工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

ADVANCED MATHEMATICS II

高等数学

下册

同济大学数学系 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

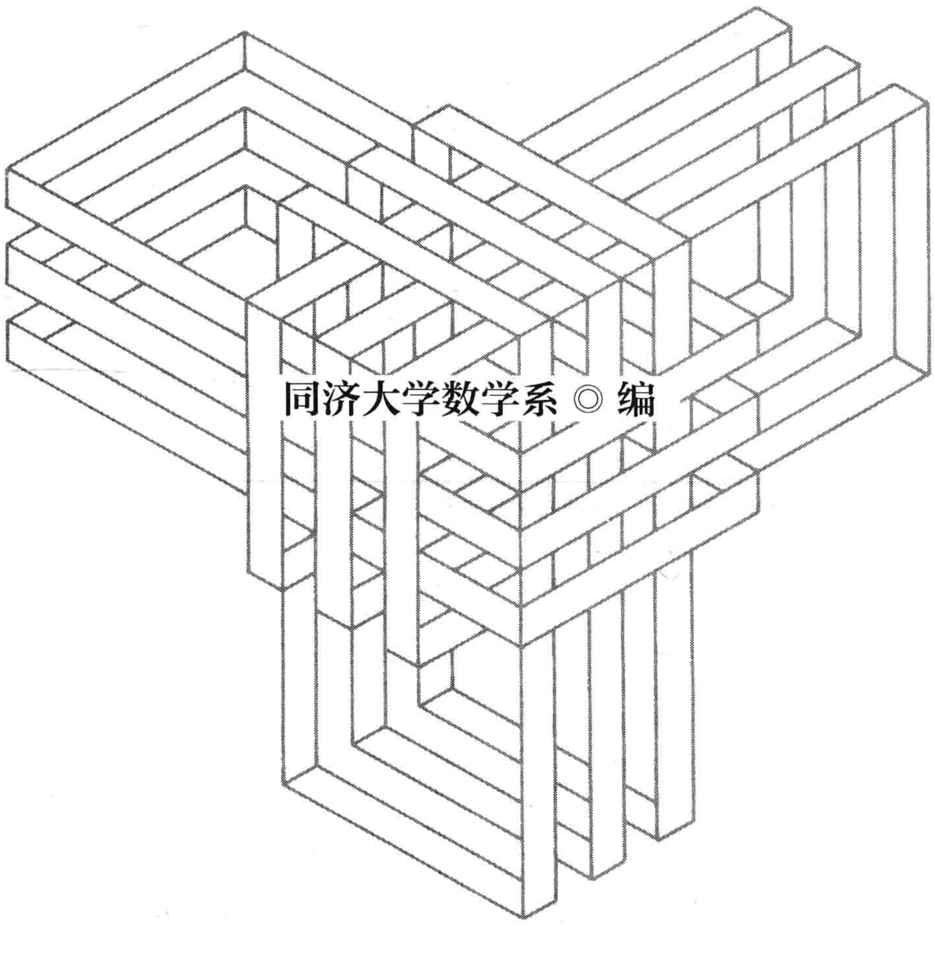
工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

ADVANCED MATHEMATICS II

高等数学

下册



同济大学数学系 ◎ 编

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 同济大学数学系编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2017.1
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42640-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第287134号

内 容 提 要

本书是按照教育部大学数学课程教学指导委员会的基本要求，充分吸取当前优秀高等数学教材的精华，并结合同济大学数学系多年来的教学实践经验，针对当前学生的知识结构和习惯特点而编写的。全书分为上、下两册。本书为下册，是多元函数微积分部分，共四章，主要内容包括向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。每节前面配有课前导读，核心知识点配备微课，每章后面附有章节测试和拓展阅读。

本书注重知识点的引入方法，使之符合认知规律，更易于读者接受。同时，本书精炼了主要内容，对部分内容调整了顺序，使结构更加简洁，思路更加清晰。本书还注重知识的连贯性，例题的多样性和习题的丰富性、层次性，使读者在学习数学知识点的同时拓宽视野，欣赏数学之美。

本书可作为高等院校理工科类各专业的教材，也可作为社会从业人员的自学参考用书。

◆ 编　　　　同济大学数学系
责任编辑　许金霞
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：18.25　　　　2017 年 1 月第 1 版
字数：438 千字　　　2017 年 1 月北京第 1 次印刷

定价：39.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

目　录

第五章　向量与空间解析几何

第一节　向量及其运算

[课前导读]

既有大小又有方向的物理量称为**向量**. 在数学上可用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，其方向(箭头)表示向量的方向.

(1) **向量的表示**：以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段表示的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$，有时也用一个黑体字母(书写时，在字母上面加一箭头)来表示(见图 5-1)，如 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$.

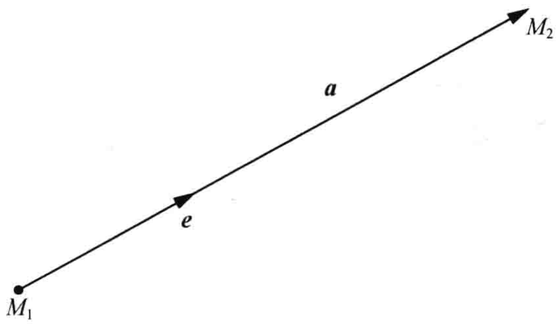


图 5-1

(2) **向量的模**：向量的大小(数学上指有向线段的长度)叫作向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**(见图 5-1)，记作 $\boldsymbol{e}$. 模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

(3) **向径**：以原点 O 为始点，向一点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫作点 M 对于点 O 的向径，记作 $\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$.

(4) **自由向量**：只与大小、方向有关，而与起点处无关的向量称为自由向量.

一、空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直且具有相同的长度单位的数轴(见图 5-2)，这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称坐标轴，定点 O 称为原点. 其正向符合右手规则(见图 5-3). 这样的三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**.

三条坐标轴中的两条可确定一个平面，即 xOy、yOz、zOx 平面，统称坐标面. 它们把空间分成了八个卦限，在 xOy 平面上面逆时针依次为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，下面依次为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 5-4 所示.

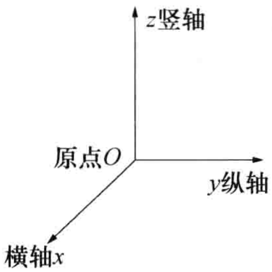


图 5-2

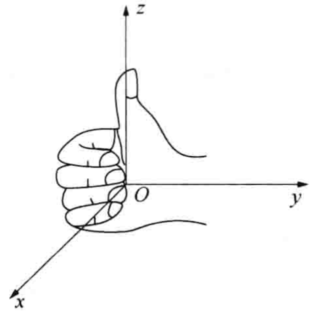


图 5-3

空间直角坐标系

对于空间一点 M，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q 和 R（见图 5-5），这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标为 x、y 和 z，则这组有序数 x、y 和 z 称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$.

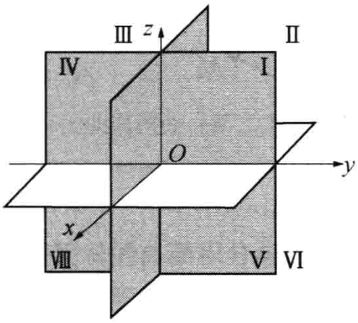


图 5-4

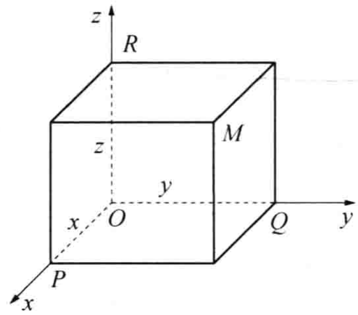


图 5-5

反之，已知一个有序数组（x, y, z），我们可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x 的点 P，坐标为 y 的点 Q，坐标为 z 的点 R，过三个点分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，它们相交于一点 M，则 M 即为以 x、y 和 z 为坐标的点．所以通过直角坐标系，我们建立了空间点 M 与有序数组（x, y, z）的一一对应关系．

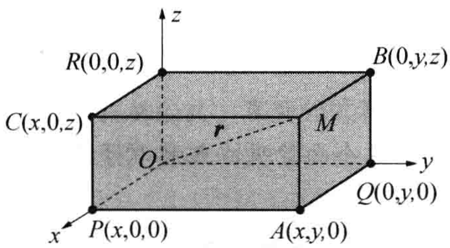


图 5-6

我们先来看几个特殊点的坐标（见图 5-6）.

在 xOy 平面上：$z=0$，故对应点的坐标为 $A(x, y, 0)$；

在 yOz 平面上：$x=0$，故对应点的坐标为 $B(0, y, z)$；

在 zOx 平面上：$y=0$，故对应点的坐标为 $C(x, 0, z)$.

在 x 轴上：$y=z=0$，点的坐标为 $P(x, 0, 0)$；

在 y 轴上：$z=x=0$，点的坐标为 $Q(0, y, 0)$；

在 z 轴上：$x=y=0$，点的坐标为 $R(0, 0, z)$.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两个点（见图 5-7），通过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面组成一个以 M_1、M_2 为体对角线的长方体，由此可得

$$d^2 = |\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

即

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

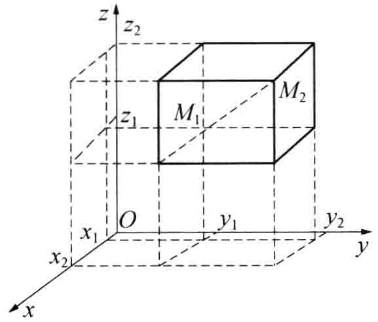


图 5-7

例 1　证明以点 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$ 及 $M_3(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证　$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{14}$,

$|\overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{(5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{M_3M_1}| = \sqrt{(4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6}$,

即 $|\overrightarrow{M_2M_3}| = |\overrightarrow{M_3M_1}|$，因此该三角形是等腰三角形.

例 2　在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解　设所求点的坐标为 $M(0, 0, z)$，由 $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$，即

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2},$$

得 $z = \dfrac{14}{9}$，因此所求点的坐标为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

二、向量的运算

1. 向量的投影及投影定理

将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的始点重合，在两向量的所在平面上，若一个向量逆时针方向转过角度 θ 后可与另一个向量正向重合(见图 5-8)，则称 θ 为**向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$，即

$$\theta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = (\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

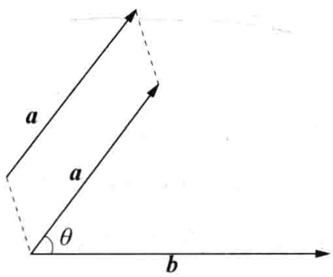


图 5-8

已知两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果它们的夹角 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$，则称这两个向量平行，记为 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，其中两个向量指向一致时 $\theta = 0$，指向相反时 $\theta = \pi$. 指向相同的两个平行向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 如果还满足 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$，那么这两个向量**相等**，记为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同，但方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

对于一向量与一轴的夹角，可将其中一轴看作向量，按两向量之间的夹角来度量；对于两个轴之间的夹角，则看作两向量的夹角.

通过空间一点 A 作 u 轴的垂直平面(见图 5-9)，该平面与 u 轴的交点 A' 称为点 A 在 u 轴上的**投影**.

如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 与终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A'、B'(见图 5-10)，则 u 轴上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$，$u$ 轴称为**投影轴**.

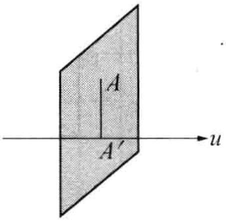


图 5-9

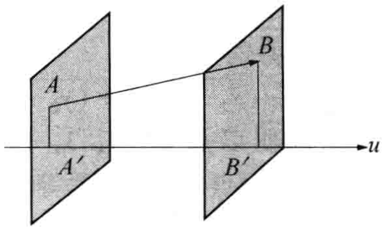


图 5-10

注　值 $A'B'$ 是指其绝对值等于 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度，即 $|\overrightarrow{A'B'}|$，符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向决定：当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 u 轴同向时，取正号；当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 u 轴反向时，取负号．

定理 1　向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以 u 轴与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 θ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta .$$

证　将向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点置于 u' 轴(见图 5-11)，则由直角三角形关系得

$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta .$$

当一非零向量与其投影轴成锐角时，向量的投影为正；成钝角时，向量的投影为负；成直角时，向量的投影为零(见图 5-12)．

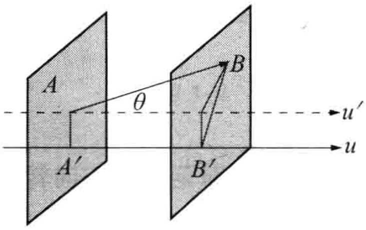


图 5-11

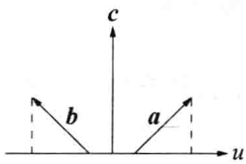


图 5-12

定理 2　两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在轴上的投影的和．

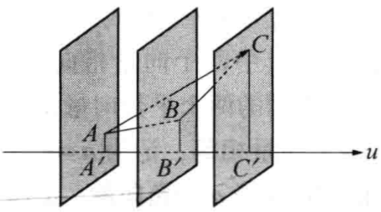


图 5-13

证　设点 A、B 和 C 在轴上的投影分别是 A'、B' 和 C'(见图 5-13)，则 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$，$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} = B'C'$，$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AC} = A'C'$，由于无论 A'、B' 和 C' 在轴上的位置如何，总有 $A'B' + B'C' = A'C'$，故

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} = \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AC} .$$

本定理可推广到有限个向量的情形：

$$\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_n = \mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) .$$

定理 3　$\mathrm{Prj}_u(\lambda\vec{\boldsymbol{a}}) = \lambda \mathrm{Prj}_u \vec{\boldsymbol{a}}$．

证　证明留作习题．

2. 向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标

以同起点向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为平行四边形相邻两边，以 $\boldsymbol{a}$ 向量的起点作为起点的其对角线表示的向量为两个向量的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 5-14 所示．以 $\boldsymbol{b}$ 向量的终点为起点，$\boldsymbol{a}$ 向量

的终点为终点的对角线向量为向量的差，如图 5−15 所示．记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

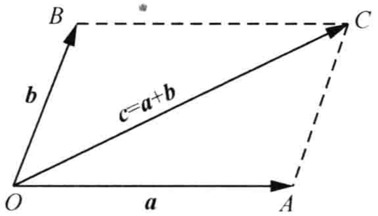


图 5−14

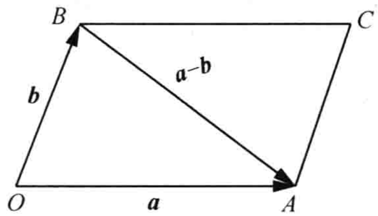


图 5−15

设 λ 是一个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定如下。

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一向量，其大小 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 同向；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0$ 是零向量；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一向量，其大小 $|\lambda\boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 反向(见图 5−16).

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

由数乘的定义很容易得到以下结论(见图 5−17).

(1)如果两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 是实数)，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$；

反之，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)记 $\boldsymbol{e}_a$ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的同向单位向量，$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$(证明留作习题).

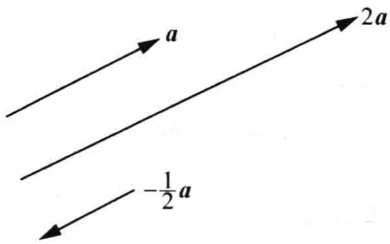


图 5−16

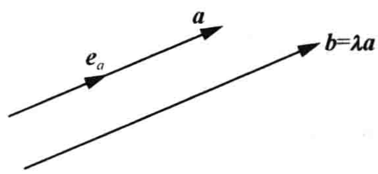


图 5−17

例 3　设 P_1、P_2 为 u 轴上坐标为 u_1、u_2 的任意两点，又 $\boldsymbol{e}$ 为与 u 轴正向一致的单位向量(见图 5−18)，则有 $\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

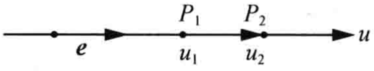


图 5−18

证　当 $u_2-u_1>0$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向，故 $\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda\boldsymbol{e}(\lambda>0)$，由 $\lambda=|\overrightarrow{P_1P_2}|=u_2-u_1$，因此　$\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$；

当 $u_2-u_1=0$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}=\mathbf{0}$，$(u_2-u_1)\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$，因此 $\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$；

当 $u_2-u_1<0$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向，故 $\overrightarrow{P_1P_2}=-\lambda\boldsymbol{e}(\lambda>0)$，由 $\lambda=|\overrightarrow{P_1P_2}|=u_1-u_2$，因此 $\overrightarrow{P_1P_2}=-\lambda\boldsymbol{e}=-(u_1-u_2)\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

设空间有一向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，由加法定理可

知 $\boldsymbol{a}$ 可分解为三个分别平行于 x 轴、y 轴和 z 轴的向量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$，它们称为 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴的三个**分向量**．显然 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$（见图 5-19）．

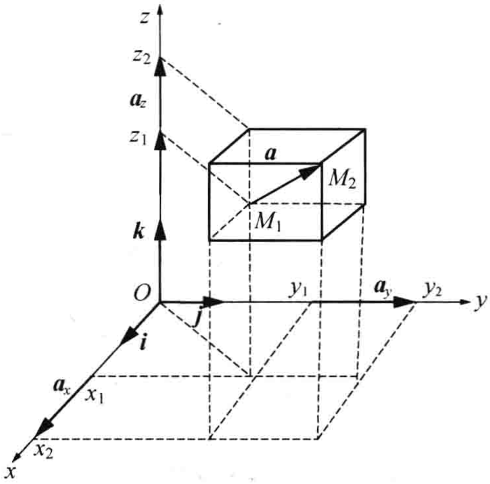


图 5-19

而

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}_x=x_2-x_1=a_x,$$
$$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}_y=y_2-y_1=a_y,$$
$$\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}_z=z_2-z_1=a_z,$$

若用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴和 z 轴正向一致的三个单位向量，称它们为**基本单位向量**，则有 $\boldsymbol{a}_x=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{a}_y=(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}_z=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$，因此

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

称上式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按**基本单位向量的分解式**或 $\boldsymbol{a}$ 的**向量表示式**．

一方面，从向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一定出它在三条坐标轴上的投影 a_x、a_y 和 a_z，另一方面，从 a_x、a_y 和 a_z 可以唯一定出向量 $\boldsymbol{a}$，这样有序数组 a_x、a_y、a_z 就与向量 $\boldsymbol{a}$ 一一对应，于是将 a_x、a_y、a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**，记为 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**．

以 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为始点、$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为终点的向量记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

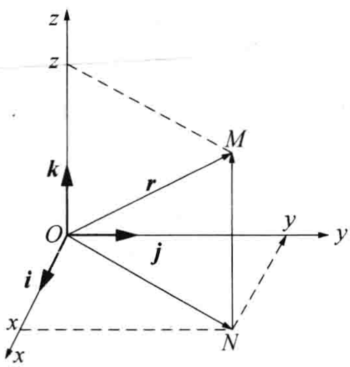


图 5-20

特别地，向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)$（见图 5-20）．

对于向量的运算也可化为对坐标的数量运算．

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z);\end{aligned}$$

$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$．

例 4　设 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为空间两

点，而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$，使它们的模的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq -1)$，即 $\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\lambda$，求分点 M 的坐标 x、y 和 z.

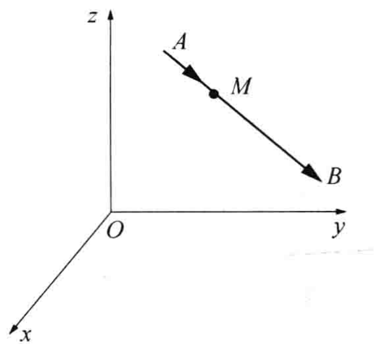


图 5-21

解　如图 5-21 所示，因为 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MB}$ 在一直线上，故 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

而 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$,

$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z)$，因此

$(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=\lambda(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z)$,

即 $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$，可得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点，当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 5　设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解　$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

三、向量的模、方向角

设 $\boldsymbol{a}$ 为任意一个非零向量，又设 α、β、γ 为 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴正向之间的夹角（$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma<\pi$），如图 5-22 所示，则 α、β、γ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 由于向量坐标就是向量在坐标轴上的投影，故有

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

其中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**，通常用来表示向量的方向.

由模的定义，可知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

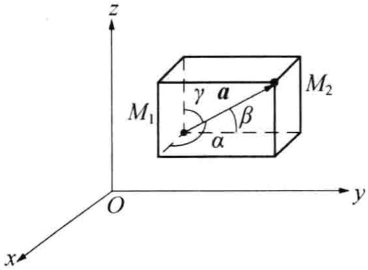


图 5-22

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

或 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\ ,$$

即任一向量的方向余弦的平方和为 1.

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,\ a_y,\ a_z)=\frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}(a_x,\ a_y,\ a_z)=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)\ .$$

例 6 设两已知点 $M_1(2,\ 2,\ \sqrt{2})$ 和 $M_2(1,\ 3,\ 0)$，分别写出向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_1}$ 的坐标表达式和向量表达式，计算它们的模、方向余弦、方向角、单位向量 .

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})=(-1,\ 1,\ -\sqrt{2})=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$,

$$\overrightarrow{M_2M_1}=-\overrightarrow{M_1M_2}=-(-1,\ 1,\ -\sqrt{2})=(1,\ -1,\ \sqrt{2})=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}\ .$$

模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=|\overrightarrow{M_2M_1}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2.$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha_1=-\frac{1}{2}\ ,\ \cos\beta_1=\frac{1}{2}\ ,\ \cos\gamma_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

对应的方向角为

$$\alpha_1=\frac{2}{3}\pi\ ,\ \beta_1=\frac{1}{3}\pi\ ,\ \gamma_1=\frac{3}{4}\pi\ .$$

同理可得 $\overrightarrow{M_2M_1}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha_2=\frac{1}{2}\ ,\ \cos\beta_2=-\frac{1}{2}\ ,\ \cos\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

对应的方向角为

$$\alpha_2=\frac{1}{3}\pi\ ,\ \beta_2=\frac{2}{3}\pi\ ,\ \gamma_2=\frac{1}{4}\pi\ .$$

与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_{M_1M_2}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

与 $\overrightarrow{M_2M_1}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_{M_2M_1}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 7 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量 .

解 所求向量有两个，一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向，一个与 $\boldsymbol{a}$ 反向 .

由于 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，故

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{6}{11}\boldsymbol{i}+\frac{7}{11}\boldsymbol{j}-\frac{6}{11}\boldsymbol{k},\quad 或\ \boldsymbol{e}_{-a}=-\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{6}{11}\boldsymbol{i}-\frac{7}{11}\boldsymbol{j}+\frac{6}{11}\boldsymbol{k}.$$

例 8 已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模为 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，向量与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1 的坐标为(1，0，3)，求 P_2 的坐标 .

解 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角分别为 α、β、γ.

因为 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$，则 $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，所以 $\cos\gamma = \pm\dfrac{1}{2}$，可得 $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$.

设 P_2 的坐标为 (x, y, z).

由 $\cos\alpha = \dfrac{x-1}{|P_1P_2|}$ 可知 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1}{2}$，解方程可得 $x = 2$，

由 $\cos\beta = \dfrac{y-0}{|P_1P_2|}$ 可知 $\dfrac{y-0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解方程可得 $y = \sqrt{2}$，

由 $\cos\gamma = \dfrac{z-3}{|P_1P_2|}$ 可知 $\dfrac{z-3}{2} = \pm\dfrac{1}{2}$，解方程可得 $z = 4$ 或 $z = 2$，

因此，P_2 的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$ 或 $(2, \sqrt{2}, 2)$.

四、数量积

首先我们来看一个引例.

设一个物体在恒力 $\vec{F}$ 作用下，沿直线从点 M_1 移动到点 M_2（见图 5-23），以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$（见图 5-24），其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

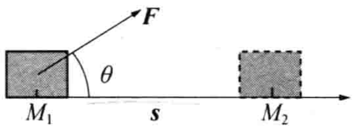


图 5-23

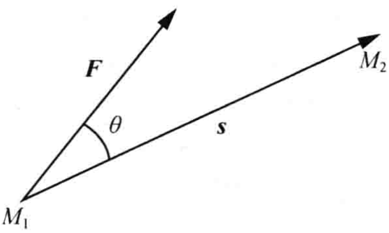


图 5-24

数量积

从这个问题可以看出，我们有时要对两个向量做这样的运算，运算的结果是一个数，它等于这两个向量的模及它们夹角的余弦的乘积. 我们把这个数称为这两个向量的数量积（也称为内积或点积）（见图 5-25）.

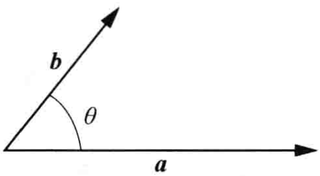


图 5-25

定义 1　给定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，我们将 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\ (0 \leqslant \theta < \pi).$$

由数量积的定义可知，恒力 $\boldsymbol{F}$ 沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}.$$

由定义 1 可以推出：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$；

(3)若 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

证　若已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，故 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

反之，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积符合下列运算规律.

(1)交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

证　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（其中 λ 是数）.

证　当 $\lambda=0$ 时，三者均为零，显然成立；

当 $\lambda>0$ 时，
$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})；\end{aligned}$$

当 $\lambda<0$ 时，
$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))\\&=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))\\&=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

类似地，可证得 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

下面来看两向量的数量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，则有
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

由此可得：若 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}；$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 9　利用向量证明不等式：
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为非零常数，并指出等号成立的条件．

证　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}},$$

从而

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．

例 10　已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；(3) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影．

解　(1) 由数量积的坐标表达式可知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$$

(2) 因为

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\frac{-9}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以　$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$.

(3) 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，可得

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-3.$$

例 11　已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，试求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$．

解　根据题意，有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\\7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0,\end{cases}$$

两式相减得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$，代入第一个方程得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

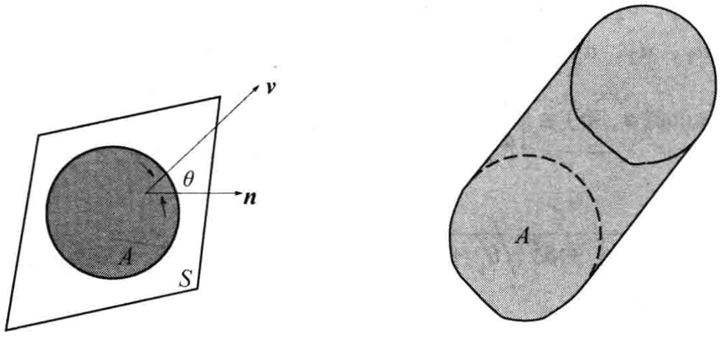
因此

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$．

例 12　液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域，液体在这区域上各点处的流速均为 $\boldsymbol{v}$（常向量），设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量（见图 5-26），计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的重量 P（液体的密度为 ρ）．

解　单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A，斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体，这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ．所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$，体积为



（a）　　（b）

图 5-26

$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}(=A|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}}))$，故单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的重量 $P=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

五、向量积

在研究物体转动问题时，不但要考虑物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩. 如图 5-27 所示，设杆 L，支点为 O，受力 $\boldsymbol{F}$ 作用，由力学可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，其大小为

$$|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{OQ}||\boldsymbol{F}| = |\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

其方向为：$\boldsymbol{M}$ 垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所在平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 转向 $\boldsymbol{F}$，转角不超过 π，此时，大拇指的方向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向(见图 5-28).

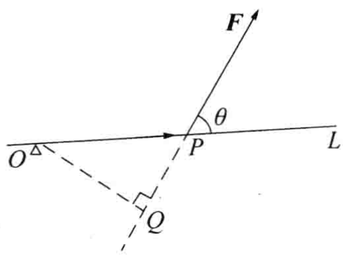


图 5-27

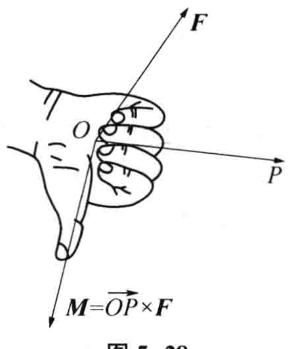


图 5-28

定义 2　若由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的一个向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下列条件(见图 5-29)：

(1) $\boldsymbol{c}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ (其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角)，

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(或称**外积**、**叉积**)，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

按此定义，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}.$$