

单尊

解题研究
丛书

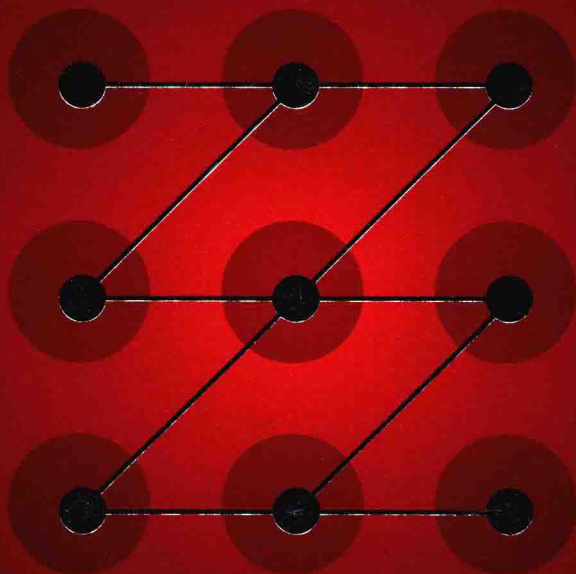
单尊◎著

解题研究

一本武功秘籍！找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

JIETI
YANJIU



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE



单樽◎著

解题研究



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

解题研究 / 单增著. —上海:上海教育出版社,2016.11

(单增解题研究丛书)

ISBN 978-7-5444-7005-6

I.①解... II.①单... III.①数学—解法 IV.①01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第284035号

策划编辑 刘祖希

责任编辑 张莹莹

封面设计 陆 弦

单增解题研究丛书

解题研究

单 增 著

出 版 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易 文 网 www.ewen.co
地 址 上海市永福路 123 号
邮 编 200031
发 行 上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷 上海盛通时代印刷有限公司
开 本 700×1000 1/16 印张 18.25 插页 1
版 次 2016 年 12 月第 1 版
印 次 2016 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-7005-6/G·5767
定 价 48.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

第一章 与同学们谈解题

1 解题的重要性	3
2 解题必须实践	3
3 信心与决心	4
4 兴趣	5
5 专心致志	7
6 打好基础	7
7 简单技巧	11
8 应用题	14
9 常规问题	16
10 简单、自然	18
11 一个实际例子	23
12 字母的使用	23
13 代数方法(一)	26
14 代数方法(二)	28
15 几何计算	30
16 分析法	32

第二章 喜爱数学的同学

1 做有质量的问题	37
-----------	----

2 基本量	40
3 从简单的做起	42
4 寻找规律	45
5 简单自然、直剖核心	47
6 跟着感觉走	51
7 思则有路	53
8 要有好的想法(一)	56
9 要有好的想法(二)	58
10 从不同的角度看问题	61
11 创造条件	63
12 非智力因素	65

第三章 解题的基本知识

1 问题是数学的心脏	69
2 解题是数学的特点	70
3 教会思考	73
4 解题必须实践	75
5 问题的种类	78
6 解题的步骤	80
7 弄清问题	82
8 拟定计划	86
9 实现计划	89
10 总结(一)	93
11 总结(二)	96
12 12条解题要诀	98

第四章 修改解答

1 笨拙的解答	103
2 不要滥用反证法	105
3 直接去做	107
4 尽信,则不如无	109
5 对照比较(一)	114
6 对照比较(二)	119
7 弄清实质	123
8 文章病院	127
9 自己的毛病	130

第五章 10道问题

1 上下求索	137
2 学思结合	138
3 逐步逼近	140
4 比赛日程	142
5 双轨迹模式	144
6 集成块与组合拳	146
7 算两次	148
8 平方数与平方式	150
9 谋定而后动	153
10 电阻问题	156

第六章 数学教师

1 解题的重要性	161
----------	-----

2 教师的素养	163
3 教师的优势	164
4 理解题意	165
5 变更问题	169
6 从何入手	172
7 用不同的观点看问题	176
8 拟定与实现计划	181
9 技巧	184
10 不必“为技巧而技巧”	188
11 简单自然	191
12 关于一题多解	199
13 探索法	206
14 慎于初战	210
15 加阶梯	214
16 非数学因素	217

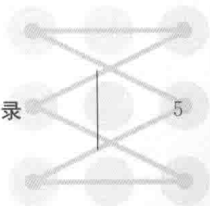
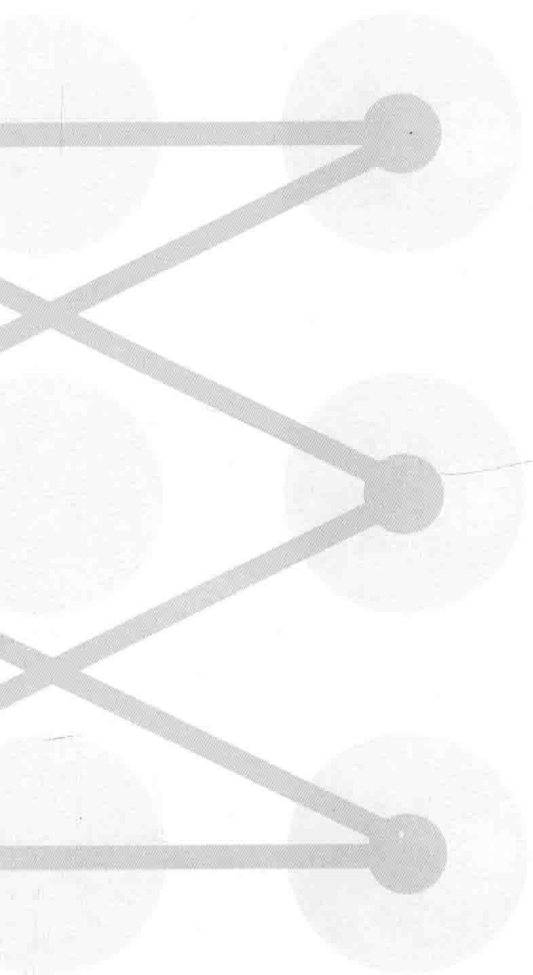
第七章 谈谈命题

1 关于题库	223
2 处处留心	224
3 旧瓶新酒	229
4 源头活水	237
5 可上可下	239
6 苦心孤诣	244
7 小心出错	248
8 问题的背景	252

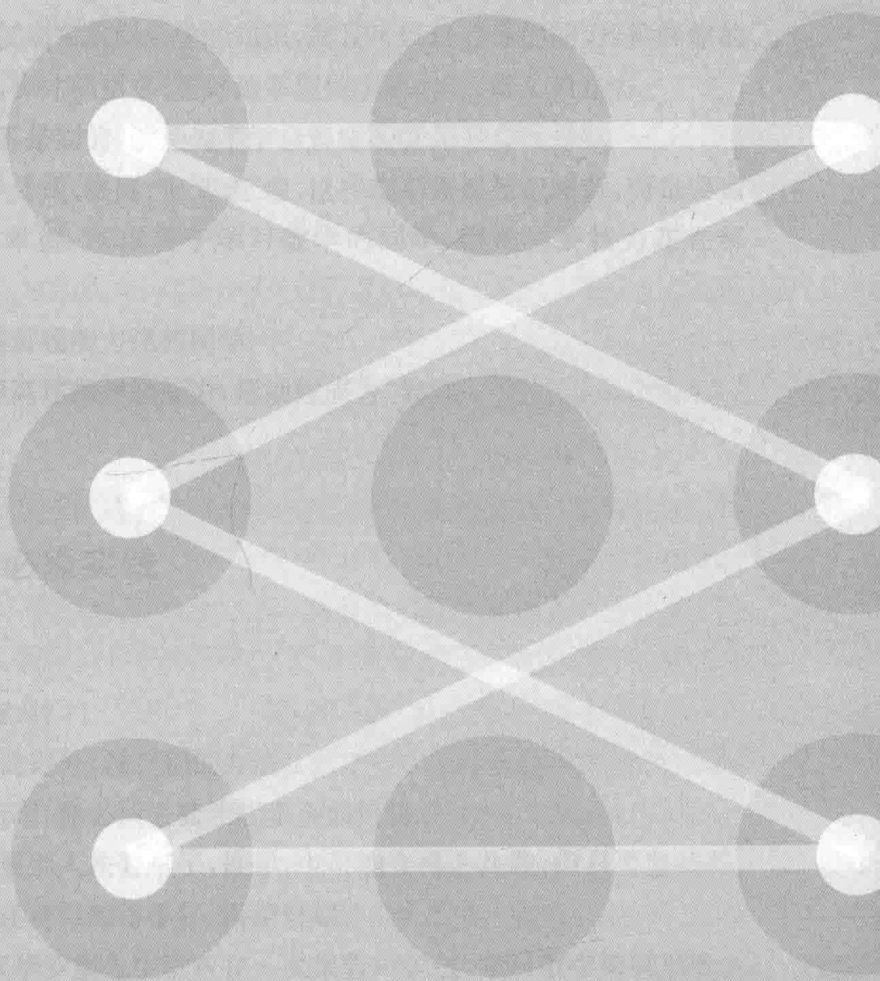
9 不适当的问题	258
10 小题大做	263
11 一道试题的编制	266

第八章 波利亚及其解题理论

1 波利亚的生平	273
2 波利亚的教育论著(一)	275
3 波利亚的教育论著(二)	277
4 波利亚的教育论著(三)	279
5 波利亚的教育论著(四)	281



第一章 与同学们谈解题



这一部分,与广大同学谈如何解题.所谈的是解题的基本内容,所举的例题也都是比较容易的.

1

解题的重要性

我曾经问一些初中同学：

“你们觉得数学的特点是什么？”

回答是：

“数学有很多习题。”

回答完全正确。

物理、化学、生物也有一些习题，但数量远远少于数学，“花样”更不及数学那样变化万千。对于物理、化学、生物来说，培养动手做实验的能力，比培养解题能力更为重要。

数学的习题，不仅用来巩固所学的知识，而且可以培养你的能力，发展你的智慧。只有通过解题，你才能更多、更好地掌握数学的内容、意义和方法。

学数学的目的，不是别的，就是为了学会解题。

数学书中有不少公式、法则、定义、定理，这些都不需要死记硬背，而是要通过解题逐步地理解、掌握。所以善于学习数学的同学，都把主要精力花在解题上。

“数学尖子”就是解题能力强的同学。

希望这本书能提高你的解题能力，帮助你成为“数学尖子”。

2

解题必须实践

怎样提高解题能力？

必须多做题。除此以外，没有别的办法。

这就像学骑自行车，你必须去骑才能学会如何骑。

开始，你可能需要别人扶着车子，推你，也可能会摔上几跤，但只要坚持骑，终究会学会的，而且还可以骑得很好，潇洒自如。

我国著名数学家华罗庚先生就曾在一次报告中说过，学习数学要做到熟练

化.熟能生巧,进而出神入化.而要这样,就必须多练.

首先要做一定数量的基本题,打好基本功.在此基础上,再做一些较有技巧的问题.

没有一定的数量就不可能熟练.但更重要的是通过这一定数量的题,掌握基本的运算技能、基本的解题方法,做到纯熟自如.

要不断地提高自己的解题能力,决不要老是简单地重复,一遍又一遍地做那些已经掌握了了的习题.更重要的是习题的质量,要做一些有变化的、有技巧的题,掌握更多的新方法、新技巧.

所谓“数学尖子”,无非是多做了一些题,掌握了一些解题方法.只要努力去做题,你也能成为班上的“数学尖子”.

3

信心与决心

应当对自己充满信心.

面对一道数学题,应当满怀信心:

“我能够解出来.”

“李雪花能解出来,我为什么解不出来?”

“江小毛能解出来,我更应该能解出来.”

你没有哪一点比别人差,甚至还有许多别人没有的优点.所以,不必气馁,至少应当努力“尝试”一下.

英国女诗人罗赛蒂(C. C. Rossetti, 1830—1894)有一首小诗“我想试试”(I'll Try)写得很好:

那个说“我想试试”的小孩,

他将登上山巅,

那个说“我不成”的小孩,

在山下停步不前.

“我想试试”每天办成很多事,

“我不成”就真一事无成.

因此你务必说“我想试试”，

将“我不成”弃于埃尘。

当然，一次尝试未必就能完全成功，往往要一再尝试，反复多次，直至成功。应当知道：“自古成功在尝试”，“失败是成功之母”。无论谁都不免会遇到挫折，这是十分正常的，千万不要灰心丧气，曙光就在前头，或许胜利已经向你招手，只需要再努力一下。

决心也很重要。

不痛下决心，事情是办不好的。

如果你的家离学校不远，或者有班车直达，可能你不一定去学骑自行车，但如果你升入一所新学校，非骑自行车不可，那么你就会下决心去学骑车，而且一定能够学会。

很多事情都是“逼上梁山”的，如果明天就要交作业，周围又没有人能帮你做，那么你只好自己去解题。逼一逼，困难的题也就解出来了。

班上的“数学尖子”，由于没有比他更强的同学，别人遇上难题可以问他，他自己遇到难题只能自己去想，日久天长，他解难题的能力就越来越强，其实也是“逼”出来的。

项羽与秦兵决战，破釜沉舟。韩信攻打赵国，背水结阵。兵法上称为“置之死地而后生”，即没有其他选择，只能努力向前。

应当自觉地自己“逼”自己。下定决心，努力进取，就没有不能克服的困难。

4 兴趣

学习要有兴趣。

如果你对一件事有兴趣，那么你就会“乐此不疲”，比如你喜欢唱歌、打球或者下棋，那么你花很多时间唱歌、打球或者下棋，不但不会觉得累，反而觉得十分愉快。

如果你对数学有兴趣，那么你就会解很多数学题，越做越想做，根本不觉得是什么“负担”。

特别是一道困难的问题,冥思苦想,久久不能解决,突然灵机一动,想了出来,这时你一定觉得非常的快乐.而这种乐趣,是其他任何东西所不能代替的,只要你有过这种乐趣,你就会喜爱数学、喜爱解题.

我相信每一位数学家都有过上述体验,例子就不必举了.这里举一位现代人文科学的宗师胡适(1891—1962)作例子,看看他是怎么说的:

“我这时(注:胡适这时大约十四五岁)对于算学最感觉兴趣,常常在宿舍熄灯之后,起来演习数学问题.卧房里没有桌子,我想出一个法子来,把蜡烛放在帐子外床架上,我伏在被窝里,仰起头来,把石板放在枕头上做算题.因为下半年要跳过一班,所以我须要自己补习代数.我买了一部丁福保先生编的代数书,在一个夏天把初等代数习完了,下半年安然升班.”

兴趣生努力,努力生兴趣.

如果你原来对数学没有兴趣,那么可以逐步培养,逐步建立起兴趣来.

数学其实就是一种智力的游戏.

你可以先做一些有趣的智力题(也就是数学题).

比如:四张扑克牌,点数分别为:

8,2,4,9.

如何用它们进行四则运算(加减乘除),使得数为24(每种运算用的次数不限,但每个数只能用一次)?

再如:五只袜子两种颜色,那么其中至少有几只袜子同一种颜色?

这方面的书很多,如任宏硕的《奥林匹克金钥匙》(海南摄影美术出版社出版,内容很浅,小学三年级以下就可以读,但图文并茂,不仅有趣,而且有深刻的数学内容),单墀数学科普著作选第一辑《趣题巧解》《快乐的数学》等(江苏教育出版社出版)等,都可以读一读.

你可以将每一道数学题作为对你的智力的挑战,你应当有信心,战而胜之.

开始做的题不要难,不要好高骛远,应当做力所能及的,甚至做一些低年级的题,增强信心,增加兴趣(例如24点,就是学过除法后人人可做的游戏).

小学的应用题,初中的平面几何题,竞赛中的一些动手做的问题,都有助于提高兴趣(后面我们将会说到一些例子).

“学海无涯苦作舟”,这句话我很不赞成,其中的“苦”字应当改成“乐”字,只有有了兴趣,你才能在“学海”中自在地遨游.

5

专心致志

解题时必须全神贯注,全身心地投入。

“不专心致志则不得焉”。如果在做作业时,吃东西、看电视、听别人聊天,思想不集中,那么时间花得多,作业也做不好,久而久之,形成做事不专心的坏习惯,而坏习惯一旦形成后,不花大力气就很难改正。

做作业时,思想应当高度集中,心无旁骛,争取在尽量短的时间内,“三下五除二”,很快完成作业,然后再吃东西、看电视或从事其他活动。

“学习时学习,玩的时候玩”,结果学得好,玩得也痛快;“学习时玩,玩的时候又担心功课未做好”,结果学得不好,玩得也不痛快。

学习好的同学,并不一定花很多的时间学习,诀窍在于合理使用时间,提高学习效率;而要提高效率,就必须专心致志。

解数学题,必须全力以赴,即使是常规问题,也需要开动脑筋想一想:有哪几条路可走? 有哪一个例题可以仿效(最好能想一想有没有更好的解法)? 选好解题路线之后,你应小心翼翼,在计算或推理中不可出错。有时“走错一步,满盘皆输”,所以切不可粗枝大叶,掉以轻心(细心也是一种需要从小培养的“习惯”)。

思想不集中,就容易出错,而且会一错再错,做错了推倒重来,显然比一次做好花的时间精力要多。应当力求一次做好,不要老是改来改去。

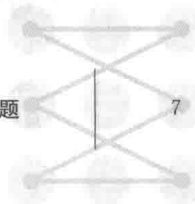
解题需要专心致志,反过来,解题也有助于培养做事专心致志的习惯。多解数学题,就不会粗心浮气,焦躁不安,这也是解题的一个功效。

6

打好基础

“万丈高楼平地起”。要提高解题能力,首先要把简单的基本题做好。

最基本的问题是四则运算。运算,一要准确,二要迅速。由于计算器的普遍使用,运算的准确迅速已经不再成为严重问题,更应当留心的是如何掌握运算规律,进行巧算。



例1 计算 $8 \times 21 \times 25$.

解 $8 \times 21 \times 25 = 4200$.

这道题应当全用心算： $4 \times 25 = 100$ ，从而

$$8 \times 21 \times 25 = (2 \times 21) \times (4 \times 25) = 4200.$$

既然用心算，就没有必要再写出所谓过程。这种“过程”必须“消灭”，因为它是不该有的“废招”。废招过多，既浪费时间，也影响解题能力的提高。

说到“废招”，不由想到金庸的一本小说《连城诀》。其中“师祖梅念笙早瞧出三个徒儿心术不正，在传授之时故意引他们走上了剑术的歪路，而万震山与戚长发在教徒儿之时，或有意或无意的，引他们在歪路上走得更远”。于是徒弟们学的全是中看不中用的剑招，明明可以一剑直接刺去，却偏要转七个圈子。如果对方直接一刀挥来，早就头颅落地了。可见废招十分害人。

我们的老师当然不会故意教同学废招，但在初学阶段，也许会作一些分析式的讲解，例如合并同类项：

$$5x - 3x = (5 - 3)x = 2x.$$

开始这样讲，是为了说清道理，但中间一步应当心算，在熟练之后，必须省掉。可惜有的同学不懂这个道理，我就遇到一位高三学生，竟然还这样做：

$$\begin{aligned} & 15x - 3x + 2x \\ &= (15 - 3)x + 2x \\ &= 12x + 2x \\ &= (12 + 2)x \\ &= 14x. \end{aligned}$$

这种问题如果不能一步完成，数学就无法学好。因为别人每走一步，你要走四五步，绝对跟不上。反过来，如果你能够注意自觉地减少废招，经常“三步并作两步”，那么一生中就要节省很多时间，而且思维变得快捷、敏锐，可以将主要力量集中在关键的地方，而不致让枝节拖住后腿。

一个“招式”，老师讲解时，可以分拆成许多“慢动作”，但在运用（对敌）时，却必须“一气呵成”，越快越好。

四则运算的技巧，主要在注意运算定律（交换律、结合律、分配律）与凑整（凑成整十、整百等等），就像例1那样。

初中有理数的运算，多了正负符号。

例2 计算

$$3\frac{1}{4} + (-5\frac{1}{6}) - (-1\frac{3}{4}) - (+3\frac{5}{6}) + (10\frac{3}{7}) - (-12\frac{4}{7}) + 4\frac{7}{25} + 11\frac{4}{13} + 8\frac{5}{26} - 10\frac{2}{5}.$$

这道题不难,但如果从左到右一步一步地做,也是非常麻烦的,怎样才能做得简单呢?

首先注意有理数有正、负之分,同号两数相加是相加;异号两数相加,实质上是绝对值相减.于是,可以在草稿纸上将正数、负数各写一列

+	-
$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{6}$
$1\frac{3}{4}$	$3\frac{5}{6}$
$10\frac{3}{7}$	$10\frac{2}{5}$
$12\frac{4}{7}$	
$4\frac{7}{25}$	
$11\frac{4}{13}$	
$8\frac{5}{26}$	

左边的3,10分别与右边的3,10抵消.左边1,4的和与右边的5抵消.左边的 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 合并成1, $\frac{3}{7}$ 与 $\frac{4}{7}$ 合并成1,右边的 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{5}{6}$ 合并成1.这样,将两边的整数相加减得整数32.然后,左边 $\frac{4}{13}$ 与 $\frac{5}{26}$ 合并成 $\frac{1}{2}$,而右边 $\frac{2}{5}$ 减左边 $\frac{7}{25}$ 得 $\frac{3}{25}$, $\frac{1}{2}$ 减去 $\frac{3}{25}$ 得 $\frac{19}{50}$,所以答案为 $32\frac{19}{50}$.

例2人人会做,但其中却有一些值得注意的地方.

首先,我们的目标是得出最终结果,中间的步骤是不重要的.上面的做法不