刘弘泉 著

高数选讲

哈爾濱工業大學出版社

高数选讲

刘弘泉 著

哈爾濱工業大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高数选讲/刘弘泉著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.3

ISBN 978-7-5603-5894-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 053198 号

责任编辑 蒋东翔
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 880mm×1230mm　1/16　印张 11.5　字数 156 千字
版　　次 2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5894-9
印　　数 1～1000 册
定　　价 58.00 元

前　　言

本书前 8 章取材于我撰写的讲义（当时曾得到哈工大研究生院资助），曾为数学系硕士研究生讲过课，就是有关拓扑、线性代数、分析和带参数的常微分方程的内容，是我精心亲自推导的，例如关于常微分方程的解对于参数的光滑依赖性的理论，我是充分理解 Hartman 等人的书后写成的（还记得因为不易理解，我在写作过程中曾搁笔思考达半个月之久），以及我将通常测度理论加以修改，提出新理论，区分了测度是否无穷大的集合，对 Folland 的名著中的某些处理方法加以修改，采用归纳法直接构造 n 维 Euclid 空间上 Lebesgue 测度和 Borel 测度的理论基础，详细给出 n 维 Borel 积分的换元公式（Borel 可测集比 Lebesgue 可测集少，Borel 测度空间不是完备的，我们只能对 Borel 积分建立换元公式，是因为定理 8.39 只对 Borel 可测集成立，由此对于 Lebesgue 积分无法建立 Fubini 型定理），这些在国内中文书中都还是首例．因此，我决定集结成书出版，以便学数学的学者能够从中收益．本书第 9 章的内容，主要取材于我大学时期在中国科大数学系学生油印刊物《蛙鸣》上发表的论文，现在看有较高价值，这次为筹备出版，又有所添加．科大陈发来教授帮助查找我以前在《蛙鸣》上发表的许多论文，在此对他表示感谢．

本书由哈工大数学系资助出版．

作　者

2016 年 3 月

目　录

第 1 章 拓扑空间

定义 1.1　设 X 和 ε 为两个集合，其中 ε 的元素为 X 的某些子集（这时简称 ε 为 X 的一个子集族），并且满足如下条件：

（i）$X \in \varepsilon$，$\phi \in \varepsilon$（ϕ 表示空集）；

（ii）若 $A \in \varepsilon$，$B \in \varepsilon$，则 $A \cap B \in \varepsilon$；

（iii）若 $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$，即 ε_1 为 ε 的任一子集，则

$$\bigcup_{A \in \varepsilon_1} A \in \varepsilon .$$

这时，我们称 ε 为 X 的一个拓扑，称（X，ε）或 X 为一个拓扑空间，并且称 ε 的任一元素为开集.

这里应注意的是，一个空间 X（即集合 X）可以被赋予不只一个拓扑结构. 显然，X 的任两个拓扑 ε_1 与 ε_2 相等，当且仅当它们作为 X 的子集族，包含有同样一些 X 的子集. 另外，若给出一个空间中开集的定义，则也就等价于对 X 定义了一个拓扑结构.

定义 1.2　设 X 为一个拓扑空间，我们称 F 为 X 的闭子集，当且仅当 $X-F$ 为 X 的一个开子集.

定义 1.3　设 X 为一个拓扑空间，$x \in X$. X 的一个子集 V 称为点 x 的一个邻域，当且仅当存在一个 X 的开集 U，使得 $x \in U \subseteq V$，若 V 为开集，则又称开邻域.

定义 1.4　称拓扑空间 X 为一个 Hausdorff 空间，若对于 X 中任二个不同的点 x 与 y，都分别有开邻域 U 与 V，$x \in U$，$y \in V$，使得 $U \cap V = \phi$.

定义 1.5　称拓扑空间 X 中一点 x 为 X 的一个子集 Y 的边界点，如果 x 的任一个开邻域中，都既包含 Y 中的点，又包含 $X-Y$（即 Y 在 X 中的补集）中的点. Y 的全体边界点的集合 ∂Y 称为 Y 的边界. ∂Y 是与 X 有关的也可记为 $\partial_X Y$.

定义 1.6　若 x 为拓扑空间 X 中的一点，Y 为 X 的一个子集，并且存在 x 的一个开邻域 V，使得 $V \subseteq Y$，则称 x 为集 Y 的一个内点. Y 的内点全体的集合记作 Y°，并称为 Y 的内部.

注意：有的书中不采用“邻域”这种术语.

定义 1.7 设 X 为一个拓扑空间，Y 为 X 的任一子集，则称 $Y^{\circ}\bigcup\partial Y$ 为 Y 的闭包，并记作 $\overline{Y}$. 闭包 $\overline{Y}$ 是与 X 有关的“相对闭包”，也可记为 $\overline{Y}(X)$.

关于“闭包”的性质，在本节末的例题中有深入的探讨.

若 X 是一个拓扑空间，Y 是 X 的一个子集，则下面的定理告诉我们，如何由 X 的拓扑“诱导”一个 Y 上的拓扑（这个拓扑称为 Y 的诱导拓扑）.

定理 1.8（i）设 X 为一个拓扑空间，ε 为 X 的相应拓扑，Y 为 X 的任一子集. 若令

$$\varepsilon_1=\left\{A\bigcap Y \mid A\in\varepsilon\right\},$$

则 ε_1 为 Y 的一个拓扑（因而 Y 成为一个拓扑空间）.

（ii）在拓扑 ε_1 的意义之下，Y 中闭集形如 $Y\bigcap B$，B 为 X 中闭集.

证明：（i）只需验证 (Y,ε_1) 满足定义 1.1 中的三条性质，这是很容易的. 在此略去了.（ii）由闭集的定义容易验证. 略去.

对于一个给定的拓扑空间 (X,ε)，ε 中的元素“数量”可能有很多，一个自然的问题是：能否有 ε 的某个子集 ε_1，使得 ε 中的元素都是由 ε_1 中一些元素通过作并集而得来的？这就引出“基”的概念.

定义 1.9 设 (X,ε) 为一个拓扑空间，而 $\delta\subseteq\varepsilon$（即 δ 为 X 的某个开子集族）. 如果对 ε 中任一元素 Y，都存在 $\delta_1\subseteq\delta$，使得

$$Y=\bigcup_{B\in\delta_1}B,$$

则称 δ 为 X 的拓扑 ε 的一个基，或称 δ 为 X 的一个基

这里应注意，我们约定

$$\phi=\bigcup_{B\in\phi}B.$$

定义 1.10 具有一个可数基（即由有限个或可数无穷多个开集构成的基）的拓扑空间 X，被称为是满足第二可数性公理的空间（或 C_2 空间）.

设 δ 为一个拓扑空间 X 的一个基，是否有从某种意义上讲比基 δ 中元素“更少”的 δ 的子集 τ，使得 δ 可由 τ 经过集合的运算产生出来呢？由此引出“子基”的定义.

定义 1.11 设 δ 为拓扑空间 (X,ε) 的一个基，若 $\tau\subseteq\varepsilon$，并且

$$\delta=\{S_1\cap\cdots\cap S_n \mid S_i\in\tau,\quad 1\le i\le n\},$$

则称τ为X的一个子基（由定义，容易知道$\tau\subseteq\delta$）.

如何判断一个拓扑空间的开子集族是否是基？对此，我们有

定理 1.12 拓扑空间(X,ε)的一个开子集族（即以某些开集为元素的集合）δ是拓扑空间X的一个基，当且仅当对于每个$x\in X$以及x的一个开邻域U，都有一个相应的开集V存在，使得$x\in V$，$V\in\delta$且$V\subseteq U$.

证明：（a）条件的充分性. 设W为X中一个开集，对任一$x\in W$，由于W即为x的一个开邻域，由假设可知，存在开集V_x，使得$x\in V_x$，$V_x\in\delta$，且$V_x\subseteq W$. 因此，考虑到所有的$x\in W$，由（$\{x\}$表示独点集）

$$W=\bigcup_{x\in W}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in W}V_x\subseteq W,$$

可知

$$W=\bigcup_{x\in W}V_x.$$

按定义 1.9，这说明δ为基.

（b）条件的必要性. 设$\delta\subseteq\varepsilon$，且$\delta$为$X$的一个基. 设$x\in X$，$U$为$x$的一个开邻域. 按定义 1.3，存在开集$W$，$x\in W\subseteq U$. 由定义 1.9，可知

$$W=\bigcup_{B\in\delta_1}B,$$

其中δ_1为δ的一个子集. 因此，必有$V\in\delta_1$，使得$x\in V$. 由于$\delta_1\subseteq\delta$，V为δ_1中元素，所以$V\in\delta$. 又，显然有 $V\subseteq W\subseteq U$. 因此，条件的必要性也成立. 证毕.

给定一个集合X的满足一定条件的一些子集，我们就可以由它们构作出X的一个拓扑，使得这个拓扑以这些子集为基. 我们有

定理 1.13 设集X的一个子集族δ满足以下条件：

（i）$\bigcup_{B\in\delta}B=X$，

（ii）若$B_1\in\delta$，$B_2\in\delta$，且$B_1\cap B_2\neq\phi$，则对任一点$x\in B_1\cap B_2$，必存在$B\in\delta$，使得

$$x\in B\subset B_1\cap B_2.$$

那么，在X上必存在唯一一个拓扑ε，它以δ为基.反之，若X的一个拓扑ε以δ为基，则它必满足（i）与（ii）.

证明：（a）设集X的一个子集族δ满足条件（i）及（ii）. 令

$$\varepsilon=\{V\subseteq X \mid \text{存在}\delta_1\subseteq\delta\text{，使得}V=\bigcup_{B\in\delta_1}B\}.$$

我们要证明：

（a1）ε为X上的一个拓扑；

（a2）ε以X为基；

（a3）ε是唯一以δ为基的拓扑，即若ε'是另一个X的拓扑，ε'以δ为基，则必 $\varepsilon=\varepsilon'$.（作为X的子集族）.

（a1）的证明：只需验证定义 1.1 中的三条性质，即要证：

（α）$\phi\in\varepsilon$，$X\in\varepsilon$；

（β）若$A\in\varepsilon$，$B\in\varepsilon$，则$A\bigcap B\in\varepsilon$；

（γ）若$\varepsilon_1\in\varepsilon$，则

$$\bigcup_{A\in\varepsilon_1}A\in\varepsilon.$$

（α）的验证：由

$$\phi=\bigcup_{B\in\phi}B,$$

可知$\phi\in\varepsilon$. 由本定理假设条件（i），可知$X\in\varepsilon$.

（β）的验证：若 $A\in\varepsilon$，$B\in\varepsilon$，设

$$A=\bigcup_{B_1\in\delta_1}B_1,\quad B=\bigcup_{B_2\in\delta_2}B_2,$$

其中 $\delta_1\subseteq\delta$，$\delta_2\subseteq\delta$. 则

$$A\bigcap B=\bigcup_{B_1\in\delta_1}\bigcup_{B_2\in\delta_2}(B_1\bigcap B_2). \tag{1}$$

我们要指出的是：若 $B_1 \in \delta_1$，$B_2 \in \delta_2$，则 $B_1 \bigcap B_2 \in \varepsilon$. 事实上，应用假设（ii），对任一 $x \in B_1 \bigcap B_2$，由 $B_1 \in \delta_1$，$B_2 \in \delta_2$，以及 $\delta_1 \subseteq \delta$，$\delta_2 \subseteq \delta$，可知必存在$W_x \in \delta$，使得$x \in W_x \subseteq B_1 \bigcap B_2$. 于是

$$B_1 \bigcap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \bigcap B_2} W_x . \tag{2}$$

因此不难据定义得出：$B_1 \bigcap B_2 \in \varepsilon$. 由（1）及（2），若令

$$\delta_3 = \{W_x \mid x \in B_1 \bigcap B_2,\ B_1 \in \delta_1,\ B_2 \in \delta_2\},$$

则 $\delta_3 \subseteq \delta$，且

$$A \bigcap B = \bigcup_{B_3 \in \delta_3} B_3 . \tag{3}$$

这证明了（β）.

（γ）的验证：当$\varepsilon_1 \in \varepsilon$，且$A \in \varepsilon_1$时，可令

$$A = \bigcup_{B \in \delta_A} B,$$

其中 $\delta_A \subseteq \delta$. 于是

$$\bigcup_{A \in \varepsilon} A = \bigcup_{A \in \varepsilon_1} (\bigcup_{B \in \delta_A} B).$$

由此，不难看出（γ）成立. （a1）得证.

（a2）的证明：按定义 1.9，这是显然的.

（a3）的证明：设ε'为集X的另一拓扑，ε'也以δ为基. 若$A \in \varepsilon$，则

$$A = \bigcup_{B \in \delta_1} B,\quad \delta_1 \subseteq \delta .$$

由于拓扑空间(X, ε')也以δ为基，所以对每个$B \in \delta$，必有$B \in \varepsilon'$. 因此，$A \in \varepsilon'$. 这说明了：$\varepsilon' \subseteq \varepsilon$. 类似地，可证得$\varepsilon \subseteq \varepsilon'$. 所以$\varepsilon = \varepsilon'$.

由（a1），（a2），（a3），可知（a）成立.

（b）设δ为拓扑空间(X, ε)的一个基，我们要证明（i）及（ii）.（i）的证明：按定义 1.9，必有$\delta_1 \subseteq \delta$，使得

$$X = \bigcup_{\delta \in B_1} B \subseteq \bigcup_{\delta \in B} B = X .$$

所以（i）成立.

（ii）的证明：设 $B_1 \in \delta$， $B_2 \in \delta$，且点 $x \in B_1 \bigcap B_2$. 由于 B_1 及 B_2 为开集，所以 $B_1 \bigcap B_2$ 也是开集. 由定理 1.12，必存在 $B \in \delta$，使得

$$x \in B \subseteq B_1 \bigcap B_2.$$

即（ii）成立. 证毕.

定义 1.14　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 n 个空间（集合），则有序元素组的集合.

$$\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in X_i,\ 1 \le i \le n\}$$

被称为 $X_1,\cdots,X_n$ 的积空间，并记作 $X_1 \times \cdots \times X_n$.

如何在拓扑空间的积空间上构作拓扑？对此，我们有

定理 1.15　设 $(X_1,\varepsilon_1),\cdots,(X_n,\varepsilon_n)$ 为 n 个拓扑空间，则积空间

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

有且仅有一个拓扑 ε，它以 X 的子集族

$$\delta = \{V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \mid V_i \in \varepsilon_i,\ 1 \le i \le n\}$$

为一个基.

证明：我们要应用定理 1.13. 为此需验证两条性质：

（i）$\bigcup\limits_{B \in \delta} B = X$，

（ii）任给 $B \in \delta$， $C \in \delta$，以及任一 $x \in B \bigcap C$，必有 $D \in \delta$，使得 $x \in D \subseteq B \bigcap C$.

性质（i）是显然的. 至于性质（ii），设 $x = (x_1,\cdots,x_n)$，以及

$$B = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n,\quad C = W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n.$$

则

$$B \bigcap C = (V_1 \bigcap W_1) \times \cdots \times (V_n \bigcap W_n).$$

由 $V_i \in \varepsilon_i$， $W_i \in \varepsilon_i$，可知， $V_i \bigcap W_i \in \varepsilon_i$，所以 $D = B \bigcap C \in \delta$. 因此（ii）成立.

由（i）及（ii），根据定理 1.13，可知在X上可以定义一个唯一的拓扑，它以δ为基. 证毕.

定义 1.16　由定理 1.15 中构作的拓扑，称为拓扑空间 (X_1,ε_1)，$\cdots$，(X_n,ε_n)的积拓扑.

由定理 1.15 易得

定理 1.17　若拓扑空间$X_1,\cdots,X_n$均为 Hausdorff 空间，则它们的积拓扑空间$X = X_1 \times X_2 \times \cdots\cdots \times X_n$也是 Hausdorff 空间.

证明：若$x \in X$，$y \in X$，且$x \neq y$，不妨设

$$x = (x_1,\cdots,x_n)，\ y = (y_1,\cdots,y_n)，\ x_i \in X_i，\ y_i \in Y_i，\ 1 \le i \le n，$$

且$x_1 \neq y_1$. 因为X_1为 Hausdorff 空间，所以存在X_1的开集V_1与W_1，$V_1 \cap W_1 = \phi$（空集），并且$x_1 \in V_1$，$y_1 \in W_1$. 令

$$B_1 = V_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n，\quad B_2 = W_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n，$$

则显然B_1及B_2都为X中开集，$x \in B_1$，$y \in B_2$，且$B_1 \cap B_2 = \phi$. 按定义，这说明X为 Hausdorff 空间. 证毕.

如何用每个拓扑空间的基，去刻划它们的积拓扑空间的拓扑？对此，我们有

定理 1.18　若δ_i为拓扑空间X_i的一个基，$1 \le i \le n$，则

$$\delta = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \mid \ B_i \in \delta_i，\ 1 \le i \le n\}$$

是拓扑空间$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$的一个基.

证明：仍利用定理 1.13. 为此需验证：

（i）$\bigcup\limits_{B \in \delta} B = X$.

（ii）任给$B \in \delta$，$C \in \delta$，当$B \cap C \neq \phi$时，若$x \in B \cap C$，必有$D \in \delta$，满足$x \in D \subseteq B \cap C$. 由于$\delta_i$为$X_i$的基，按定义，可知

$$\bigcup_{B_i \in \delta_i} B_i = X_i，\ 1 \le i \le n.$$

因此，容易看出（i）成立. 至于（ii），设$x = (x_1,\cdots,x_n) \in B \cap C$，$B \in \delta$，$C \in \delta$，

$$B=V_1\times\cdots\times V_n,\quad C=W_1\times\cdots\times W_n,\quad V_i,W_i\in\delta_i.$$

则

$$B\cap C=(V_1\cap W_1)\times\cdots\times(V_n\cap W_n),\ 且\ x_i\in V_i\cap W_i,\ 1\le i\le n.$$

按基的定义，可知必有$B_i\in\delta_i$，使得$x_i\in B_i\subseteq V_i\cap W_i$. 因此，若令

$$D=B_1\times\cdots\times B_n,$$

则$D\in\delta$，且$x\in\delta$. 这说明了（ii）成立.

因此δ为$X_1\times\cdots\times X_n$的一个基. 证毕.

应用定理 1.18，可知以下结论是对的：

定理 1.19　若拓扑空间$X_1,\cdots,X_n$都满足第二可数性公理（见定义 1.10），则积拓扑空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$也是如此.

证明：由假设，拓扑空间X_i有基δ_i $(1\le i\le n)$，使得δ_i中有限个或可数无穷多个X_i的开集. 由定理 1.18，我们知道拓扑空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$有一个基

$$\delta=\{B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\mid B_i\in\delta_i,\ 1\le i\le n\}.$$

我们可证明：集δ中含有有限个或可数无穷多个元素. 为此，我们考虑最复杂的情况，即每个δ_k中都有可数无穷多个元素，且排列为$B_k^{(1)},B_k^{(2)},\cdots$. 我们可对$n$用归纳法. 当$n$=2 时，简记$a_{ij}=B_1^{(i)}\times B_2^{(j)}$，$i,j$=1, 2, 3, ⋯. 我们可将全体集合$a_{ij}$按照$i+j$的值由小到大地加以排列，并且当$i+j=i'+j'$时，若$i>i'$，则将$a_{ij}$排在$a_{i'j'}$之前. 即排成：

$$a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},\cdots.$$

由此不难看出，当$n=2$时，δ是个可数集（含有可数无穷多个元素的集）. 当$n>2$时，应用归纳假设及已证的“$n=2$”时的结论，可知结论成立. 所以拓扑空间

$$X=X_1\times\cdots\times X_n$$

有一个可数基. 因此，它满足第二可数性公理. 证毕.

度量空间是一类能用“距离”刻划开集的特殊的拓扑空间.

定义 1.20　设 X 是一个空间，R 是实数全体的集，并且存在一个映射 λ: $X\times X\to R$，使得

（i）对任意的 x 与 y，$\lambda(x,y)=\lambda(y,x)\geq 0$，并且 $\lambda(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ 时成立.

（ii）若 x,y 与 z 都属于 X，则有 $\lambda(x,y)+\lambda(y,z)\geq\lambda(x,z)$，

这时，称（X,λ）或 X 为一个度量空间，映射 λ 为“度量”，并称 $\lambda(x,y)$ 为两个点 x 与 y 之间的“距离”.

为了在度量空间中引进拓扑结构，我们先对于一个拓扑空间中的开集（见定义 1.1）给予刻划.

定理 1.21　设 X 为一个拓扑空间，则集 X 的一个子集 A 是一个开集的充分必要条件是：对任一 $x\in A$，都有一个开集 V，使得 $x\in V\subseteq A$.

证明：（a）充分性. 对于每个 x，$x\in A$，设 V_x 为开集，使得 $x\in V_x\subseteq A$. 则易证

$$A=\bigcup_{x\in A}V_x.$$

由于任意多个开集之并仍为开集（见定义 1.1），所以 A 为开集.

（b）必要性. 这是显然的，只要取 $V=A$ 即可. 证毕.

根据定理 1.21，我们可在度量空间上引入“开集”（即定义拓扑）. 先作一个准备工作，即引“球形邻域”的概念.

定义 1.22　设（X,λ）为一个度量空间，$x\in A$，$\omega>0$，则称集合

$$\{y\in X\mid\lambda(y,x)<\omega\}$$

为一个球形邻域，并记为 $B_X(x,\omega)$，或在不致引起混淆时记为 $B(x,\omega)$.

显然，球形邻域 $B(x,\omega)$ 是 R 上开区间（$x-\omega,\ x+\omega$）的推广. 借助于此，我们有

定理 1.23　设（X,λ）为一个度量空间. 若令

$$\varepsilon=\{A\mid A\subseteq x\text{，且对每个 }x\in A\text{，都存在 }\omega>0\text{，使得 }B(x,\omega)\subseteq A\},$$

则（x,ε）成为一个拓扑空间.

证明：需要验证定义 1.1 中的三条要求.

(a) $X \in \varepsilon$ 是显然的.

(b) 若 $A \in \varepsilon$， $B \in \varepsilon$，且 $A \cap B \neq \phi$，设 $x \in A \cap B$，则存在 $\omega_1 > 0$ 及 $\omega_2 > 0$，使得

$$B(x,\omega_1) \subseteq A,\quad B(x,\omega_2) \subseteq B.$$

于是，若令 $\omega = \min(\omega_1,\omega_2)$，则按定义 1.22 可知.

$$B(x,\omega) \subseteq A \cap B.$$

所以，按定义可知 $A \cap B \in \varepsilon$.

(c) 若 $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon$，则我们要证明

$$B = \bigcup_{A \in \varepsilon_1} A \in \varepsilon.$$

这可由定义很容易地加以证明. 证毕.

定义 1.24 由定理 1.23 所引入的度量空间（X,λ）的拓扑，称为空间 X 的自然拓扑.

并非一个拓扑空间必能引进度量而成为一个度量空间. Urysohn 度量化定理告诉我们，若拓扑空间 X 满足以下条件：

(i) X 满足第二可数性公理（见定义 1.10），

(ii) X 是 Hausdorff 空间（见定义 1.4），

(iii) X 是正则空间，即若 A 为 X 的任一闭子集， $x \notin A$，则必存在不相交的开集 U 与 V，使得 $x \in U$， $A \subseteq V$，

则 X 的拓扑必是某个度量 λ 产生的度量空间（X,λ）的自然拓扑(称为可度量化). 这是点集拓扑中一个深刻的结果. 因为在本书中并不需要，我们就不证明了.

关于 n 个度量空间 $(X_1,\lambda_1),\cdots,(X_n,\lambda_n)$ 的积空间 $X_1 \times \cdots \times X_n$，我们有

定理 1.25 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个度量空间，它们的度量分别为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 对于积空间 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 中任二点 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y = (y_1,\cdots,y_n)$， 令

$$\lambda(x,y) = \sqrt{(\lambda_1(x_1,y_1))^2 + \cdots + (\lambda_n(x_n,y_n))^2},$$

则（X,λ）成为一个度量空间.

证明：我们需要验证定义 1.20 中的两条.（i）是显然的. 为证（ii），设

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n),\quad z=(z_1,\cdots,z_n),$$

其中 $x,y,z\in X$，$x_i,y_i,z_i\in X_i$，$1\le i\le n$. 则需证明

$$\lambda(x,y)+\lambda(y,z)\ge\lambda(x,z).\tag{4}$$

利用

$$(\lambda_i(x_i,z_i))^2\le(\lambda_i(x_i,y_i)+\lambda_i(y_i,z_i))^2$$

$$=(\lambda_i(x_i,y_i))^2+(\lambda_i(y_i,z_i))^2+2\lambda_i(x_i,y_i)\cdot\lambda_i(y_i,z_i),$$

并应用 Cauchy 不等式及定义，可知

$$(\lambda(x,z))^2\le(\lambda(x,y))^2+(\lambda(y,z))^2+2\sum_{1\le i\le n}\lambda_i(x_i,y_i)\lambda_i(y_i,z_i)$$

$$\le(\lambda(x,y))^2+(\lambda(y,z))^2+2\lambda(x,y)\ \lambda(y,z)$$

$$=(\lambda(x,y)+\lambda(y,z))^2.$$

所以（4）成立，于是(X,λ)成为一个度量空间. 证毕.

定理 1.26　设$X_1,\cdots,X_n$为一些度量空间，则度量空间$X=X_1\times\cdots\times X_n$的自然拓扑（见定义 1.24）与它作为拓扑空间（自然拓扑）$X_1,\cdots,X_n$的积拓扑空间的拓扑是一致的.

证明：设A为X的自然拓扑意义下的一个开集. 要证明A为积拓扑意义下的一个开集. 对任一$x\in A$，据定义可知存在$\omega_x>0$，使得

$$B_X(x,\omega)=\{y\in X\mid\lambda(x,y)<\omega_x\}\subseteq A.$$

由此可导出

$$A=\bigcup_{x\in A}B_x(x,\omega_x).\tag{5}$$

设$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$x_i\in X_i$，$1\le i\le n$. 令

$$C_x=\{y\in X\mid y=(y_1,\cdots,y_n),\lambda_i(x_i,y_i)<\frac{1}{n}\omega_x,1\le i\le n\}.$$

由于 $(\lambda(x,y))^2=\sum_{1\le i\le n}(\lambda_i(x_i,y_i))^2$，显然可知$x\in C_x\subseteq B_x(x,\omega_x)$. 所以，由（5）及定义可得

$$A=\bigcup_{x\in A}C_x=\bigcup_{x\in A}(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n),\tag{6}$$

其中

$$V_i=\{y_i\in X_i\mid \lambda_i(x_i,y_i)<\frac{1}{n}\omega_x\},\quad 1\le i\le n.$$

不难证明：V_i 是 X_i 中开集（自然拓扑）. 为此，任取 $y_i'\in V_i$，并令

$$\omega'=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\omega_x-\lambda_i(x_i,y_i')).$$

则我们断言：

$$B_{X_i}(y_i',\omega')=\{y_i\in X_i\mid \lambda(y_i',y_i)<\omega'\}\subseteq V_i.\tag{7}$$

事实上，若 $y_i\in B_{X_i}(y_i',\omega')$，则

$$\lambda(x_i,y_i)\le\lambda(x_i,y_i')+\omega'<\lambda(x_i,y_i')+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\omega_x-\lambda_i(x_i,y_i'))<\frac{1}{n}\omega_x.$$

因此（7）成立. 这证明了 V_i 为 X_i 的开集. 于是，由定理 1.15，定义 1.16 以及（6），可知 A 是空间 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 的积拓扑意义下的开集.

反之，设 A 是 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 的积拓扑意义下的开集. 对任一 $x\in A$，由定理 1.15，定义 1.16 可知，存在 X_i 中开集 V_i，$1\le i\le n$，使得

$$x\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\subseteq A.$$

于是，若设 $x=x_1,\cdots,x_n$，$x_i\in X_i$，则 $x_i\in V_i$. 根据 X_i 的自然拓扑的定义，可知必有 $\omega_i>0$，使得 $B_{X_i}(x_i,\omega_i)\subseteq V_i$. 令 $\omega=\min_{1\le i\le n}(\omega_i)$，则我们断言

$$B_X(x,\omega)=\{y\in X\mid \lambda(x,y)<\omega\}\subseteq V_1\times\cdots\times V_n(\subseteq A).\tag{8}$$

事实上，当 $y\in X$，且 $\lambda(x,y)<\omega$ 时，若设 $y=(y_1,\cdots,y_n)$，$y_i\in X_i$，则由

$$(\lambda(x,y))^2=\sum_{1\le i\le n}(\lambda_i(x_i,y_i))^2<\omega^2=(\min_{1\le i\le n}(\omega_i))^2,$$

可知 $\lambda(x_i,y_i)<\omega_i$. 所以 $y_i\in V_i$. 因此（8）成立. 这证明了 A 是 X 的自然拓扑意义下的开集. 证毕.

下面，我们利用已证的一些结果，去了解度量空间的自然拓扑的基.