中的系数为零。

➢ 决策变量

若某个决策变量 $x_j \leqslant 0$，那么只要令 $x_j' = -x_j$，显然 $x_j' \geqslant 0$。

若某个决策变量 x_j 无任何符号约束（即可以取正值，负值或零），那么要转变成标准形式，最常用的方法是令 $x_j = x_j' - x_j''$，其中 x_j'，$x_j'' \geqslant 0$，将其带入线性规划模型即可。除此以外，也可通过某等式约束将 x_j 从线性规划模型中消去，即决策变量数变为 $n-1$ 个，约束条件数变为 $m-1$ 个。

综上，对于任意一般形式的线性规划问题，总是可以通过适当变换转化为等价的标准形式的线性规划问题。

例 1.3　试将下述线性规划问题转化为标准形式

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 9 & ① \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 25 & ② \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -30 & ③ \\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解　令 $x_1' = -x_1$，$x_3 = x_3' - x_3''$，其中 x_3'，$x_3'' \geqslant 0$；式①左端加上非负松弛变量 x_4；式②左端减去非负剩余变量 x_5；式③两端同时乘以 -1，则上述问题的标准形式为

$$\max z = -x_1' + 2x_2 + 4x_3' - 4x_3''$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1' + x_2 - x_3' + x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - x_5 = 25 \\ 4x_1' - x_2 + 4x_3' - 4x_3'' = 30 \\ x_1' \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3' \geqslant 0,\ x_3'' \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2 线性规划的解

建立线性规划模型后，下一步的任务就是求解。在讨论具体求解方法以前，本节将给出线性规划问题解的相关概念。考虑如下标准形式的线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

若用紧凑的矩阵和向量形式表达，可写为

$$\max z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \tag{1-8}$$

$$\text{s. t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \tag{1-10}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

向量不等式 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 意味着 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的每一个分量 $x_j \geqslant 0$。

若用 $\boldsymbol{p}_j (j = 1, \cdots, n)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量：

$$\boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

则约束条件（1-9）还可写为

$$x_1 \boldsymbol{p}_1 + x_2 \boldsymbol{p}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{b} \tag{1-11}$$

下面给出线性规划问题解的若干定义：

可行解 满足约束条件（1-9）和（1-10）的解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的**可行解**（Feasible Solution）。通常，线性规划问题总是含有多个可行解，全部可行解的集合称为**可行域**（Feasible Region）。

最优解 使目标函数（1-8）达到最大值的可行解称为线性规划问题的**最优解**（Optimal Solution）。

基 考虑等式约束方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，一般假设 $m \times n$ 阶的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的，秩为 $m (m \leqslant n)$，若 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m \times m$ 阶的满秩子矩阵，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个**基**（Basis）。

不失一般性，假定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列列向量线性无关，组成矩阵 $\boldsymbol{B}$，即

$$B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m)$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的列向量 $\boldsymbol{p}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 称为**基向量**，与基向量 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的变量 x_j 称为**基变量**（Basic Variable），其组成了 m 维的子向量 $\boldsymbol{x_B}$。将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{x}$ 中的剩余部分分别记为 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{x_N}$，则它们可写成如下的分块形式

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N}],\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_B}\\ \boldsymbol{x_N}\end{pmatrix}$$

从而约束方程（1-9）可改写为

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{x_B}+\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{x_N}=\boldsymbol{b}$$

由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 非奇异，进一步可得

$$\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{x_N} \tag{1-12}$$

基本解　在式（1-12）中令 $\boldsymbol{x_N}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。由此得到的解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 称为线性规划问题的**基本解**（Basic Solution）。

由上述定义可见，线性规划的基本解中非零分量的数目不大于 m，且基本解的个数是有限的，不超过 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ 个。

基本可行解　满足非负约束条件(1-10)的基本解，即 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的基本解，称为**基本可行解**（Basic Feasible Solution）。

最优基本可行解　使目标函数（1-8）达到最大值的基本可行解称为**最优基本可行解**（Optimal Basic Feasible Solution），相应的基称为**最优基**（Optimal Basis）。

图 1.1 给出了以上几种解的关系示意图。

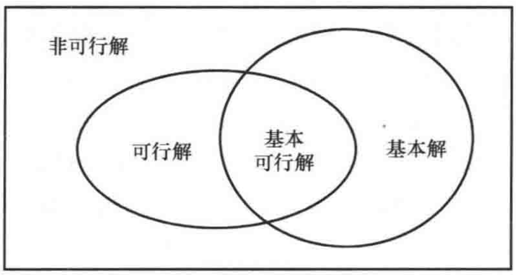

图 1.1　线性规划解的关系图

1.3　线性规划的图解法

对于只有两个决策变量的简单线性规划问题，可以通过图解法进行直观求解。图解法将几何图形和线性规划问题中的基本概念联系起来，有助于我们后面理解求解线性规划的单纯形法的基本思路。

1.3.1　图解法的步骤

下面以例 1.1 为例具体给出图解法求解的过程。例 1.1 的线性规划模型如下：

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 30 & ① \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 60 & ② \\ 2x_2 \leqslant 24 & ③ \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

图解法的主要步骤可分为以下三步：

步骤 1 画出可行域

以 x_1 为横坐标、x_2 为纵坐标画出平面直角坐标系。将所有的约束条件在该平面直角坐标系中画出，找出交集的部分即为可行域。如图 1.2 所示，由非负约束知可行域位于坐标平面的第一象限。此外，在图中，我们用直线和箭头来表示单个不等式约束所给出的半平面，l_1 对应不等式约束①，l_2 对应不等式约束②，l_3 对应不等式约束③。

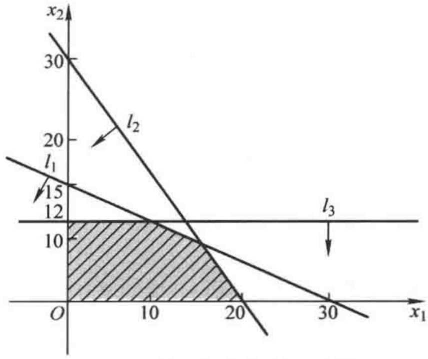

图 1.2 图解法示意图－步骤 1

步骤 2 画出目标函数等值线

将目标函数 $z = 40x_1 + 50x_2$ 改写为 $x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{50}z$。随着 z 的变化，可得到一族斜率为 $-4/5$ 的平行线。在每一条直线上，目标函数值 z 相同，因此被称为**目标函数等值线**。如图 1.3 中虚线所示，向量 $\boldsymbol{D}$ 代表目标函数值 z 增大的方向。

步骤 3 确定最优解

根据定义，最优解是在可行域中使目标函数值达到最优的点。在本例中，优化的目标为求最大值，因此将目标函数等值线沿 z 增大的方向平移，直到与可行域的边界相切时为止，切点就是最优解点，如图 1.4 所示。若再继续向右上方移动，虽然 z 继续增大，但目标函数等值线上已再没有点在可行域中了。注意，若所求线性规划问题的目标是求最小值，那么目标函数等值线就应向目标函数值减小的方向平移，直到与可行域的边界相切时为止。

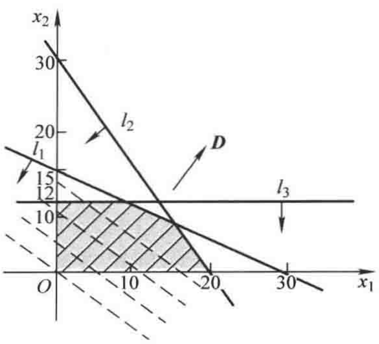

图 1.3 图解法示意图－步骤 2

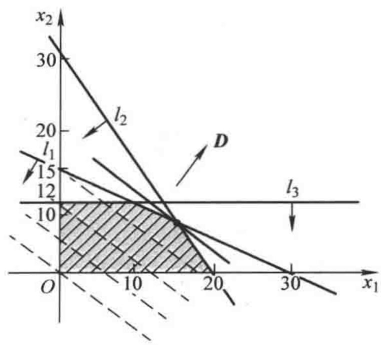

图 1.4 图解法示意图－步骤 3

1.3.2　线性规划解的几种可能性

尽管由图解法得到的例 1.1 的最优解是唯一的，但对于线性规划问题的求解，还可能出现以下几种情况。

（1）无穷多个最优解

若将例 1.1 中的目标函数改为 $z=40x_1+80x_2$，则该目标函数的等值线恰好与第一个约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 30$ 平行。当目标函数等值线向增大的方向平移时，与可行域的交点不是在一个点上，而是在线段 BC 上相切，如图 1.5 所示。显然，这时线段 BC 上的所有点都是使目标函数达到最大值的可行解，即该问题有无穷多个最优解。

（2）无界解

考虑如下的线性规划问题

$$\max z=2x_1+4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 8\\-x_1+x_2\leqslant 2\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用图解法求解（见图 1.6），该问题的可行域是无界的。容易看出，这里目标函数等值线可以一直向右上方平移，目标函数值可以达到无穷大，即最优解无界。一般来说，产生无界解的原因是由于在建立实际问题的数学模型时遗漏了某些必要的约束条件。

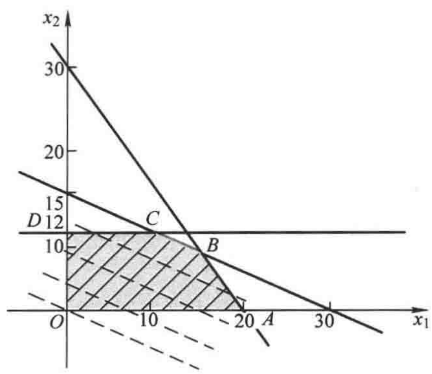

图 1.5　无穷多个最优解的情形

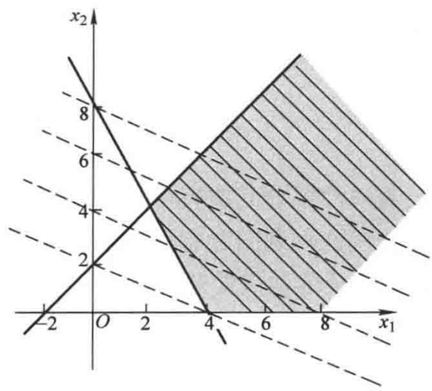

图 1.6　无界解的情形

（3）无可行解

考虑如下的线性规划问题

$$\max z=2x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 2\\2x_1+2x_2\geqslant 6\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用图解法求解（见图 1.7），该问题不存在满足所有约束条件的公共区域，即可行域为空