子流形理论与应用丛书

极小子流形及其推广

Minimal Submanifold and Its Generalization

□ 刘进 刘煜 李海峰 伍国华 王建江 刘刚 著

国防科技大学出版社
National University of Defense Technology Press

本书研究内容受到如下基金资助：
- 国家高技术研究发展计划（重点863项目）：2012AA121301
- 国家自然科学基金：41001220，51178193，51278202，51378512
- 中国博士后科学基金资助项目（面上项目）：2012M511411
- 中国博士后科学基金资助项目（特别资助）：2013T60779

子流形理论与应用丛书

极小子流形及其推广

Minimal Submanifold and Its Generalization

刘 进　刘 煜　李海峰
伍国华　王建江　刘 刚　著

国防科技大学出版社

湖南长沙

内容简介

极小子流形是微分几何的核心研究对象，平均曲率是子流形最重要的刻画特征。本书在代数层面、微分层面和泛函层面系统地用变分理论对极小子流形进行了推广。全书分为三部分。第一部分介绍极小子流形的三种刻画及其扩展。第二部分介绍和推导了本书的理论基础。第三部分具体且精细地研究了各种极小子流形的推广，计算了泛函的第一变分和第二变分，构造了多种泛函和例子，讨论了子流形的稳定性。全书论述严密精炼，适合数学与图形处理专业的研究生及科研工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

极小子流形及其推广/刘进,刘煜,李海峰等著.一长沙：国防科技大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5673-0249-5

I. ①极… Ⅱ.①刘… ②刘… ③李… Ⅲ.①极小子流形一研究 Ⅳ.① O189.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第060953号

国防科技大学出版社出版

电话：(0731)84572640　邮政编码：410073

http://www.gfkdcbs.com

责任编辑：谷建湘　责任校对：陈巧巧　LaTeX排版：谷建湘

国防科技大学印刷厂印刷

开本：890×1240　1/32　印张：7.5　字数：223千

2014年4月第1版第1次印刷　印数：1～1000册

定价：28.00元

前言

极小子流形是微分几何的核心研究对象，其特殊的性质和优美的形态对人类认识自然构造和宇宙时空具有重要的启发作用，体现了某些物理学规律的普遍法则——能量最低或者面积最小原理。古典微分几何中的曲面论，证明了二维曲面在三维欧氏空间中的形态不仅由第一基本型——内蕴度量结构来决定，而且和曲面在空间中的第二基本型——外蕴度量性质有很大的关系。通过对第二基本型的代数处理可以产生丰富的子流形样本。对于同一个几何对象，不同的浸入方式产生不同的子流形，浸入方式和内蕴算子的结合，产生在几何分析中占有重要地位的偏微分方程类。因此，对于泛函层面、代数层面、微分层面而言，极小子流形及其推广都是值得广泛关注的研究课题。

本书的主要目的在于系统地运用变分理论研究极小子流形及其推广。全书共分13章，可以归纳为三部分。

第一部分为第1章，主要介绍极小子流形的三种刻画及其扩展，使读者对于相关课题有一个整体的把握。

第二部分是基础理论篇，包括第2～5章共四章。各章的目的和作用不一。第2章精炼介绍微分几何的基本方程和定理，

为后面各章提供预备知识；第3章推导子流形几何的基本方程和变分法基本公式，是本书的理论基础；变分法的计算通常非常复杂，为了简化公式和计算过程，第4章研究子流形第二基本型的组合构造方法——Newton变换法，推导了新构造的张量的基本性质，是对第3章内容的扩充和精细，并且介绍了在子流形几何中占有重要地位的Chern-do Carmo-Kobayashi 不等式、李安民–李济民不等式、沈一兵方法和Huisken张量分解不等式；自伴算子是子流间隙现象研究的有效工具，第5章利用Newton张量设计了多种几何意义明确的自伴算子，并对几种典型函数做了精细的计算。

本书第三部分是本书的核心篇章，包括第6~13章共八章。各章的主题不一。第6章回顾了经典的体积泛函和极小子流形的定义，建立了它们之间的关系，计算了泛函的变分公式，推导了经典的Simons不等式，并介绍了多种重要的间隙定理。第7、8、9章在代数层面和微分层面将极小子流形推广到高阶极小、平均曲率场线性相关、平行平均曲率等多类型子流形，研究了它们的性质，特别是稳定和不稳定性质以及刚性定理。第10章从平均曲率的定义出发，定义了抽象的平均曲率泛函，推广了经典的体积泛函。第11章计算了抽象和特殊的平均曲率泛函的第一变分公式，这是本书整个研究的基础。第12章计算了平均曲率泛函的第二变分公式。在第一、第二变分公式的基础上，第13章综合运用代数、方程的手段构造了典型的临界点子流形。

本书由四位作者联合完成。第1、3、4、6、13章由刘进执笔，第2、5、7章由刘煜执笔，第8、9、10章由李海峰执笔，第11、12章由伍国华执笔。全书由刘进统稿。王建江、刘刚利

用Mathematic软件中的符号计算功能对本书的复杂公式进行了验证。

本书是作者们对极小子流形及其推广的一个粗浅阐述。由于作者水平有限，纰漏和失误难免，请各位专家批评指正。

作 者
2014年1月

目　录

第 1 章　绪论：极小子流形与推广

1.1　极小子流形的三种刻画

假设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，$e_1, \cdots, e_n, \cdots, e_{n+p}$是局部活动标架，使得$e_1, \cdots, e_n$是子流形$M$的切空间的标架，$e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$是子流形$M$的法空间的标架，$e_1, \cdots, e_n$的对偶标架记为$\theta^1, \cdots, \theta^n$. 子流形一个基本的事实是$\theta^{n+1} = \cdots = \theta^{n+p} = 0$. 在经典微分几何中我们知道，子流形的形态不仅由它的第一基本形式——度量结构决定，而且依赖它在原流形中的浸入方式——第二基本型

$$B = h_{ij}^{\alpha}\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha = B_{ij}\theta^i \otimes \theta^j.$$

定义

$$\vec{H} = H^\alpha e_\alpha,\ \ H^\alpha = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}^{\alpha}.$$

通过简单的代数计算，我们知道上面定义的向量场$\vec{H}$是一个整体量。

定义 1.1 (代数刻画)　假设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，称其为极小子流形如果

$$\vec{H} = 0.$$

特别地，如果原流形N^{n+p}是空间形式$R^{n+p}(c)$(具有常截面曲率的单连通完备的黎曼流形)，则对于子流形的浸入方式x可以进行协变导数微分。假设ϕ_i^j为子流形切空间TM上的联络形式，ϕ_α^β是子流形$T^\perp M$的法联络，我们知道子流形的运动方程为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \theta^i e_i;\\
\mathrm{d}e_i &= \phi_i^j e_j + \phi_i^\alpha e_\alpha - c\theta^i x;\\
\mathrm{d}e_\alpha &= \phi_\alpha^i e_i + \phi_\alpha^\beta e_\beta.
\end{aligned}$$

利用运动方程对位置向量x计算协变导数得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x = \theta^i e_i, \quad x_{,i} = e_i, \\
&x_{,ij}\theta^j = \mathrm{d}x_{,i} - x_{,j}\phi_i^j = \mathrm{d}e_i - \phi_i^j e_j = h_{ij}^{\alpha}\theta^j e_\alpha - c\delta_{ij}\theta^j x, \\
&x_{,ij} = h_{ij}^{\alpha} e_\alpha - c\delta_{ij} x, \quad \Delta(x) + ncx = n\vec{H}.
\end{aligned}
$$

因此，空间形式中的子流形可以做如下的微分刻画。

定义 1.2 (微分刻画) 假设$x : M^n \to R^{n+p}(c)$是子流形，称其为极小子流形如果

$$\Delta(x) + ncx = 0.$$

如果仔细追寻历史，可以知道极小子流形与面积泛函有极大的联系。实际上假设$D \in R^2$是平面上的一个区域，∂D是一条Jordan封闭曲线，在∂D上我们可以定义一条三维欧氏空间R^3中的封闭Jordan曲线：

$$\Gamma : \partial D \to R^3.$$

一个问题是，以封闭的Jordan曲线为边界张成的曲面，什么时候面积最小？这个问题的物理意义在于自然世界中各种液相和气相交界的曲面形状往往满足最小面积原理。回答这个问题的思路在于利用变分法原理推导面积泛函的临界点方程。实际上，假设曲面可用一个显示表达：

$$f : D \to R, \quad (x, y) \to f(x, y),$$

同时应该满足约束条件

$$(x, y, f(x, y)) \mid_{\partial D} = \Gamma.$$

曲面的面积微元表达为

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此问题的目标函数为

$$A(f) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们定义函数空间

$$H_\Gamma = \{f : f \in C^2(D), (x, y, f(x, y)) |_{\partial D} = \Gamma\}.$$

为了获得具有线性结构的函数空间，定义

$$H_0 = \{f : f \in C^2(D),\ (x, y, f(x, y)) |_{\partial D} = 0\}.$$

函数空间H_0和H_Γ的关系是一个线性平移关系，即

$$\forall f \in H_\Gamma,\ H_\Gamma = f + H_0.$$

因此问题可以描述为

$$\min_{f\in H_\Gamma} A(f) = \min_{f\in H_\Gamma} \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用H_0空间可以表示为

$$\min_{\phi\in H_0} = A(f + \phi) = \min_{\phi\in H_0} \int_D \sqrt{1 + |\nabla f + \nabla\phi|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果f就是泛函的极小点，那么必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(f + t\phi)|_{t=0} = 0.$$

经过简单的计算得到

$$\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = 0.$$

在微分几何中，函数图$(x, y, f(x, y))$的平均曲率可以表示为

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{div}\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

因此面积泛函的极小点就是函数图的极小。

将上面的思想进行抽象可以得到子流形的体积泛函：

$$Vol(M) = \int_M \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = \int_M \mathrm{d}v.$$

体积泛函是子流形最简单最自然的泛函。假设$V = V^\alpha e_\alpha$是变分向量场，

经过计算我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Vol(M) = -\int_M N\langle \vec{H}, V\rangle \mathrm{d}v.$$

因此体积泛函的临界点方程是$\vec{H} = 0$.

定义 1.3 (变分刻画) 假设$x : M^n \to N^{n+p}$是子流形，称其为极小子流形如果在紧致法向变分条件下它是体积泛函

$$Vol(M) = \int_M \theta^1 \wedge \cdots \theta^n = \int_M \mathrm{d}v$$

的临界点。

极小子流形的研究对于中国学者而言一般遵循三篇基本的文献：一篇为Simons的论文，参见文献[1]；一篇为陈省身先生的Kansas讲义，参见文献[2]；一篇为Chern-do和Carmo-Kobayashi合写的著名论文，参见文献[3]。陈省身在讲义中用活动标架法对文献[1]中的内容进行了简化和深化。论文[3] 的内容引领了一种学术主题的发展，是子流形变分法理论、间隙现象、锥子流形研究方面的“圣经”级参考资料。在讲义中，推导了子流形的基本结构方程；计算了体积泛函的第一变分；对欧氏空间的极小子流形进行了微分刻画，推导了著名的函数图极小方程，介绍了Bernstein定理的演化进程；用复变函数（等温坐标，黎曼曲面）对欧氏空间的可定向二维极小曲面进行了刻画；对单位球面中的极小子流形的结构方程进行了推导，给出了几个典型例子，特别是Clifford 超曲面与Veronese 曲面；计算了第二基本型的Laplacian；利用此计算结合精巧的不等式分析导出了Simons 积分不等式；利用结构方程和Frobenius定理确定了间隙端点对应的特殊子流形；在第一变分公式的基础上计算了第二变分公式；最后讨论了锥子流形的稳定性的特征值刻画问题。

1.2 代数刻画推广：高阶极小子流形

我们观察第二基本型，通过基本的代数运算，可以实现对极小子流

形的推广。

假设$x : M^n \to N^{n+1}$是一个超曲面，第二基本型表示为

$$B = h_{ij}\theta^i \otimes \theta^j.$$

对于矩阵$(h_{ij})_{n\times n}$我们可以研究其基本多项式

$$S_0 \overset{\text{def}}{=} 1,\ S_1 = \sum_{ii} h_{ii},\ \cdots,\ S_r = \frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r} h_{i_1 j_1}\cdots h_{i_r j_r},\ \cdots,\ S_n = \det(h_{ij}).$$

我们知道极小子流形是由

$$S_1 = 0$$

来刻画的。因此我们可以作下面的定义。

定义 1.4 (代数刻画) 假设$x : M^n \to N^{n+1}$是子流形，称其为r极小子流形如果

$$S_{r+1} = 0,\ \ \forall r \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

显然，0极小就是经典意义上的极小。

对于余维数大于1的子流形$x : M^n \to N^{n+p}, p \geqslant 2$，借助于

$$B_{ij} = h_{ij}^{\alpha} e_{\alpha},$$

我们可以定义曲率函数和向量场：

- 对余维数大于1，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数的情况，
$$S_r = \frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}\langle B_{i_1 j_1}, B_{i_2 j_2}\rangle \cdots \langle B_{i_{r-1} j_{r-1}}, B_{i_r j_r}\rangle.$$

- 对余维数大于1，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为奇数的情况，
$$\vec{S}_r = \frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}\langle B_{i_1 j_1}, B_{i_2 j_2}\rangle \cdots \langle B_{i_{r-2} j_{r-2}}, B_{i_{r-1} j_{r-1}}\rangle B_{i_r j_r}.$$

我们知道极小子流形是由

$$\vec{S}_1 = 0$$

来刻画的。

定义 1.5 (代数刻画) 假设$x: M^n \to N^{n+p}, p \geqslant 2$是子流形，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数，称其为$r$极小子流形，如果

$$\vec{S}_{r+1} = 0.$$

显然，0极小就是经典意义上的极小。

设$R^{n+p}(c)$是空间形式，当$c = 1$时，它是单位球面；当$c = 0$时，它是欧氏空间；当$c = -1$时，它是双曲空间。约定：

- $0 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_s \leqslant (n-1)$，所有$r_i$都是偶数，记

$$\overrightarrow{r+1} = (r_s + 1, \cdots, r_1 + 1),\ \vec{r} = (r_s, \cdots, r_1).$$

- $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in R$都是实常数，$\lambda_s = 1$，记

$$\vec{\lambda} = (\lambda_s, \cdots, \lambda_1).$$

定义 1.6 (代数刻画) 称$x: M \to R^{n+p}(c)$是一个$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形，如果满足

$$\vec{S}_{(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{s} (r_i + 1)\lambda_i \vec{S}_{r_i+1} = 0.$$

显然，$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形概念是极小和$r$极小概念的推广。

1.3 微分刻画推广：Newton张量和平行曲率

设$x: M^n \to R^{n+p}(c)$是空间形式中的子流形，借助于第二基本型的Newton变换可以得到一类典型的自伴算子，它们是Laplacian算子的自然推广。

假设$x: M^n \to N^{n+1}$是一个超曲面，第二基本型表示为

$$B = h_{ij}\theta^i \otimes \theta^j.$$

对于矩阵$(h_{ij})_{n\times n}$，定义Newton张量为

$$T_{(r)}{}_i^j = \frac{1}{r!}\delta_{i_1 \cdots i_r i}^{j_1 \cdots j_r j} h_{i_1 j_1} \cdots h_{i_r j_r},\quad \forall r \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

显然

$$T_{(0)i}^{\ \ \ j} = \delta_i^j,\ \ T_{(n)i}^{\ \ \ j} = 0.$$

定义微分算子L_r：

$$L_r f = T_{(r)i}^{\ \ \ j} f_{,ij},\ \ \forall f \in C^\infty(M).$$

容易观察得到

$$L_0 = \Delta,\ \ L_n = 0.$$

利用算子L_r作用于超曲面的位置向量x可以得到

$$L_r x = (r+1)S_{r+1} - c(n-r)S_r x.$$

定义 1.7 (微分刻画) 假设$x: M^n \to R^{n+1}(c)$是超曲面，称其为r极小子流形如果

$$(L_r + (n-r)cS_r)x = 0.$$

对于余维数大于1的子流形$x: M^n \to N^{n+p}$, $p \geqslant 2$，借助于

$$B_{ij} = h_{ij}^\alpha e_\alpha$$

可以定义Newton张量，此时一般只能对$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数定义

$$T_{(r)i}^{\ \ \ j} = \frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r i}^{j_1\cdots j_r j}\langle B_{i_1j_1}, B_{i_2j_2}\rangle\cdots\langle B_{i_{r-1}j_{r-1}}, B_{i_rj_r}\rangle.$$

定义微分算子L_r：

$$L_r f = T_{(r)i}^{\ \ \ j} f_{,ij},\ \ \forall f \in C^\infty(M).$$

定义 1.8 (微分刻画) 假设$x: M^n \to R^{n+p}(c), p \geqslant 2$是子流形，$r \in \{0, 1, \cdots, n\}$且为偶数，称其为$r$极小子流形如果

$$(L_r + (n-r)cS_r)x = 0.$$

当r是偶数时，定义算子Q_r：

$$Q_r = L_r + c(n-r)S_r.$$

利用Q_r算子作用于位置向量x有

$$Q_r x = (r+1)\vec{S}_{r+1}.$$

定义 1.9 称$x: M \to R^{n+p}(c)$是一个$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$平行子流形如果

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Q_{r_i} x = 0.$$

除了上面的推广之外，还有一种重要的微分刻画推广。

定义 1.10 (微分刻画) 假设$x: M^n \to N^{n+p}$是子流形，称其为平行平均曲率子流形如果

$$D\vec{H} = 0.$$

显然，平行平均曲率子流形是极小子流形的推广。

1.4 变分刻画推广：广义体积与曲率模长泛函

假设$x: M^n \to R^{n+p}(c)$是空间形式中的极小子流形，其可用体积泛函来刻画：

$$Vol(x) = \int_M \theta^1 \wedge \theta^2 \cdots \theta^n = \int_M \mathrm{d}v.$$

一个自然的问题是，如何用泛函来刻画上文所定义的r阶极小和$(\overrightarrow{r+1}, \vec{\lambda})$-平行子流形。通过猜想和计算，我们可以构造出所需要的泛函，称之为广义体积泛函。

对于r阶极小子流形，我们引进所谓的J_r泛函，其中r是偶数并且$r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$。首先归纳定义函数：

$$F_0 = 1,\ F_r = S_r + \frac{(n-r+1)c}{r-1} F_{r-2},\ 2 \leqslant r \leqslant n-1.$$

然后定义泛函

$$J_r = \int_M F_r(S_0, S_2, \cdots, S_r)\mathrm{d}v.$$

对任意的向量场

$$V = V^{\top} + V^{\perp} = V^i e_i + V^{\alpha} e_{\alpha},$$

有

$$J_r'(t) = -\int_{M_t} \langle (r+1)\vec{S}_{r+1}, V \rangle \mathrm{d}v.$$