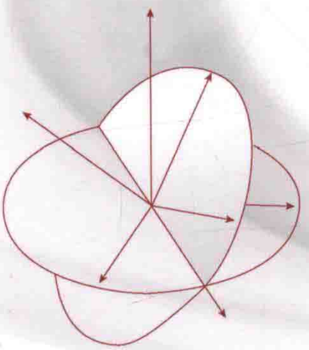

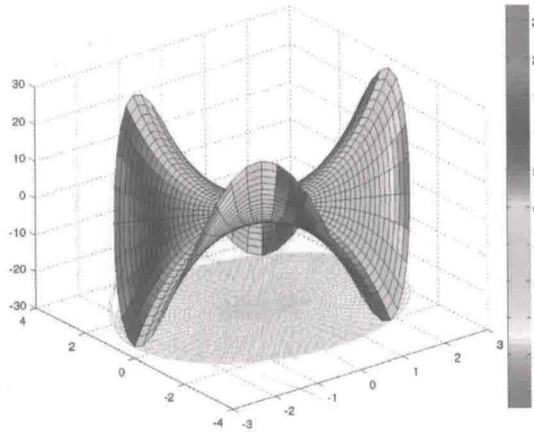

复变函数与积分变换(第2版)

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

高宗升 滕岩梅 编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

复变函数与积分变换

（第2版）

高宗升　滕岩梅　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书系统地讲述了复变函数与积分变换的基本理论和方法。全书共分 9 章，内容包括复数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论及其应用、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及解析函数在平面场的应用等。每章配备了适当的例题和习题，书后附有习题答案或提示。

本书内容丰富，通俗易懂，可作为理工科院校（非数学专业）“复变函数”或“复变函数与积分变换”课程的教材或教学参考书，也可供相关专业的科技工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换 / 高宗升，滕岩梅编著. --2 版. --北京 ：北京航空航天大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5124-2218-6

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①高… ②滕… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 190735 号

复变函数与积分变换（第 2 版）

高宗升　滕岩梅　编著

责任编辑　张冀青

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号（邮编 100191）　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com　邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：710×1 000　1/16　印张：13.5　字数：288 千字

2016 年 9 月第 2 版　2016 年 9 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 978-7-5124-2218-6　定价：34.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话：(010)82317024

第 2 版前言

本书于 2006 年初版，在编写方面，比较重视学生基础理论的学习和数学素质的培养，对内容的处理上具有重点突出、详略得当、通俗易懂、便于自学、理论联系实际等特点，因此，受到使用本书的广大师生的欢迎，并于 2008 年被评为北京市高等教育精品教材。

第 2 版在保持第 1 版原有特色的基础上，对有关章节进行了局部修改，有些部分进行了重写，对各章的练习题进行了适当调整，改正了原书中存在的一些不足和错误。为了使读者更方便地掌握本书的主要内容，各章后面增加了内容提要和基本要求，以供读者学习时参考。

这次再版，第 1 章、第 7 章及第 8 章由滕岩梅编写，第 2～6 章及第 9 章由高宗升编写。

本书再版得到了北京航空航天大学数学与系统科学学院同事们的关心和帮助；使用本书的师生提出了一些很好的修改建议；柴富杰、周广艳、张月阳、杜云飞、陈敏风、叶倩文等同学帮助输入了新版书稿；北京航空航天大学出版社的领导和编辑为本书的出版给予了大力的支持和帮助。作者在此向他们表示衷心的感谢。由于作者的水平所限，本书在编写上肯定存在一些不足之处，敬请读者批评指正。

作　者
2016 年 6 月
于北京航空航天大学

前　　言

“复变函数与积分变换”是为理工科院校(非数学专业)本科生开设的一门基础理论课。该课程在自然科学和工程技术的许多领域有着广泛的应用。20世纪90年代末期,由于国内合适的复变函数教材很少,复变函数与积分变换教材几乎没有,给教学工作带来了极大的不便。为此,有关专家建议编写一本适合理工科(非数学专业)本科生使用的复变函数与积分变换教材,并于2001年列入北京航空航天大学教材建设规划。

本书是作者在北京航空航天大学多年来为非数学专业学生讲授“复变函数与积分变换”课程的基础上,结合理工科院校的专业特点,融入作者的教学经验和体会,吸收国内外教材的优点而编写的。书中主要内容曾进行过试讲,并在广泛听取有关师生意见的基础上进行了多次修改。

本书系统地讲述了复变函数与积分变换的基本理论和方法,内容丰富,理论严谨,通俗易懂。主要内容符合理工科大学(非数学专业)本科生“复变函数”课程或“复变函数与积分变换”课程的教学要求,可作为该课程的教材或教学参考书。本书的主要内容(书中不带 * 号的部分)大约需要40学时讲授。

考虑到该课程是一门重要的基础理论课,同时又在实际中有着广泛的应用,在编写时,作者重点把握了下列几点:

1. 重视对学生基本理论知识的讲授和数学素质的培养。对于本书中涉及的基本概念和主要定理,一般都给出了准确的叙述和严格的证明。为了保证本书基本理论的完整性、系统性和科学性,将一些超出教学大纲但在理论上或应用上又十分重要的内容,如辐角原理和儒歇定理、保形映射的基本定理等内容也编进了教材,标上 * 号,供读者参考。

2. 由于复变函数的分析结构和微积分有许多相似之处,因此不少初学者误认为复变函数是微积分理论的简单推广而不加以重视,结果往往掌握不了它的理论实质。本书不仅注意到两者之间的一些共性,而且特别强调复变函数的自身特点以及它们之间的差异。

3. 本书力求做到说理清楚,重点突出,直观易懂,详略得当,便于教师授课和学生自学。例如,对于多值函数的讲解、δ函数的引入,处理得比较简洁、自然;对于积分理论、级数理论、留数理论则讲得比较系统。

4. 复变函数在数学物理方程、流体力学、弹性力学、电学、磁学、自动控制等方面有着十分广泛的应用。本书除了在第7章和第8章分别介绍了傅里叶变换及拉普拉斯变换在微分方程和电路上的应用外,第9章还专门对解析函数在平面场上的应用作了介绍。

5. 本书各章都配有适当的例题和类型齐全的习题,书后给出了习题的答案和提示,以供读者练习时参考。

本书由高宗升主编。其中,第1章、第7章和第8章由滕岩梅执笔,第2章到第6章以及第9章由高宗升执笔,最后由高宗升统一整理定稿。在本书编写过程中,得到教务处教材科、理学院领导和同事以及有关院系师生的关心和帮助;程鹏教授对书稿进行了认真审阅,提出了重要的修改意见。在此,作者表示衷心的谢意。

由于作者的水平所限,若书中有不足之处,敬请读者批评指正。

作　者

2005年9月

于北京航空航天大学

目　录

第1章　复　数

复变函数所讨论的内容都是在复数范围内,这就要求我们对复数及其相关内容有一定的了解.本章首先对复数的有关知识作简要的复习和补充,其次介绍平面点集的一些基本概念.

1.1　复数的概念、运算及几何表示

1.1.1　复数的概念及代数运算

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数称为复数,其中 x 和 y 是任意实数,分别称为复数 z 的实部和虚部,记作

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z$$

其中,i 称为虚数单位,满足 $\mathrm{i}^2=-1$.

当 $\mathrm{Im}\, z=0$ 时,$z=x$ 是实数;当 $\mathrm{Re}\, z=0$,且 $\mathrm{Im}\, z\neq 0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数.

两个复数相等,是指当且仅当它们的实部和虚部分别相等;一个复数等于零,是指当且仅当它的实部和虚部都等于零.

复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为互为共轭复数.如果其中一个用 z 表示,则另一个用 $\bar{z}$ 表示,即若 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,它们的加法与减法分别定义为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.2}$$

称式(1.1)、式(1.2)等号右端所得的复数分别为 z_1 和 z_2 的和与差.

复数 z_1 与 z_2 的乘法定义为

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.3}$$

称式(1.3)等号右端所得的复数为 z_1 与 z_2 的积.

显然,复数的上述运算法则满足交换律、结合律以及乘法对于加法的分配律,即设 z_1,z_2,z_3 为复数,则

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

最后给出复数除法的运算法则. 复数 z_1 除以 $z_2(z_2\neq 0)$ 定义为

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}&=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\end{aligned}\tag{1.4}$$

称式(1.4)右端所得的复数为 z_1 与 z_2 的商. 利用乘法的运算法则容易验证,这样定义的除法运算是乘法运算的逆运算.

全体复数集合按照上述运算法则构成一个数域,称为复数域. 与实数域不同的是,在复数域中不能规定复数的大小.

例 1.1 设 z_1,z_2 为两个复数,读者自行证明共轭复数具有下列性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$; (2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; (4) $z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}\,z]^2+[\mathrm{Im}\,z]^2=|z|^2$;

(5) $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$; (6) $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$.

1.1.2 复数的几何表示、模与辐角

从复数相等的规定可以看出,复数 z 与有序实数对 (x,y) 构成一一对应的关系. 因而在建立了笛卡儿直角坐标系 Oxy 的平面上,可以借助横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数,进而建立了平面上的点和复数之间一一对应的关系.

此时,x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在平面称为复平面或 z 平面.

引入复平面后,可以把"点 z"和"数 z"作为同义词,"点集"和"复数集"作为同义词,从而便于用几何知识来研究复数.

此外,也可以用向量 z 来表示复数 z,并且这里的向量是自由向量,即将一个向量平移仍代表同一向量. 因而复数与平面上的向量也构成了一一对应的关系. 通过这种对应关系,可以利用复数研究速度、加速度、电(磁)场强度等实际问题中常见的向量.

向量 z 的长度 r 称为复数 z 的模或绝对值,记作 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

由图 1-1 知

$$|x|\leqslant|y|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|\tag{1.5}$$

现在说明复数四则运算的几何意义. 先介绍加法和减法的几何意义. 两个复数相加或者相减时,其实部和虚部分别相加或相减. 因此,代表复数的向量应按照平行四边形法则相加减,如图 1-2 所示.

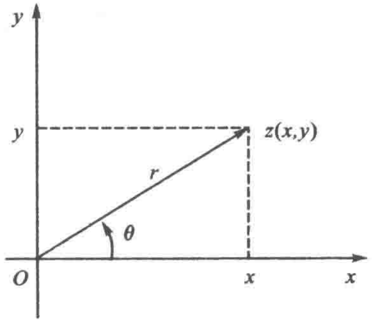

图 1－1　复数的几何表示

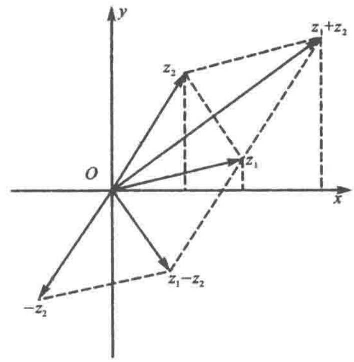

图 1－2　复数的加法与减法

根据三角形两边之和不小于第三边、两边之差不大于第三边的结论，由图 1－2 可以得到如下不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.6}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.7}$$

其中，$|z_1-z_2|$在几何上表示复数 z_1 与 z_2 之间的距离.

这两个不等式也可以用代数方法给以证明.

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\&=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

两边开方，即得不等式(1.6). 式(1.7)可用类似方法证明.

式(1.6)可以推广到多个复数的情况，利用数学归纳法，可以证明

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \tag{1.8}$$

下面引入复数辐角的概念.

当 $z\neq0$ 时，称以正实轴为始边，以向量 $\boldsymbol{z}$ 为终边的角 θ 为复数 z 的辐角，记作 $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. 这时，$\tan\theta=\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\dfrac{y}{x}$. 显然，任一非零复数 z 的辐角可取无穷多个值，而值与值之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的主值或 z 的主辐角，记作 $\theta_0=\arg z$. 有时 $\arg z$ 也表示辐角的某一特定值. 显然

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当 $z=0$ 时,辐角无意义. 当 $z\neq 0$ 时,辐角主值 $\arg z$ 与 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 有如下关系:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \pi, & x < 0, y = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

其中, $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan \dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

r,θ 也可以看作点 z 的极坐标,利用直角坐标系和极坐标之间的关系,则有

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

所以任一非零复数 z 均可表示为

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.10}$$

式(1.10)称为复数 z 的三角表示式.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

得

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.11}$$

式(1.11)称为复数 z 的指数表示式. 而称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 z 的代数表示式. 复数的三种表达式可以互相转换,以解决不同的问题.

例 1.2 求复数 $\dfrac{1+z}{1-z}(z\neq 1)$ 的实部、虚部和模.

解 因为

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}} = \frac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}$$

$$= \frac{1-|z|^2+2\,\mathrm{i}\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}, \quad \operatorname{Im}\frac{1+z}{1-z} = \frac{2\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$$

又

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2=\frac{1+z}{1-z}\cdot\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$
$$=\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}}$$
$$=\frac{|1+z|^2}{|1-z|^2}=\frac{1+|z|^2+2\mathrm{Re}\,z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=\frac{\sqrt{1+|z|^2+2\mathrm{Re}z}}{|1-z|}.$$

例 1.3　将下列复数分别化为三角表示式和指数表示式.

(1) $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(2) $z=(1-\cos\varphi)+\mathrm{i}\sin\varphi\ (0<\varphi\leqslant\pi)$.

解　(1)因为

$$r=|z|=\sqrt{1+3}=2$$
$$\theta_0=\arg z=\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)-\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

所以 z 的三角表示式为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$$

(2) 因为

$$z=(1-\cos\varphi)+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

所以 z 的三角表示式为

$$z=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{i}}$$

利用复数的指数形式作乘法和除法不仅比较简单，而且有明显的几何意义. 设有两个复数

$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{1.12}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \tag{1.13}$$

从式(1.12)、式(1.13)可以看出:z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸长(缩短)到$|z_2|$倍,然后再逆时针方向旋转一个角度 θ_2 得到的.

由 $z_1=\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2(z_2\neq0)$及式(1.12)、式(1.13)得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.14}$$

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2 \tag{1.15}$$

即两个复数商的模等于它们模的商,商的辐角等于它们辐角的差.

注意,要正确理解上面两个关于辐角的等式(1.13)和式(1.15)。由于辐角的多值性,它们是表达集合相等的式子,应理解为对应于 $\operatorname{Arg} z_1z_2\left(\text{或 }\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}\right)$ 的任一值,一定可以找到 $\operatorname{Arg} z_1$和 $\operatorname{Arg} z_2$ 的各一个值使等式相等,并且反过来也成立.

例 1.4 证明三角形内角之和等于 π.

证 设三角形三个顶点为 z_1,z_2,z_3,对应的三个顶角分别为 α,β,γ,则 α,β,γ 均为$(0,\pi)$ 之间的角(见图 1-3).

由复数乘法的几何意义,知

$$\alpha=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},\quad \beta=\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2},\quad \gamma=\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$$

由于

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=-1$$

所以

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\pi+2l\pi$$

其中,l 为某个整数.因为 $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$,所以 $l=0$,即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

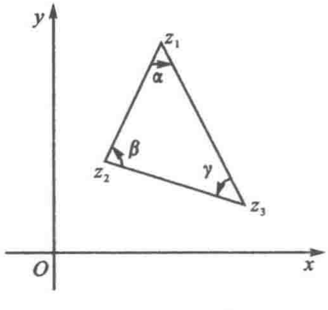

图 1-3 例 1.4 的图形