

 文都教育®

无师
自通

2017
考研数学

考研数学复习大全

Mathematics

数学三

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

最佳搭配：《复习大全》+《接力题典1800》+《15年真题解析》

买书送课：买正版图书，独享精选课程

超值服务：全书免费网络邮箱答疑

M  **athematics**

中国原子能出版社

 文都教育®

无
师
自
通

2017
考 研 数 学

考研数学复习大全

数学三

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习大全. 数学三 / 汤家凤编著. — 北京:
中国原子能出版社, 2015. 10
ISBN 978-7-5022-6898-5

I. ①考… II. ①汤… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 246823 号

考研数学复习大全. 数学三

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	侯茸方
特约编辑	李 焕
印 刷	北京铭传印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	33 字 数 820 千字
版 次	2015 年 10 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-6898-5 定 价 56.00 元

网址: <http://www.aep.com.cn>

E-mail: atomep123@126.com

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

郑重声明

买正版图书 听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《考研数学复习大全·数学一》《考研数学复习大全·数学二》《考研数学复习大全·数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;
2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;
3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;
4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672
电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社
北京世纪文都教育科技有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所

刘岩

2016年1月

前言 Preface



从1987年开始,工程类和经济类全国硕士研究生入学考试数学课程进行全国统一命题。到2008年,原来的数学一至数学四合并成数学一至数学三,经过若干年的调整,现在考试大纲基本稳定。为了帮助广大考生熟悉考试大纲和考试要求,在较短时间内全面、系统、扎实地掌握高等数学(微积分)、线性代数、概率统计的理论体系、方法体系,提高数学运算、逻辑推理、实际应用及应试能力,作者根据自己十多年从事研究生入学考试指导的经验,凭借多年担任研究生入学考试阅卷组长的心得,精心组织材料、系统归纳整理而成本书。

本书的特点体现在如下几个方面:

1. 以独特的视角建立完善的理论体系和方法体系,让数学变得不再可怕和晦涩难懂,使理论和方法通俗易懂、浑然一体。考研数学涉及的三个科目均有其自身的理论体系,如果孤立地看每一个考点,若干个概念、性质、定理堆砌,那么考生很难真正掌握这些知识点;而本书对知识从发展的角度来分析其背景,挖掘其来源,使结论的得出显得水到渠成,更容易接受。同时,数学学习与考试离不开解题,这就必然离不开解题方法的探索。作者将考研数学会用到的基本方法进行总结分类,也归纳整理出自己独创的处理某一类问题的方法体系,可以帮助考生轻松解决相应问题。

2. 对重点的理论和方法增加了拓展延伸的内容,这部分内容可以更好地帮助考生理解考试的重点,便于考生掌握学习数学的独特方法。理论拓展内容将基础知识拓宽加深,或将边缘的易于混淆的结论整合讲解以正视听;方法拓展内容是作者多年一线教学中发现的行之有效且巧妙的方法的汇总。之所以说作者的方法行之有效,不仅仅是因为它能快速准确地解答题目,更重要的是使用过的考生觉得这样的方法易接受、易掌握。

3. 本书内容具有前瞻性和权威性。作者一直在教学和科研第一线,十多年的数学考试指导经验和阅卷经验使得其对研究生入学统一考试重点与命题趋势熟稔于心,同时又充分了解考生复习之瓶颈所在,二者的结合决定了本书既能够体现未来考试方向,又足够专业到位。

4. 本书颠覆了传统数学复习理念，倡导理清知识本源，建立方法体系，从源头上解决解题瓶颈。

本书的体系结构包括：

1. 大纲点击。介绍各章的考试要求，考生通过此板块了解考试范围与重点。

2. 基础复习模块。搭建各部分的理论体系，将考试中要求的基本概念、原理、考点逐一讲解，并突出重点内容，难以理解或容易混淆的结论作者特别给出了理解与记忆的方法。

3. 知识延拓模块。对重要理论和方法以及考试的重点给出了知识体系的进一步深化延展。

4. 重点题型分析。建立知识点的方法体系，对常考点、难点及重要方法进行全面总结和梳理。

5. 测试题。巩固所学的理论和方法，检测各部分的学习效果，更好地适应考试。

广大学子的殷切期盼和文都教育领导的大力鼓励是作者写作本书的动力，在写作过程中广大同仁给予了巨大和无私的帮助。由于本书写作时间紧，加之作者水平所限，不足和错误在所难免，欢迎广大学子和同仁指教。

编 者

2016年1月

目录 Contents



第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续	3
大纲点击	3
基础复习模块——基本概念、原理、考点	3
第一节 函 数	3
第二节 极 限	6
第三节 函数的连续性	14
知识延拓模块——极限存在性问题	15
重点题型分析	17
测试题	33
测试题参考答案	35
第二章 导数与微分	40
大纲点击	40
基础复习模块——基本概念、原理、考点	40
重点题型分析	44
测试题	56
测试题参考答案	58
第三章 中值定理与一元函数微分学的应用	61
大纲点击	61
基础复习模块——基本概念、原理、考点	61
第一节 中值定理	61
第二节 函数的单调性与极值	65
第三节 函数的凹凸性与拐点	67
知识延拓模块——推广、专题讲解	68
重点题型分析	71
测试题	96
测试题参考答案	98
第四章 不定积分	102

大纲点击	102
基础复习模块——基本概念、原理、考点	102
不定积分理论——概念、性质、基本公式与积分法	102
重点题型分析	111
测试题	113
测试题参考答案	114
第五章 定积分及应用	117
大纲点击	117
基础复习模块——基本概念、原理、考点	117
第一节 定积分的基本概念、基本性质与基本定理	117
第二节 定积分的特殊性质与定积分法	120
第三节 广义积分	124
第四节 定积分的实际应用	128
知识延拓模块——定积分理论的推广	130
重点题型分析	131
测试题	153
测试题参考答案	157
第六章 多元函数微分学	165
大纲点击	165
基础复习模块——基本概念、原理、考点	165
第一节 多元函数的基本概念与性质	165
第二节 多元函数微分学基本理论	168
第三节 偏导数计算法则	170
第四节 多元函数微分学在极值中的应用	174
知识延拓模块——推广、专题讲解	176
重点题型分析	177
测试题	195
测试题参考答案	197
第七章 多元函数积分学	201
大纲点击	201
基础复习模块——基本概念、原理、考点	201
二重积分的概念、性质、计算与应用	201
重点题型分析	203
测试题	212
测试题参考答案	213
第八章 级数	217

大纲点击	217
基础复习模块——基本概念、原理、考点	217
第一节 常数项级数的概念与理论	217
第二节 幂级数	224
知识延拓模块——幂级数的和函数及函数展成幂级数的技巧	230
重点题型分析	233
测试题	246
测试题参考答案	247
第九章 微分方程	252
大纲点击	252
基础复习模块——基本概念、原理、考点	252
第一节 微分方程的基本概念	252
第二节 一阶微分方程的种类与解法	253
第三节 可降阶的高阶微分方程及解法	254
第四节 高阶线性微分方程理论	255
知识延拓模块——高阶常系数非齐次线性微分方程特解求法	258
重点题型分析	259
测试题	267
测试题参考答案	268
第十章 微分学的经济学应用	271
大纲点击	271
基础复习模块——基本概念、原理、考点	271
第一节 差分与差分方程	271
第二节 微分的经济学应用	272
重点题型分析	275
测试题	279
测试题参考答案	279

第二部分 线性代数

第一章 行列式	283
大纲点击	283
基础复习模块——基本概念、原理、考点	283
重点题型分析	286
测试题	291
测试题参考答案	291

第二章 矩 阵	294
大纲点击	294
第一节 矩阵概况	294
基础复习模块——基本概念、原理、考点	294
重点题型分析	299
第二节 矩阵的逆矩阵	301
基础复习模块——基本概念、原理、考点	301
重点题型分析	306
第三节 矩阵的秩	310
基础复习模块——基本概念、原理、考点	310
重点题型分析	312
测试题	315
测试题参考答案	317
第三章 向 量	319
大纲点击	319
第一节 向量的基本概念及相关性理论	319
基础复习模块——基本概念、原理、考点	319
重点题型分析	323
第二节 向量组的秩与向量组等价	328
基础复习模块——基本概念、原理、考点	328
重点题型分析	330
测试题	330
测试题参考答案	331
第四章 线性方程组	334
大纲点击	334
基础复习模块——基本概念、原理、考点	334
知识延拓模块——方程组的若干理论问题	338
重点题型分析	340
测试题	353
测试题参考答案	355
第五章 特征值与特征向量	361
大纲点击	361
第一节 特征值与特征向量的概念与性质	361
基础复习模块——基本概念、原理、考点	361
重点题型分析	363
第二节 矩阵对角化	367

基础复习模块——基本概念、原理、考点	367
知识延拓模块	371
重点题型分析	374
测试题	380
测试题参考答案	383
第六章 二次型及其标准形	390
大纲点击	390
第一节 二次型及其标准形	390
基础复习模块——基本概念、原理、考点	390
知识延拓模块	393
重点题型分析	395
第二节 正定矩阵与正定二次型	401
基础复习模块——基本概念、原理、考点	401
重点题型分析	402
测试题	403
测试题参考答案	404

第三部分 概率统计

第一章 随机事件与事件的概率	411
大纲点击	411
基础复习模块——基本概念、原理、考点	411
知识延拓模块——古典概型、伯努利概型与几何概型	417
重点题型分析	419
测试题	423
测试题参考答案	424
第二章 随机变量及其分布	427
大纲点击	427
基础复习模块——基本概念、原理、考点	427
重点题型分析	434
测试题	439
测试题参考答案	441
第三章 多维随机变量及其分布	444
大纲点击	444
基础复习模块——基本概念、原理、考点	444
重点题型分析	453

测试题	460
测试题参考答案	462
第四章 随机变量的数字特征	467
大纲点击	467
基础复习模块——基本概念、原理、考点	467
重点题型分析	471
测试题	480
测试题参考答案	481
第五章 大数定律与中心极限定理	485
大纲点击	485
基础复习模块——基本概念、原理、考点	485
重点题型分析	486
测试题	489
测试题参考答案	490
第六章 数理统计的基本概念	492
大纲点击	492
基础复习模块——基本概念、原理、考点	492
重点题型分析	496
测试题	500
测试题参考答案	502
第七章 参数估计	505
大纲点击	505
基础复习模块——基本概念、原理、考点	505
重点题型分析	507
测试题	508
测试题参考答案	509

第一部分 微积分

- 第一章 函数、极限、连续
- 第二章 导数与微分
- 第三章 中值定理与一元函数微分学的应用
- 第四章 不定积分
- 第五章 定积分及应用
- 第六章 多元函数微分学
- 第七章 多元函数积分学
- 第八章 级数
- 第九章 微分方程
- 第十章 微分学的经济学应用

第一章 函数、极限、连续

大纲点击

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续和右连续),会判断函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

基础复习模块 —— 基本概念、原理、考点



第一节 函 数

一、基本概念

1. 邻域与去心邻域 —— 设 $\delta > 0$, 称集合 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$; 称集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{0}{U}(a, \delta)$, 如图 1-1-1.

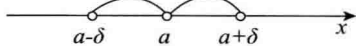


图 1-1-1

2. 函数 —— 设 D 为一个数集, x, y 为两个变化的量, 若对任意的 $x \in D$, 总有唯一确定的 y 与之对应, 称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

【注解】

几种特殊的函数:

(1) 狄利克雷(Dirichlet) 函数
$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

(2) 符号函数
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad \text{特别地, } |x| = x \operatorname{sgn} x.$$



$$(3) \text{ 取整函数 } y = [x] = \begin{cases} m, & x = m \\ m-1, & m-1 \leq x < m \end{cases} (m \in \mathbb{Z}).$$

取整函数的性质有: (1) $x-1 < [x] \leq x$; (2) $[x+m] = [x] + m (m \in \mathbb{Z})$.

3. 函数的常用表示法

(1) 显函数表示法 —— 即将 x, y 构成的函数关系表示为 $y = f(x)$.

(2) 隐函数表示法 —— 设 D 为数集, 若对任意的 $x \in D$, 由等式 $F(x, y) = 0$ 有唯一确定的 y 与之对应, 称由 $F(x, y) = 0$ 确定 y 为 x 的隐函数.

(3) 参数方程表示法 —— 设 D 为数集, 若对任意的 $x \in D$, 由 $x = \varphi(t)$ 唯一确定一个 t , 再由 $y = \psi(t)$ 唯一确定一个 y 的值, 称 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数.

4. 复合函数 —— 设 $y = f(u) (u \in D_0)$, $u = \varphi(x) (x \in D)$, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域 $R \subset D_0$, 称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数.

5. 反函数 —— 设 $y = f(x)$ 为单调函数, 由 $y = f(x)$ 解出 $x = \varphi(y)$, 称 $x = \varphi(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

6. 基本初等函数 —— 以下函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数: x^a ;

(2) 指数函数: $a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

(3) 对数函数: $\log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

(4) 三角函数: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$;

反三角函数: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

7. 初等函数 —— 由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子称为初等函数.

【例 1】 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

【解】 由 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3, \\ -3 \leq x \leq 4. \end{cases}$

故函数的定义域为 $D = \{x \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}$.

【例 2】 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, 求 $f\{f[f(x)]\}$.

【解】 $f[f(x)] = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x},$

$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]}{1+f[f(x)]} = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}.$

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1, \\ x^2, & |x| \leq 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} e^x, & |x| > 1, \\ 1+x, & |x| \leq 1, \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 的表达式.

【解】 $g[f(x)] = \begin{cases} e^{f(x)}, & |f(x)| > 1, \\ 1+f(x), & |f(x)| \leq 1. \end{cases}$

$|f(x)| > 1$ 等价于 $\begin{cases} |x| > 1, & \text{或} \\ |x| \leq 1, \end{cases}$ 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$;

$|f(x)| \leq 1$ 等价于 $\begin{cases} |x| \leq 1, & \text{或} \\ |x| > 1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x \leq 1$, 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} e^x, & x > 1 \text{ 或 } x < -1, \\ 1+x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

【例 4】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ x+1, & x \geq 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】 $f[g(x)] = \begin{cases} e^{g(x)}, & g(x) < 1, \\ g(x)+1, & g(x) \geq 1, \end{cases}$

由 $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+1 < 1 \end{cases}$ 得 $-1 < x < 0$;

由 $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 1 \end{cases}$ 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$,

故
$$f[g(x)] = \begin{cases} e^{x^2}, & -1 < x < 0, \\ x^2+1, & x \leq -1, \\ 2x+2, & x \geq 0, \end{cases}$$

【例 5】 求 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

【解】 由 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 得 $x + \sqrt{1+x^2} = e^y$;

因为 $(x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x) = 1$, 所以 $\sqrt{1+x^2} - x = e^{-y}$,

两式相减得 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

【例 6】 证明:任一个定义域为关于原点对称的函数总可以表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

【证明】 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

令 $G(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $H(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, 显然 $G(x)$ 为偶函数, $H(x)$ 为奇函数, 且

$$f(x) = G(x) + H(x).$$

【例 7】 设 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(1) = a$, 又 $f(x+2) - f(x) = f(2)$.

(1) 用 a 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$; (2) a 取何值时, $f(x)$ 是以 2 为周期的函数?

【解】 (1) 取 $x = -1$, 则 $f(2) = f(1) - f(-1) = 2f(1) = 2a$,

由 $\begin{cases} f(3) - f(1) = f(2), \\ f(5) - f(3) = f(2) \end{cases}$ 得 $f(5) - f(1) = 2f(2)$, 故 $f(5) = 5a$.

(2) 若 $f(x)$ 以 2 为周期, 则 $f(x+2) = f(x)$, 从而 $f(2) = 0$, 故 $a = 0$.

二、函数的初等特性

1. 单调性 —— 设 $f(x)$ 为定义于 D 上的函数, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调增函数, 若有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在 D 上为单调减函数.