

牛顿

Newton
Science Museum

科学馆

数学都知道 1

蒋 迅 王淑红◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

牛顿

Newton
Science Museum

科学馆

数学都知道 1

蒋 迅 王淑红◎著



北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学都知道. 1/蒋迅,王淑红著. —北京:北京师范大学出版社, 2016. 12

(牛顿科学馆)

ISBN 978-7-303-20948-4

I. ①数… II. ①蒋…②王… III. ①数学—普及读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 170623 号

营 销 中 心 电 话 010-58805072 58807651
北师大出版社学术著作与大众读物分社 <http://xueda.bnup.com>

SHUXUE DUZHIDAO 1

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 大厂回族自治县正兴印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 890 mm×1240 mm 1/32
印 张: 8.5
字 数: 200 千字
版 次: 2016 年 12 月第 1 版
印 次: 2016 年 12 月第 1 次印刷
定 价: 32.00 元

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 岳昌庆 谢子玥
美术编辑: 王齐云 装帧设计: 王齐云
责任校对: 陈 民 责任印制: 马 洁

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58805079

数学都知道

王梓坤题 

2016.6

中国科学院院士、曾任北京师范大学校长（1984～1989）的王梓坤教授为本书题字。

序 言

我们与《数学都知道》的第一作者蒋迅相识于改革开放之初。那时他是高中毕业直接考入北京师范大学的1978级学生，我们是荒废了12年学业，在1978年初入校的“文化大革命”后首批研究生。王昆扬为1977级、1978级本科生的“泛函分析”课程担任辅导教师。

蒋迅无疑是传统意义上的好学生，勤奋上进，刻苦认真。他的父母都是数学工作者，前者潜心教书，一丝不苟；后者热情开朗，乐于助人，在同事中口碑甚好。在一个人的成长过程中，家庭的潜移默化即便不是决定性的，也是至关重要的一个因素。蒋迅选择学习数学，或许有这一因素。

本科毕业后，蒋迅报考了研究生，师从我国著名的函数逼近论专家孙永生教授。恰逢王昆扬在孙先生的指导下攻读博士学位，于是便有了共同的讨论班及外出参加学术会议的机会，切磋学问。在这以后，与当年诸多研究生一样，蒋迅选择了出国深造，得到孙先生的支持。他在马里兰大学数学系获得博士学位，留在美国工作。

由于计算机的蓬勃兴起，那个年代留在美国的中国学生大多数选择了计算机行业，数学博士概莫能外。由于良好的数学功底，他们具有明显的优势。蒋迅现在美国的一个研究机构从事科学计算，至今已有十五六年。

尽管已经改行，但蒋迅热爱数学的初衷终是未能改变。本套书第2册第十章“俄国天才数学家切比雪夫和切比雪夫多项式”介绍了函数逼近论的奠基人及其最著名的一项成果，可以看作蒋迅对纯数学的眷恋与敬意。孙永生先生的在天之灵如有感知，一定会高兴的。

蒋迅笔耕不辍，对祖国的数学普及工作倾注了极大的心血。几年前，张英伯邀请他为数学教育写点东西，于是他在科学网上开辟了一个数学博客“天空中的一个模式”，本书的标题“数学都知道”便取自他的博客中广受欢迎的一个栏目。书中集结了他多年来发表在自己的博客、《数学文化》《科学》等报纸杂志上以及一些新写的文章。

本套书的第二作者是我国数学史领域的一位后起之秀王淑红。她将到不惑之年，已经发表论文30余篇，主持过国家自然科学基金和省级基金项目，堪称前途无量。据她讲，她受到蒋迅很大的影响，在后者的指导下，参与撰写了本套书的部分章节和段落，与蒋迅共同完成了本套书的写作。

本套书的内容涉猎广泛，部分文章用深入浅出的语言介绍高等和初等的数学概念，比如牛顿分形、爱因斯坦广义相对论、优化管理与线性规划、对数、 π 与 $\sqrt{2}$ 等。部分文章侧重数学与生活、艺术的关系，充满了趣味性，比如雪花、钟表、切蛋糕、音乐与绘画等。特别应该指出的是，由于长期生活在美国，蒋迅得以准确地向读者介绍那里发生的事情，比如奥巴马总统与6位为美国赢得奥数金牌的中学生一起测量白宫椭圆形总统办公室的焦距、美国的奥数与数学竞赛、美国的数学推广月等。在全书的最后，他介绍了华裔菲尔兹奖得主陶哲轩的博客以及一位值得敬重的旅美数学家杨同海。

全书文笔平实、优美，参考文献翔实，是一套优秀的数学科普著作。

北京师范大学数学科学学院

张英伯^①、王昆扬^②

2016年6月

-
- ① 张英伯 北京师范大学数学科学学院教授，理学博士，博士生导师。1991年获教育部科技进步奖。曾任中国数学会常务理事，基础教育委员会主任，国际数学教育委员会执行委员，北京师范大学数学系学术委员会主任，《数学通报》主编。
- ② 王昆扬 北京师范大学数学科学学院教授，理学博士，博士生导师。1989年获国家教委科技进步一等奖和国家自然科学四等奖。2001年获全国模范教师称号，2008年获高等学校教学名师称号。

前 言

中国航天之父钱学森先生曾问：“为什么我们的学校总是培养不出杰出的人才？”仅此一问，激起了我们若干的反思与醒悟。综观发达国家的教育，无不重视文化的构建和熏陶以及个人兴趣的培养，并且卓有成效，因此，良好科学文化氛围的培育是人才产出和生长的土壤，唤醒、激励和鼓舞人们对科学的热爱是人才培养中不可或缺的一环。数学王子高斯曾言：“数学是科学的女王。”因此，数学文化在科学文化的构建和培育中不仅占有一席之地，而且是重中之重。

数学作为一种文化，包括数学的思想、精神、方法、观点、语言及其形成和发展，也包括数学家、数学美、数学史、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的联系以及数学与各种文化的关系等。自古以来，数学与文化就相互依存、相互交融、共同演化、协调发展。但在过去的 600 多年里，数学逐渐从人文艺术的核心领域游离出来，特别是在 20 世纪初，数学就像一个在文化丛林中迷失的孤儿，一度存有严重的孤立主义倾向。在我们的数学教学中，数学也变成一些定义、公式、定理、证明的堆砌，失去了数学原本的人文内涵、意趣和华彩。

幸运的是，很多有真知灼见的大数学家们对此已有强烈的意识和责任感，正在通过出版书籍、发表文章、开设数学文化课程、创办数学文化类杂志、网站等一系列举措来努力唤醒数学的文化

属性，使其发挥应有的知识底蕴价值和人文艺术魅力。中国科学院院士李大潜教授在第十届“苏步青数学教育奖”颁奖仪式上特别指出：“数学不能只讲定义、公式和定理，数学教育还要注重人文内涵。数学教育要做好最根本的三件事：数学知识的来龙去脉、数学的精神实质和思想方法、数学的人文内涵。”

我们对此亦有强烈共鸣，数学与人文本是珠联璧合、相得益彰的，数学教育者理所应当要注重在数学教学中播撒人文旨趣，丰盈学生的人文精神世界。本系列书选取一些典型且富有特色的与生活实际和现实应用有关的数学问题，并紧紧围绕数学这一主题，自然延伸到与之交叉、渗透的若干领域和方面，试图通过新颖雅致的内容、简练清晰的文字、弥足珍贵的图片、趣味十足而又颇具启发性的问题等，竭力呈献给读者一幅幅数学与生活、数学与科技、数学与艺术、数学与教育等共通互融的立体水墨，以期对弥合数学与文化之间的疏离贡献一点光和热。

生活中处处有数学。当你在寒冷的冬季看到纷纷扬扬的雪花，吟哦诗人徐志摩的动人雪花诗篇时，是否想过雪花的形状有多少种？它们是在什么条件下形成的？它们能否在计算机上模拟？能否用数学工具来彻底解决雪花形成的奥秘？

当你倾听美妙的音乐或弹奏乐器时，是否想过数学与音乐的关系？数学家与音乐的关系？乐器与数学的关系？相对论的发明人爱因斯坦说过：“这个世界可以由音乐的音符组成，也可由数学的公式组成。”实际上，数学与音乐是两个不可分割的魂灵，很多数学家具有超乎寻常的音乐修为，很多数学的形成和发展都与音乐密不可分。

当你提起画笔时，是否想过有人用笔画出了高深的数学？是否想过画家借助数学有了传世的画作？是否想过数学漫画在科学

普及中的独特功用？

当你开车在路上、漫步在街道、徜徉在人海时，是否仔细留意过路牌、建筑、雕塑等？是否在其中品出过数学的味道？我们在本系列书中会给大家带来这种随处与数学偶遇的新鲜体验。

数学并不是干瘪无味的，其具有自身的内涵和气韵。数学虽然并不总是以应用为目的，但是数学与应用的关系却是非常密切的。在本系列书中，我们会介绍一些生动有趣的数学问题以及别开生面的数学应用。

数学的传播和交流十分重要。英国哲学家培根曾指出：“科技的力量不仅取决于它自身价值的大小，更取决于它是否被传播以及被传播的广度与深度。”我们特意选取几个国外独具特色的交流活动，进行隆重介绍，也在书里间或推介其他一些中外数学写手，以期能对国内的数学普及活动有所启示和借鉴。

英年早逝的挪威数学家阿贝尔说：“向大师们学习。”培根说：“历史使人明智。”我们专门或穿插介绍了一些史实和数学家的奇闻逸事，希望读者能够沐浴到数学家的伟大人格和光辉思想，从而受到精神的洗礼和有益的启迪。

在岳昌庆副编审的建议下，本系列书先期发行三册，每册的正文包含15章左右。第1册的内容主要侧重于数学与艺术和生活的关系等；第2册的内容主要侧重于一些生动有趣的数学问题和数学活动等；第3册的内容主要侧重于数学的应用等。下面是各册的主要篇目。

【第1册】

第一章 雪花里的数学

第二章 路牌上的数学、计算游戏 Numenko 和幻方

第三章 钟表上的数学与艺术

- 第四章 数学家与音乐
- 第五章 数学与音乐
- 第六章 调音器的数学原理
- 第七章 漫画和数学漫画
- 第八章 xkcd 的数学漫画
- 第九章 画家蔡论意的数学情缘
- 第十章 埃拉托塞尼筛法：从素数到雕塑
- 第十一章 把莫比乌斯带融入生活中
- 第十二章 克莱因瓶不仅存在于数学家的想象中
- 附录：数学都知道，你也应知道

【第 2 册】

- 第一章 乘法口诀漫谈
- 第二章 奥巴马和孩子们一起计算白宫椭圆办公室的焦距
- 第三章 用数学方程创作艺术
- 第四章 说说圆周率 π
- 第五章 $\sqrt{2}$ ，人们发现的第一个无理数
- 第六章 对数和对数思维
- 第七章 切割糕点问题
- 第八章 帮助美国排列国旗上的星星
- 第九章 美妙的几何魔法—高立多边形与高立多面体
- 第十章 俄国天才数学家切比雪夫和切比雪夫多项式
- 第十一章 万圣节时说点与鬼神有关的数学
- 第十二章 美国的奥数 and 数学竞赛
- 第十三章 美国的数学推广月
- 第十四章 地球数学年
- 第十五章 需要交换礼物的加德纳会议

附录：数学都知道，你也应知道

【第3册】

第一章 阿波罗登月中的功臣数学家阿仁斯道夫

第二章 制造一台 150 多年前设计的差分机

第三章 霍尔和快速排序

第四章 数学对设计 C++ 语言里标准模板库的影响

第五章 再向鸟儿学飞行

第六章 发电的优化管理与线性规划

第七章 关于牛顿—拉弗森方法的一个注和牛顿分形

第八章 爱因斯坦谈数学对他创立广义相对论的影响

第九章 斯蒂芬问题和自由边界问题

第十章 现代折纸与数学及应用

第十一章 终身未婚的数学家

第十二章 墓碑上的数学恋歌

第十三章 把数学写作当作语言艺术的一部分

第十四章 推介数学家陶哲轩的数学博客

第十五章 数学家杨同海的数学与人生

附录：数学都知道，你也应知道

我们可能都注意到，幼小的儿童常常最具有想象力，而随着在学校的学习，他们的知识增加了，但想象力却可能下降了。很遗憾，学习的过程就是一个产生思维定式的过程，不可避免。教师和家长所能做的就是让这个过程变成一个形成—打破—再形成—再打破的过程。让学生认识到，学习的过程需要随时从不同的角度去思考，去看事物的另一面。本系列书希望给学生、教师和家长提供打破这个循环的一个参考。

特别需要提醒读者的是，我们的行文描述并不仅仅停留在问

题的表面，我们会通过自己多年积累的研究和观察，将它们从纵向推进到问题的前沿，从横向尽可能使之与更多问题相联系，其中不乏我们的新思维、新视角和新成果。数学的累积特性明显，数学大厦的搭建并非一日之功。通常来讲，为数不多的具有雄才大略的数学家，高瞻远瞩地搭建起数学的框架，描绘出数学的宏伟蓝图。那么，人们如何去把这个框架填充起来？该填充些什么？又该如何去扩展？我们花费心思，在本系列书中给出了大量的扩展思考(用符号  表示)和相关问题(用符号  表示)，其目的就是希望给读者一个提示或指引，希望读者学会联想和引申思考，增强阅读的主动性，从而发现潜在的研究课题。这也是本系列书的一大特色。需要说明的是，这些题目有难有易，即便不会也无妨碍，仅作学习和教学的参考未尝不可。

我们在每一个章末都注有参考文献，每一册末编制了人名索引(不包括尚健在的华裔和中国人)，以便于读者参阅和延伸阅读。在行文中也会注意渗透我们的哲思和体悟，用发自内心的情感来感染读者，希望读者能够有所体会和领悟。

数学应该是全民的事业。数学的传播应该由大家一起来完成。社会媒体的出现为我们提供了一个前所未有的机遇。实际上，本系列书的缘起要从第一著者在科学网开办“数学都知道”专栏谈起。自2010年起，第一著者在科学网开设了博客，着重传播数学和科学内容，设有“数学文化”“数学都知道”“够数学的”等几个专栏。其中“数学都知道”专栏相对更受欢迎一些。我们将在每册的附录里对这个专栏作较为深入的介绍。需要强调的是，这个专栏与本系列书有本质的不同。“数学都知道”专栏是一个数学信息的传播渠道，属于摘抄的范畴，而本系列书则是我们两人多年来数学笔

耕的结晶。除了已公开发表的文章外，本系列书不少章节是从未发表过的。但由于这个专栏的成功，我们在此借用它作为本系列书的书名。在此，感谢科学网提供博客平台，也感谢科学网编辑的支持！

在本系列书中，我们试图把读者群扩大到尽可能大的范围，所以对数学知识的要求从小学、初中到大学、研究生的水平都有。本系列书可以作为综合大学、师范院校等各专业数学文化和数学史课程的参考书，供数学工作者、数学教育工作者、数学史工作者、其他科技工作者以及学生使用，也可以作为普及读物，供广大的读者朋友们阅读，对想了解数学前沿的研究生亦开卷有益。

本系列书含有许多图片。对于非著者创作的图片，我们遵循维基百科的使用规则和原著者的授权；对于著者自己提供的图片，遵循创作共用授权相同方式共享(Creative Commons license-share-alike)。本系列书所有章节都参考了维基百科上的内容。为避免重复，我们没有在各章的参考文献中列出。

虽然第一著者现在已经不再专门从事数学的教育和研究工作，但出于对数学难以割舍的情感而在业余时间里继续写作数学科普小品文。在一定的积累之后，著书的想法已然在心里萌生。最终决定与同为数学专业的第二著者一起合作本系列书，更多地是为了心灵的安宁，为了心智的荣耀。而我们是否能最终得到这份安宁和荣耀，则要请读者来给予评判。

寒来暑往韶华过，春华秋实梦依在。我们说有一颗怎样的心就会有怎样的情怀，有怎样的情怀就会做怎样的梦。如果读者在阅读本系列书时，能感受到我们的满腔赤诚，将是对我们最大的褒奖！如果读者在阅读中有所收获，将是对我们莫大的慰藉！如果全社会能营造起良好的数学文化氛围，相信“钱老之问”就有了

解决的一丝希望。腹有诗书气自华，最是书香能致远。衷心希望本系列书对读者有所裨益！

由于本系列书涵盖的内容十分广泛，有些甚至是尖端科技领域，限于著者水平，错误和疏漏在所难免，我们真诚地欢迎广大读者朋友们予以批评和指正，以便我们进一步更正和改进。

在本系列书即将付梓之时，我们首先衷心感谢王梓坤先生为本书题字。王先生虽然高龄，但在我们提出请求后的当天就手书了五个书名供我们挑选。衷心感谢为本系列书提出宝贵建议和意见的专家和学者们！衷心感谢张英伯、王昆扬教授一如既往的大力支持和无私惠助；衷心感谢母校老师对我们的悉心培养！衷心感谢《数学文化》编辑部所有老师对我们的厚爱；第一著者借此机会衷心感谢他的导师孙永生先生的谆谆教诲。孙先生已经离开了我们，但是他对第一著者在数学上的指导和在如何做人方面的引导是第一著者终生的财富。还要衷心感谢科学网博客和新浪微博上的诸多网友，特别是科学网博客的徐传胜、王伟华、李泳、程代展、王永晖、李建华、曹广福、梁进、杨正瓴、张天蓉、武际可和新浪微博的“万精油^①墨绿”、数学与艺术 MaA、ouyangshx、哆嗒数学网等网友。我们通过他（她）们获得了一些写作的灵感和素材。衷心感谢北京师范大学出版社张其友编审的大力支持和热心帮助！衷心感谢北京师范大学出版社负责本系列书出版的领导和老师们！

最后，衷心感谢我们的家人给予的温暖支持！

蒋迅，王淑红
2016年3月

① 此处为笔名或网名。全套书下同。

目 录

第一章 雪花里的数学 /001

1. 雪花研究史 /002
2. 计算机辅助 /004
3. 物理学的帮助 /006
4. 元胞自动机模型 /011
5. 相变的有限元解 /016
6. 动手做一个雪花 /023
7. 雪花的快乐 /026

第二章 路牌上的数学、计算游戏 Numenko 和幻方 /031

1. 路牌上的数学 /031
2. 从 24 点扑克牌游戏说开去 /035
3. 幻方 /039

第三章 钟表上的数学与艺术 /046

1. 钟表是中国古代五大发明之一 /046
2. 愚人节的钟表笑话 /047
3. 有关钟表的数学问题示例 /048
4. 钟表上的数学与艺术赏析 /050
5. 火星钟表的数学与艺术 /057

第四章 数学家与音乐 /060

1. 毕达哥拉斯发现音乐和声的原理 /061
2. 笛卡儿把音乐放进坐标系 /063

3. 莱布尼茨说音乐是灵魂在不知不觉中数数 /065
4. 约翰·伯努利的对数螺线和丹尼尔·伯努利的弦振动 /066
5. 欧拉是精通数学的音乐家和精通音乐的数学家 /069
6. 法国数学家达朗贝尔、拉格朗日、傅里叶的音乐之缘 /071
7. 阿贝尔与艾森斯坦皆英年早逝，但对音乐各有所衷 /075
8. 波约·亚诺什在击剑比赛中弹奏小提琴 /077
9. 音乐是感觉的数学，数学是理智的音乐 /078
10. 门德尔松的妹夫狄利克雷 /081
11. 两位全才数学家的不同音乐际遇 /082
12. 爱米·诺特、库朗和阿廷的数学音乐聚会 /084
13. 伯克霍夫研究“音乐测度” /086
14. 乐队的演奏漏了一个音符 /089
15. 聆听无声之声 /089
16. 参透数学与音乐关系的盖尔范德 /090
17. 业余音乐家卡普兰斯基 /092
18. 约翰·纳什的口哨 /093
19. 著名黑客高德纳 /095
20. 钱学森的三角钢琴 /097
21. 酷爱音乐的张益唐 /099
22. 北京大学乐队指挥、作曲马希文 /100
23. 更多的故事 /102
24. 结束语 /105

第五章 数学与音乐 /110

1. 从古希腊数学家对音乐的认识到的弦振动方程 /111
2. 从三角函数的周期性看十二平均律 /112