陈庆益

一般线性偏微分方程

高等教育出版社

一般线性偏微分方程

陈庆益

本书是作者在兰州大学多年讲义的基础上编写的，书中介绍了线性偏微分方程的一般理论．所叙述的基本结果与方法对掌握线性偏微分方程的现代理论、从事进一步的研究都是十分重要的．其中第一章在数学分析的水平上叙述了广义函数理论，第二章介绍了拟微分算子，这两方面都是近年来研究偏微分方程及其它分支的有力工具．随后四章介绍了一般线性偏微分方程理论的几个主要方面的结果，这些既是理论方面的重大问题，又有相应的实际指导意义．

本书可供数学系偏微分方程方向的高年级大学生作选修课教材或研究生作必修课教材，也可供教师、科研工作者参考．

一般线性偏微分方程

陈 庆 益

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.375 字数 260 000

1987 年 4 月第 1 版 1987 年 4 月第 1 次印刷

印数 00 001— 4 120

书号 13010·01374 定价2.15元

序

偏微分方程研究已有近三百年的历史．由于它与各种技术科学及多种理论科学的紧密联系，从十九世纪以来，它一直是数学科学的中心分支之一．但也由于它的复杂性与困难性，它甚少全面的、一般的理论体系，远不如比它出现较迟的单复变函数以及出现更迟的近世代数、拓扑学、实变函数与泛函分析等分支．

直到本世纪五十年代中，利用四十年代已经成熟的局部凸空间理论及广义函数理论，常系数线性偏微分方程研究才形成一般理论；特别是分别在六十年代中及七十年代初出现的拟微分算子及Fourier积分算子理论，为一般变系数线性偏微分方程研究提供了有力工具，使线性偏微分方程一般理论得到重大进展．这种一般理论，近年来在某些理论科学及应用科学中得到反映．

本书试图为进入一般线性偏微分方程研究作一定准备．为了掌握工具，首先在第一及第二章分别介绍了分布理论及拟微分算子理论，然后进入一般线性偏微分方程理论的几个主要方面：解的存在性问题，解的光滑性问题、解的结构问题及适定定解问题．虽然在

Hörmander(霍曼德尔)，《线性偏微分算子》；

Шилов，《Матем. Анализ, 2ой Спец. Курс》；

Friedman，《Generalized Functions and Partial Differential Equations》

诸书中分别有不同的部分讨论，但这几本书各有所偏重，不够全面；而且有些部分篇幅甚大，失之繁琐，倒不如本书开门见山，易于掌握全貌．此外，本书还收集了一些只见于期刊的材料，而是上引诸书所未论述的．

编者于1964年及1965年曾两次为兰州大学数学专业偏微分方程专门组学生讲授过本书的基本部分；1978年增加一些新材料，于1979—1983年给研究生讲授多次．本书正是在这个基础上整理修订的．由于编者学识有限，错误及不妥之处有所难免，希望读者提出批评意见．

为便于参考，书中引用而现有中文书籍不易查到的几个定理，如准解析函数论中的Carleman定理、双线性映射方面的Bourbaki定理及代数判定方面的Seidenberg定理，都作为附录列在有关章末．

陈庆益

1983年九月

目　录

第1章　广义函数

广义函数理论是近年来用以处理一般线性偏微分方程的有力工具，所以本书首先对它作出较完备的介绍．为了避免牵涉过多的考虑，本章基本上在数学分析水平上进行讨论，最多用到线性泛函分析的一些初步知识．

1.1. 检试函数空间

广义函数有多种理解方式，本书采用优越性较大的连续线性泛函观点．所以本节先考察广义函数所作用的函数空间：检试空间或基本空间．

1.1.1. 空间$\mathscr{D}$

先引进一些通用的记法．用$x=(x_1,\cdots,x_n)$记n维实空间$\mathbf{R}^n$的点，用$z=x+iy=(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)$记$n$维复空间$\mathbf{C}^n$的点，用$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$表示$n$重指标，即$n$重自然数集合$\mathbf{N}^n$的点，称$|\alpha|\equiv\alpha_1+\cdots+\alpha_n$为$\alpha$的长度；记

$$D_x^\alpha\equiv\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n};\qquad \partial_x^\alpha\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n};$$

$$D_x\equiv\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right);\qquad \partial_x\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

$$x^\alpha\equiv x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n};\ dx=dx_1\cdots dx_n,$$

以及类似的表示：$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}_n$，$\zeta=\xi+i\eta=(\xi_1+i\eta_1,\cdots,\xi_n+i\eta_n)\in\mathbf{C}_n$；这里对$\mathbf{R}_n$及$\mathbf{C}_n$用足标$n$，为的是避免把$\mathbf{R}^n(x)$（$\mathbf{C}^n(z)$）及$\mathbf{R}^n(\xi)$（$\mathbf{C}^n(\zeta)$）同时简记成$R^n(\mathbf{C}^n)$所易引起的混淆，同时也为了表明$x$及$\xi$间的代数对偶关系：

$$x\xi \equiv x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n.$$

记号 $D_\xi^\alpha, \partial_\xi^\alpha, D_\xi$ 及 ∂_ξ 等的意义是类似的. 还用到记法:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!; \quad \binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

以及类似的用法.

记在 $\mathbf{R}^n$ 中无穷可微而在矩块

$$Q(a) \equiv \{x: x \in \mathbf{R}^n, |x_j| \leqslant a_j, 0 < a_j < +\infty, j = 1, \cdots, n\}$$

外恒等于零的实或复值函数的全体为 $D(a)$, $\mathscr{D}(a)$, $C_0^\infty(a)$ 或 $C_c^\infty(a)$. 它有自然的线性空间结构: 对任何实或复数 α 与 β 及 $\mathscr{D}(a)$ 中任二函数 φ 与 ψ, 恒有 $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathscr{D}(a)$. 简记为:

$$\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathscr{D}(a) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(a).$$

在 $\mathscr{D}(a)$ 中可如下引进函数列的收敛性: 若列 $\{\varphi_j(x)\} \subset \mathscr{D}(a)$ 且各阶导数列

$$\{\partial^\alpha \varphi_j\} \qquad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant \infty$$

都在 $Q(a)$ 上一致收敛于某个函数 $\varphi(x)$ 及其相应导数 $\partial^\alpha\varphi$, 即称列 $\{\varphi_j\}$ 在 $\mathscr{D}(a)$ 中收敛于 φ, 记作 $\varphi_j \to \varphi(\mathscr{D}(a))$; 在不会引起误会的情形, 简记作 $\varphi_j \to \varphi$.

$\mathscr{D}(a)$ 中的上述收敛性也可按如下的范列

$$\|\varphi\|_k \equiv \sup_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in Q(a)} |\partial^\alpha \varphi(x)|, k = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

中每个范的收敛性来定义.

注意 $\mathscr{D}(a)$ 中的这种收敛性要求是十分强的. 正是这样强的收敛性, 保证了空间 $\mathscr{D}(a)$ 的一些重要性质. 首先可断定 $\mathscr{D}(a)$ 是一个完备空间: 即 $\mathscr{D}(a)$ 中任一个基本列 $\{\varphi_j\}$ 必有极限元 $\varphi \in \mathscr{D}(a)$; 这里 $\mathscr{D}(a)$ 中基本列 $\{\varphi_j\}$ 定义为具如下性质的列: 对任意正数列 $\{\varepsilon_k\}$, 有正整数列 $\{l_k(\varepsilon_k)\}$, 使

$$\|\varphi_m - \varphi_l\|_k < \varepsilon_k, \forall m, l \geqslant l_k; k = 0, 1, \cdots,$$

这表明列$\{\varphi_j\}$及其各阶导数列$\{\partial^\alpha\varphi_j\}$在$Q(a)$上都是数学分析中讲到的通常的基本列. 根据数学分析中的讨论知极限$\lim\limits_{j\to\infty}\partial^\alpha\varphi_j$对所有的$\alpha\in N^n$都相应存在,且若记$\varphi(x)=\lim\limits_{j\to\infty}\varphi_j(x)$,则对每个$\alpha\in\mathbf{N}^n$,相应有$\lim\limits_{j\to\infty}\partial^\alpha\varphi_j=\partial^\alpha\varphi$. 故极限函数$\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,即$\varphi$为$\mathbf{R}^n$中无穷可微函数,且$\varphi$显然在$Q(a)$外恒等于零. 因此,$\varphi\in\mathscr{D}(a)$. 故$\mathscr{D}(a)$在上述收敛性定义下为完备空间.

其次,还可证明:$\mathscr{D}(a)$中的任一有界集为相对紧集,即从任一有界集中必可选出收敛的子列;至于$\mathscr{D}(a)$中的有界集A,则如下定义:

$$A=\{\varphi:\varphi\in\mathscr{D}(a),\|\varphi\|_k\leqslant C_k,k=0,1,\cdots\},\tag{2}$$

其中$\{C_k\}$为有限正数列. 事实上,由$\|\varphi\|_0\leqslant C_0$知集$A$在数学分析中讲到的意义下为一致有界的;而由$\|\varphi\|_1\leqslant C_1$知对任一个$\varphi\in A$有:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant K\sup_{x'\in Q(a)}|\partial\varphi(x')|\leqslant KC_1,$$

这里$K=n\max\limits_j\max\limits_{Q(a)}|x_j-y_j|$. 故函数集$A$为等度连续的. 根据常微分方程或泛函分析中讲到的Ascoli-Arzela定理及$\mathscr{D}(a)$的完备性知,集A有收敛的子列$\{\varphi_{1j}\}$. 这个列作为$\mathscr{D}(a)$中的有界集,特别有如下性质:

$$\|\varphi_{1j}\|_1\leqslant C_1,\ \|\varphi_{1j}\|_2\leqslant C_2.$$

仿照上面的讨论,知$\{\varphi_{1j}\}$有子列$\{\varphi_{2j}\}$具性质:$\{\varphi_{2j}\}$及其一阶导数列$\{\partial\varphi_{2j}\}$都在$Q(a)$上一致收敛. 类似地讨论下去,知A有子列$\{\varphi_{lj}\}$具性质:$\{\varphi_{lj}\}$及其l阶以下导数列$\{\partial^\alpha\varphi_{lj}\}$,$0\leqslant|\alpha|\leqslant l$,都在$Q(a)$上一致收敛. 现在应用对角线方法从列阵

$$\begin{array}{ccccc}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

$$\varphi_{l1}\ \varphi_{l2}\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

中选出对角列$\{\varphi_{jj}\}$，即知其各阶导数列都在$Q(a)$上一致收敛．故$\mathscr{D}(a)$中有界集为相对紧集．仿照复变函数论中关于解析函数集的Montel定理，可简称具上述性质(凡有界集为相对紧集)的空间为Montel空间或M空间．

剩下还须提到，$\mathscr{D}(a)$中确有很多不恒等于零的元素．为此可核验：函数

$$\varphi(x;A,b,c)=\begin{cases}A\exp^{\frac{-c^2}{b^2-r^2}}, & r<b,\\ 0, & r\geqslant b>0,\end{cases}$$

$$r^2=|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

当b充分小时属于$\mathscr{D}(a)$，这里b及c为任意实数，A为任意复数．此外，对任何一个连续函数

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\Omega_1\\ 0, x\notin\Omega_2\end{cases}\ \bar{\Omega}_1\subset\Omega_2, \bar{\Omega}_2\subset\Omega,$$

这里Ω为$Q(a)$中某个域(连通开集)，$\bar{\Omega}_j$为域Ω_j的闭包，$j=1,2$，也可核验：f的"光滑化"$f_\varepsilon(x)$：

$$f_\varepsilon(x)\equiv\int_{\Omega_2}f(\xi)\varphi(x-\xi;A,\varepsilon,\varepsilon)d\xi\equiv\varphi*f, \tag{3}$$

当ε充分小时属于$\mathscr{D}(a)$．为核验这一点，只须注意积分域Ω_2为有界域，故可在积分号内关于参变量x对φ微分任何次；且因f在Ω_2外为零，φ当$|x-\xi|\geqslant\varepsilon$时为零，故$f_\varepsilon$当$x$在$\Omega_\varepsilon=\{x: |x-y|<\varepsilon, \forall y\in\Omega_2\}$外时为零．$\Omega_\varepsilon$称为$\Omega_2$的$\varepsilon$邻域．

由于A,b,c及f(即Ω,Ω_1,Ω_2)的任意性，可见$\mathscr{D}(a)$中有相当多的非零元素．有时取定$A^{-1}=\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\exp\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-r^2}dx$．①

① 这里取定A，为的是使$\int\varphi dx=1$，以便$f_\varepsilon\to f(\varepsilon\to0)$，见随后的讨论．

积分(3)中函数 $\varphi(x; A, \varepsilon, \varepsilon)$ 称为均化核或光滑化核.

对 $\mathbf{R}^n$ 中任一有界闭域 K，可仿上定义空间$\mathscr{D}(K)$及其中的收敛性.

定义 1　记在 $\mathbf{R}^n$ 中无穷可微而在不同有界域外恒等于零的所有实或复值函数的全体为$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $D(\mathbf{R}^n)$，$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$或 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，有时简记为$\mathscr{D}$，D，C_0^∞ 或 C_c^∞，而略去 $\mathbf{R}^n$. 它可作为可列个空间 $\mathscr{D}(a_j)$的并: $\mathscr{D}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{D}(a_j)$, 这里 a_j 为方块:

$$Q(a_j)=\{x: x\in\mathbf{R}^n, |x_k|\leqslant a_j, k=1,\cdots,n\},$$

$$0<a_1<a_2<\cdots a_j\to\infty.$$

$\mathscr{D}$中收敛性如下定义：若列$\{\varphi_j\}$中所有函数同属于某个$\mathscr{D}(a_m)$并在其中收敛于 $\varphi\in\mathscr{D}(a_m)$，即称$\{\varphi_j\}$在$\mathscr{D}$中收敛于 φ，记作 $\varphi_j\to\varphi(\mathscr{D})$或简记为 $\varphi_j\to\varphi$. $\mathscr{D}$中有界集定义为某个 $\mathscr{D}(a_k)$ 中的有界集; $\mathscr{D}$中基本列是某个$\mathscr{D}(a_m)$中的基本列.

注意有显然的包含关系(嵌入):

$$\mathscr{D}(a_1)\subset\mathscr{D}(a_2)\subset\cdots\subset\mathscr{D},$$

且每个嵌入 $\mathscr{D}(a_j)\subset\mathscr{D}(a_{j+1})$ 为连续映射，即嵌入保持收敛性: $\mathscr{D}(a_j)$中收敛列作为$\mathscr{D}(a_{j+1})$中列, 也在$\mathscr{D}(a_{j+1})$中收敛.

定义 2　对 $\mathbf{R}^n$ 中任一个开域Ω(有界或无界), 取有界闭域列$\{K_j\}$, 使 $K_j\to\Omega$, 且具单增性:

$$K_1\subset K_2\subset\cdots.$$

记 $\mathscr{D}(\Omega)=\bigcup_j\mathscr{D}(K_j)$. $\mathscr{D}(\Omega)$也可记作 $D(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$或$C_c^\infty(\Omega)$.

$\mathscr{D}(\Omega)$中收敛性可仿照$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中收敛性定义；$\mathscr{D}(\Omega)$中有界集及基本列也类似地定义.

根据定义, 容易得出如下结论:

定理 1　$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$及$\mathscr{D}(\Omega)$都是完备空间, 且都是$M$空间.

定义 3　函数 $\varphi(x)$的台或支集(support)为点集:

$$\operatorname{supp}\varphi \equiv \mathrm{Cl}\{x : \varphi(x) \neq 0, x \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^n\},$$

这里 $\mathrm{Cl}A$ 表示集 A 的闭包,即含 A 的所有闭集的交.

由定义 3 知: $\mathscr{D}$或 $\mathscr{D}(\Omega)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中所有具紧台(有界闭支集) $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbf{R}^n$或$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$的无穷可微函数组成的空间. $\mathscr{D}$及$\mathscr{D}(\Omega)$是最重要的检试函数空间或基本空间; 其中的函数称为检试函数(test function).

一般地,记紧台含于 $\mathbf{R}^n$ 或Ω的m次连续可微函数(实或复值)的全体为 C_0^m 或 C_c^m;在强调Ω时,则记作 $C_0^m(\Omega)$.

前面用函数 $\varphi(x; A, b, c)$形象地说明$\mathscr{D}$中富有非零元素,下面更从论证方面肯定这一点,而且结果要强得多.

定理 2　$\mathscr{D}$在$C_0^0(\mathbf{R}^n)$中稠,即:任一具紧台的连续函数$f(x) \in C_0^0$,可用$\mathscr{D}$中函数列(3)一致逼近: $f_\varepsilon \to f\,(C_0^0)$, $\varepsilon \to 0$.

证　事实上,由(3)有

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{|x-y| \leqslant \varepsilon} [f(y) - f(x)] \varphi(x-y; A, \varepsilon, \varepsilon)\, dy \right|$$
$$\leqslant \sup_{|x-y| \leqslant \varepsilon} |f(y) - f(x)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

这里用到 f 的连续性及紧台性,并用到性质$\int \varphi\, dy = 1$.

推论 1　$\mathscr{D}$在 $C^0(\mathbf{R}^n)$中稠.

事实上,C_0^0在C^0 中稠. 为证明这一点,对$C^0(\mathbf{R}^n)$中任一函数$g(x)$,只须取 C_0^0 中列 $\left\{ f_\varepsilon\!\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) g(x) \right\}$, f_ε 由(3)定义. 这个列显然在 $\mathbf{R}^n$ 的任一紧集K上一致逼近 f. 既然定理 2 已证明$\mathscr{D}$在 C_0^0 中稠,结合 C_0^0 为 C^0 中稠集这一事实,即知推论成立.

1.1.2. 空间$\mathscr{S}$及 $\mathscr{E}$

检试空间$\mathscr{D}$虽有一些很好的性质,但如以后会见到的,它在 Fourier 变换下不是自同构的; 而 Schwartz 空间$\mathscr{S}$则有这种性

质.

定义 4　在 $\mathbf{R}^n$ 中无穷可微，且当 $|x|\to\infty$ 时连同其各阶导数都比 $|x|^{-1}$ 的任何次幂更快地趋于零的所有实或复值函数的全体，记作 $\mathscr{S}$ 或 S. 它有自然的线性空间结构；其中收敛性如下定义：若对任二指标组 α 及 β，列 $\{x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_j(x)\}$ 当 $j\to\infty$ 时在 $\mathbf{R}^n$ 中一致收敛于零，即称列 $\{\varphi_j\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于零，记作 $\varphi_j\to 0(\mathscr{S})$ 或简记为 $\varphi_j\to 0$，若 $\{\varphi_j-\varphi\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于零，即称列 $\{\varphi_j\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 φ，记作 $\varphi_j\to\varphi(\mathscr{S})$ 或 $\varphi_j\to\varphi$.

为便于讨论，也可仿照(1)，在 $\mathscr{S}$ 中引进范列：

$$\|\varphi\|_k\equiv\sup_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant k}\ \sup_{\mathbf{R}^n}|x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi(x)|,\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{4}$$

类似于对 $\mathscr{D}(a)$ 的讨论，可得如下结果.

定理 3　$\mathscr{S}$ 为完备空间；它也是 M 空间.

显然有包含关系

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{S},$$

故 $\mathscr{S}$ 为非空的；$\mathscr{S}$ 中不属于 $\mathscr{D}$ 的函数有 $Ae^{-b^2|x|^2}(b^2>0)$ 等. 但仍可证明如下的结果.

定理 4　$\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{S}$ 中稠.

证　取 $\mathscr{D}$ 中元 $e_1(x)$，使

$$e_1(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

这种函数除了可以由(3)给出外，还可具体写出一个如下：

$$e_1(x)=\begin{cases}1 & ,|x|\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_{|x|}^{2}e^{\frac{1}{(s-1)(s-2)}}ds\Big/\int_{1}^{2}e^{\frac{1}{(s-1)(s-2)}}ds, & 1\leqslant|x|\leqslant 2,\\ 0 & ,2\leqslant|x|.\end{cases}$$

记

$$e_j(x)=e_1(|x|/j),$$

有 $e_j(x)\in\mathscr{D}$，且当 $|x|\leqslant j$ 时，$e_j(x)=1$；当 $|x|\geqslant 2j$ 时，$e_j(x)\equiv 0$；此外，各阶导数 $\partial^\alpha e_j(x)$ 关于 j 一致有界：

$$|\partial^\alpha e_j(x)|=\left|\partial_x^\alpha e_1\left(\frac{|x|}{j}\right)\right|\Big/ j^{|\alpha|}.$$

故对 $\mathscr{S}$ 中任一函数 φ，有

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)e_j(x)\in\mathscr{D},\ j=1,2,\cdots.$$

由乘积的 Leibniz 微分法则及 $\partial^\alpha e_j(x)$ 对 j 的一致有界性，知有

$$\varphi_j(x)\to\varphi(x)\ \ (\mathscr{S})\ \ (j\to\infty).$$

注 1　若 $\psi_j\to\psi(\mathscr{D})$，显然有 $\psi_j\to\psi(\mathscr{S})$. 故 $\mathscr{D}$ 嵌入 $\mathscr{S}$ 中保持收敛性，即：$\mathscr{D}$ 中收敛性强于 $\mathscr{S}$ 中收敛性.

$\mathscr{S}$ 也是一个重要的检试空间——急降检试函数空间. 下面的基本空间 $\mathscr{E}$ 也是常用的.

定义 5　记在 $\mathbf{R}^n$ 中无穷可微的所有实或复值函数的全体为 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 或 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$，简记作 $\mathscr{E}$ 或 C^∞. 它也有自然的线性空间结构；其中收敛性如下定义：若 $\mathscr{E}$ 中列 $\{\varphi_j\}$ 及其各阶导数列 $\{\partial^\alpha\varphi_j\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的每个有界闭域上一致收敛于 φ 及其相应导数 $\partial^\alpha\varphi$，即称列 $\{\varphi_j\}$ 在 $\mathscr{E}$ 中收敛于 φ，记作 $\varphi_j\to\varphi(\mathscr{E})$，或在不引起误会时，简记为 $\varphi_j\to\varphi$. 可类似定义基本列等.

若取 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭域的单增列 $\{K_j\}$，使 $\mathbf{R}^n$ 中任一有界闭域 K 必含于某个 K_j 中，则可在 $\mathscr{E}$ 中引进范列：

$$\|\varphi\|_k\equiv\sup_{|\alpha|\leqslant k}\ \sup_{K_k}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\ k=1,2,\cdots. \tag{5}$$

仿前讨论，可得

定理 5　$\mathscr{E}$ 为完备空间；它也是 M 空间.

显然有嵌入：

$$\mathscr{S}\subset\mathscr{E},$$

且 $\mathscr{S}$ 中收敛性强于 $\mathscr{E}$ 中收敛性. 利用前面的 $\{e_j(x)\}$，也可证明 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{E}$ 中稠.