工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

高等数学
习题全解

下册

同济大学数学系 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

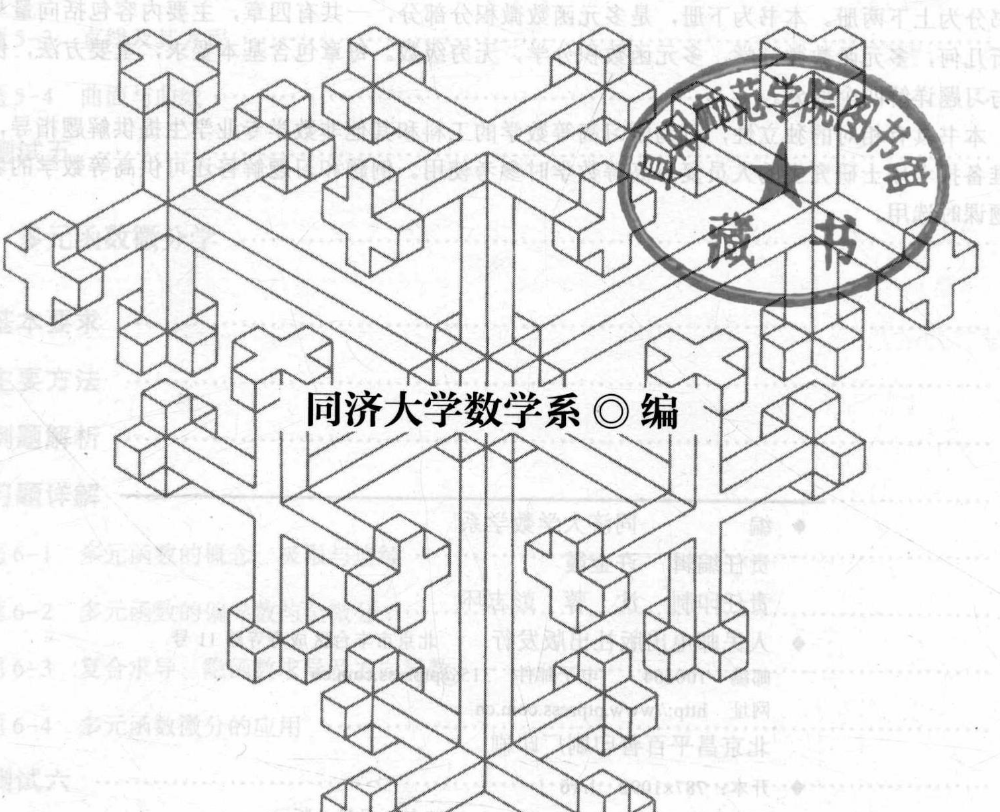
中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十二五”规划教材

同济大学 数学系列教材

高等数学习题全解

下册



同济大学数学系 ◎ 编

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目（C I P）数据

高等数学习题全解. 下册 / 同济大学数学系编. --
北京 : 人民邮电出版社, 2017.1
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42766-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第290359号

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（ISBN 978-7-115-42640-6，人民邮电出版社出版）配套的学习辅导书。全书按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求，充分吸取当前优秀高等数学教材辅导书的精华，并结合数年来的教学实践经验，针对当今学生的知识结构和习惯特点编写。全书分为上下两册。本书为下册，是多元函数微积分部分，一共有四章，主要内容包括向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。每章包含基本要求，主要方法，例题解析与习题详解四个部分。

本书具有相对的独立性，可为学习高等数学的工科和其他非数学专业学生提供解题指导，也可供准备报考硕士研究生的人员复习高等数学时参考使用。例题和习题解答还可供高等数学的老师在习题课时选用。

◆ 编　　　　同济大学数学系
　责任编辑　许金霞
　责任印制　沈　蓉　彭志环
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京昌平百善印刷厂印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：12.5　　　　2017 年 1 月第 1 版
　字数：298 千字　　2017 年 1 月北京第 1 次印刷

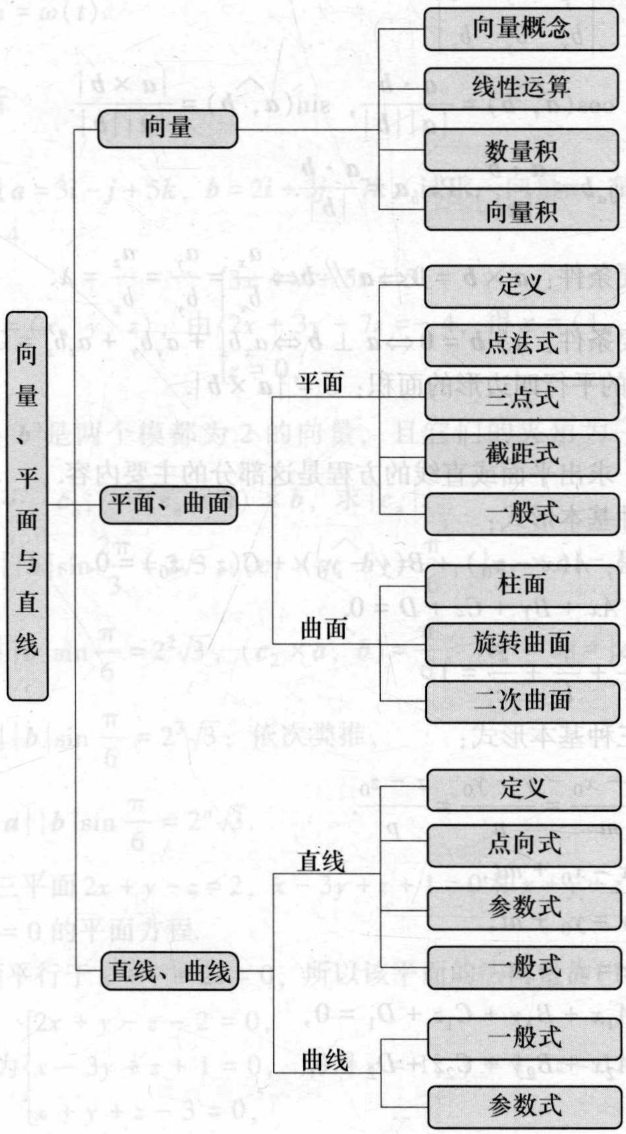
定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

目　录

第五章　向量与空间解析几何

一、基本要求



二、主要方法

1. 向量的运算

向量的运算，重点是用向量的坐标进行运算. 要做到运算正确、熟练，首先应熟记一些常用的公式.

向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$.

线性运算：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$.

数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$.

两向量的夹角：$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

向量的投影：$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}=\lambda$.

向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

2. 平面和直线

根据几何条件，求出平面或直线的方程是这部分的主要内容.

平面方程有三种基本形式：

(1) 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

(2) 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$.

(3) 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

直线方程也有三种基本形式：

(1) 点向式：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

(2) 参数式：$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$

(3) 一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

3. 曲面与曲线

旋转曲面：曲线 L：$f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，绕 y 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

柱面：准线是 xOy 面上的曲线 C 的柱面方程为 $F(x,y)=0$.

二次曲面：

(1) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad a,b,c>0$.

(2) 锥面：$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$，特别地，$z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(3) 抛物面：$z = a^2x^2 + b^2y^2$，特别地，$z = x^2 + y^2$.

曲线方程：

(1) 一般式：$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$

(2) 参数式：$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t). \end{cases}$

三、例题解析

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$，试求一向量 $\boldsymbol{x}$，使它与 z 轴垂直且满足 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = 5$，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = -4$.

解　设向量 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$，由 $\begin{cases} 3x - y + 5z = 5, \\ 2x + 3y - 7z = -4, \\ z = 0, \end{cases}$ 得 $\boldsymbol{x} = (1, -2, 0)$.

例 2　已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个模都为 2 的向量，且它们的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，若 $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}_2 = (\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$，…，$\boldsymbol{c}_{n+1} = (\boldsymbol{c}_n \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$，求 $|\boldsymbol{c}_n|$.

解　$|\boldsymbol{c}_1| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$，$(\widehat{\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}_1||\boldsymbol{a}|\sin\frac{\pi}{2} = 4\sqrt{3}$；

$|\boldsymbol{c}_2| = |\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6} = 2^2\sqrt{3}$，$(\widehat{\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}_2||\boldsymbol{a}|\sin\frac{\pi}{2} = 2^3\sqrt{3}$；

$|\boldsymbol{c}_3| = |\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6} = 2^3\sqrt{3}$；依次类推，

$|\boldsymbol{c}_n| = |\boldsymbol{c}_{n-1} \times \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6} = 2^n\sqrt{3}$.

例 3　求通过三平面 $2x + y - z = 2$，$x - 3y + z + 1 = 0$ 和 $x + y + z - 3 = 0$ 的交点，且平行于平面 $x + y + 2z = 0$ 的平面方程.

解　所求平面平行于 $x + y + 2z = 0$，所以该平面的法向量为 $(1, 1, 2)$.

三平面的交点为 $\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0, \\ x - 3y + z + 1 = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \end{cases}$ 解得 $x = 1$，$y = 1$，$z = 1$.

所以所求平面为 $(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$，即

$$x + y + 2z - 4 = 0.$$

例 4　求直线 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线方程.

解　由平面束方程知，直线 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ 的投影平面方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(y-x-z-1)=0,$$

即 $$(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-(1+\lambda)=0.$$

上述平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，所以

$$(1-\lambda)\cdot 1+(1+\lambda)\cdot 1-(1+\lambda)\cdot 1=0,$$

得到 $\lambda=1$. 于是投影平面为

$$2y-2z-2=0,$$

即 $$y-z-1=0.$$

所求投影直线方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

例 5 求直线 l：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程.

解 l 的方程可写成 $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0, \end{cases}$ 所以过 l 的方程可写成

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,$$

即 $$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

因它与已知平面垂直，即 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得

$$\lambda=-2,$$

所以过 l 与已知平面垂直的平面方程为 $x-3y-2z+1=0$，故 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0, \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

于是 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

即 $$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

四、习题详解

习题 5－1　向量及其运算

1. 填空题.

(1) 已知点 $A(2,-1,1)$，则点 A 与 z 轴的距离是________，与 y 轴的距离是________，与 x 轴的距离是________.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}=(-2,6,-3)$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=$________，方向余弦为 $\cos\alpha=$________，$\cos\beta=$________，$\cos\gamma=$________，其同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=$________.

(3) 设 α、β、γ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$________.

(4) 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,4)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,k,2)$ 平行，则 $k=$______.

(5) 已知三点 $M_1(1,-2,3)$，$M_2(1,1,4)$，$M_3(2,0,2)$，则 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=$______，$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=$______.

(6) 以点 $A(2,-1,-2)$，$B(0,2,1)$，$C(2,3,0)$ 为顶点，作平行四边形 $ABCD$，此平行四边形的面积等于______.

(7) 向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,1)$ 在 $\boldsymbol{b}=(2,1,2)$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$______，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=$______.

(8) 设 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,k,4)$，而 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $k=$______.

解　(1) $d_z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$；

$$d_y=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5};$$

$$d_x=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}=\sqrt{49}=7$；

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{-2}{7}=-\frac{2}{7};$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{6}{7};$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7};$$

$$\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\left(-\frac{2}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{3}{7}\right).$$

(3) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)$

$$=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=3-1=2.$$

(4) 因为两向量平行，故对应坐标成比例，即

$$\frac{2}{1}=\frac{-1}{k}=\frac{4}{2},$$

从而 $k=-\dfrac{1}{2}$.

(5) $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,4)-(1,-2,3)=(0,3,1)$，

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(2,0,2)-(1,-2,3)=(1,2,-1).$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=(0,3,1)\cdot(1,2,-1)=0+3\cdot2+1\cdot(-1)=5;$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=(0,3,1)\times(1,2,-1)=(-5,1,-3).$$

(6) $\overrightarrow{AB}=(0-2,\ 2-(-1),\ 1-(-2))=(-2,3,3)$；

$$\overrightarrow{AC}=(2-2,\ 3-(-1),\ 0-(-2))=(0,4,2).$$

$$S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|(-2,3,3)\times(0,4,2)|$$

$$=|(-6,4,-8)|=\sqrt{116}=2\sqrt{29}.$$

(7) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4\cdot2+(-3)\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$；

$$\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{4\cdot 2+(-3)\cdot 1+1\cdot 2}{\sqrt{4^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}}.$$

(8) 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为零，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,\ 2,\ 3)\cdot(-2,\ k,\ 4)=-2+2k+12=0,$$

从而 $k=-5$.

2. 一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是与 x 轴、y 轴夹角的两倍，求向量的方向角.

解　已知 $\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，故由 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$ 得

$$2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)=0,$$

解得 $\cos\alpha=0$ 及 $\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，于是

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=\pi \text{ 或 } \alpha=\beta=\frac{\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{2}.$$

3. 给定 $M(-2,\ 0,\ 1)$，$N(2,\ 3,\ 0)$ 两点，在 x 轴上有一点 A，满足 $|AM|=|AN|$，求点 A 的坐标.

解　因为点 A 在 x 轴上，可设所求点为 $A(x,\ 0,\ 0)$，依题设 $|AM|=|AN|$，即

$$\sqrt{(x+2)^2+1}=\sqrt{(x-2)^2+3^2},$$

所以 $x=1$，从而所求点为 $A(1,\ 0,\ 0)$.

4. 从点 $A(2,\ -1,\ 7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,\ 9,\ -12)$ 方向取长为34的线段 AB，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{AB}=(x-2,\ y+1,\ z-7)$，又 $\overrightarrow{AB}\parallel\boldsymbol{a}$，故设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $x-2=8\lambda$，$y+1=9\lambda$，$z-7=-12\lambda$，

$$34=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8\lambda)^2+(9\lambda)^2+(-12\lambda)^2},$$

解得 $\lambda=2$，从而点 B 的坐标为 $(18,\ 17,\ -17)$.

5. 设点 P 在 y 轴上，它到点 $P_1(\sqrt{2},\ 0,\ 3)$ 的距离为到点 $P_2(1,\ 0,\ -1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解　因为点 P 在 y 轴上，设点 P 的坐标为 $(0,\ y,\ 0)$，

$$|PP_1|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+y^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},\quad |PP_2|=\sqrt{1^2+y^2+(-1)^2}=\sqrt{y^2+2},$$

因为 $|PP_1|=2|PP_2|$，即

$$\sqrt{y^2+11}=2\sqrt{y^2+2},$$

解得 $y=\pm 1$，所求点为 $(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ -1,\ 0)$.

6. 设点 A 位于第 Ⅰ 卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标.

解　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$. 由关系式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

得
$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

因为点 A 在第 Ⅰ 卦限，知 $\cos\gamma > 0$，故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.

于是$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|e_{OA} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$，点 A 的坐标为$(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

7. 证明：$\mathrm{Prj}_u(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}$.

证明　记$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}}) = \varphi$，$(\widehat{\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}}) = \varphi_1$，

当 $\lambda > 0$ 时，$\varphi_1 = \varphi$，$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1 = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\varphi = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$；

当 $\lambda < 0$ 时，$\varphi_1 = \pi - \varphi$，

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1 = -\lambda|\boldsymbol{a}|\cos(\pi - \varphi) = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\varphi = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}.$$

当 $\lambda = 0$ 时，显然成立.

因此 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

8. 记 $\boldsymbol{e}_a$ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的同向单位向量，证明：$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

证明　由于 $\boldsymbol{e}_a$、$\boldsymbol{a}$ 同向，故 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e}_a (\lambda > 0)$，且$|\boldsymbol{e}_a| = 1$，因此$|\boldsymbol{a}| = \lambda|\boldsymbol{e}_a| = \lambda$，即 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，注意到$|\boldsymbol{a}| \neq 0$，故结论成立.

9. 求平行于向量 $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

解　所求向量有两个，一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向，一个与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

由于 $$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11,$$

从而 $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{6}{11}\boldsymbol{i} + \frac{7}{11}\boldsymbol{j} - \frac{6}{11}\boldsymbol{k}$ 或 $-\boldsymbol{e} = -\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = -\frac{6}{11}\boldsymbol{i} - \frac{7}{11}\boldsymbol{j} + \frac{6}{11}\boldsymbol{k}$.

10. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，$|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式.

解　因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，所以 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角 $\alpha = \beta = \gamma$，又因为

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

因此 $3\cos^2\alpha = 1$，$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

因为和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，从而

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e} = 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (2, 2, 2).$$

11. 已知 $\boldsymbol{a} = (1, 1, -4)$，$\boldsymbol{b} = (1, -2, 2)$，求：

(1)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$；　　(2)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；　　(3)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

解　(1)$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = -9$.

(2)$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$，所以 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = -3$.

12. 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2}) = (-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

13. 设$|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{b}| = 2$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$，求：

(1) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$; (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$.

解 (1)
$$\begin{aligned}(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) &= 6\,|\boldsymbol{a}|^2 - 15\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - 10\,|\boldsymbol{b}|^2\\ &= 6\,|\boldsymbol{a}|^2 - 11\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 10\,|\boldsymbol{b}|^2\\ &= 6\,|\boldsymbol{a}|^2 - 11|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) - 10\,|\boldsymbol{b}|^2\\ &= 6\cdot 3^2 - 11\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 10\cdot 2^2 = -19.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\ &= 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 7.\end{aligned}$$

14. 已知点$A(1,\ -3,\ 4)$，$B(-2,\ 1,\ -1)$，$C(-3,\ -1,\ 1)$，求：

(1) $\angle ABC$; (2) $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影.

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (-2-1,\ 1-(-3),\ -1-4) = (-3,\ 4,\ -5)$,

$\overrightarrow{AC} = (-3-1,\ -1-(-3),\ 1-4) = (-4,\ 2,\ -3)$,

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3,\ 4,\ -5)\cdot(-4,\ 2,\ -3)}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}\sqrt{(-4)^2+2^2+(-3)^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{58}},$$

$$\angle ABC = \arccos\frac{7}{\sqrt{58}}.$$

(2) $$\mathrm{Prj}_{AC}\,\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{35}{\sqrt{29}}.$$

15. 已知$\boldsymbol{a} = (2,\ 3,\ 1)$，$\boldsymbol{b} = (1,\ -2,\ 1)$，求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (2,\ 3,\ 1)\times(1,\ -2,\ 1) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix} = (5,\ -1,\ -7);$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = (1,\ -2,\ 1)\times(2,\ 3,\ 1) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix} = (-5,\ 1,\ 7).$$

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$；(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

解　(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+1,-3+(-1),1+3)=(3,-4,4)$，

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1+1,-1+(-2),3+0)=(2,-3,3)$，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(3,-4,4)\times(2,-3,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

$$(2)\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\times(1,-1,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=(-8,-5,1),$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-8,-5,1)\cdot(1,-2,0)=-8+(-5)(-2)+0=2.$$

$$(3)\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(-8,-5,1)\times(1,-2,0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-8&-5&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=(2,1,21).$$

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=2+(-3)(-1)+3=8$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=2+(-3)(-2)+0=8$，

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)$.

17. 求与 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

$$\text{解}\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}，\text{则}\ \pm\boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right).$$

18. 已知空间四点 $A(-1,0,3)$，$B(0,2,2)$，$C(2,-2,-1)$，$D(1,-1,1)$，求与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 都垂直的单位向量.

解　$\overrightarrow{AB}=(0-(-1),2-0,2-3)=(1,2,-1)$，

$\overrightarrow{CD}=(1-2,-1-(-2),1-(-1))=(-1,1,2)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(1,2,-1)\times(-1,1,2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\-1&1&2\end{vmatrix}=(5,-1,3),$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{35},$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|}=\left(\frac{5}{\sqrt{35}},\frac{-1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}}\right);$$

$$-\boldsymbol{e}=-\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|}=\left(\frac{-5}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{-3}{\sqrt{35}}\right).$$

19. 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$, 求以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2,1,0)\times(-1,0,2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&0\\-1&0&2\end{vmatrix}=(2,-4,1),$$

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}.$$

20. 求以点 $A(1,2,3)$, $B(0,0,1)$, $C(3,1,0)$ 为顶点的三角形的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=(0-1,0-2,1-3)=(-1,-2,-2)$,

$\overrightarrow{AC}=(3-1,1-2,0-3)=(2,-1,-3)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-2)\times(2,-1,-3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&-2&-2\\2&-1&-3\end{vmatrix}=(4,-7,5),$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-7)^2+5^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

21. 设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 其中 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 问:

(1) k 为何值时, $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$;

(2) k 为何值时, 以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

解 (1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$, 所以

$$0=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2k|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=2k+4,\ k=-2;$$

(2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(2-k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,

平行四边形面积为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模, 所以

$$6=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|2-k||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|2-k|\cdot 2,\ k-2=\pm 3,$$

所以 $$k_1=5,\ k_2=-1.$$

22. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$ 是两个互相垂直的单位向量, 求:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解 (1) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})\cdot(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=6|\boldsymbol{m}|^2+7|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\cos(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})-3|\boldsymbol{n}|^2$$
$$=6\cdot 1^2+7\cdot 0-3\cdot 1^2=3;$$

(2) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})\times(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=6\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$$
$$=-11\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=11|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=11|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=11.$$

23. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$;

(2) 若还满足 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $|\boldsymbol{c}|=5$, 求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$.

证明 (1) 因 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 所以

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),$$

即有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2).$$

(2) 因 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，故

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

由于

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2,\ 故\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\ (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=3\cdot3\cdot4\cdot1=36.$$

24. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 θ.

解　由于 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$，即

$$7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.\tag{1}$$

又 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即

$$7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.\tag{2}$$

联立方程(1)、(2)得

$$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

所以

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},\ (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}.$$

25. 试用向量方法证明三角形的余弦定理.

证明　设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=\theta$，$|CB|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，

现要证 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$. 记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，从而

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$，即得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

26. 试用向量积证明三角形正弦定理.

证明　设 $\triangle ABC$ 的三个内角为 α、β、γ，三边长为 a、b、c，

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$，所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\times\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}$，

故 $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，即 $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}$.

两边取模，有 $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AB}|$，即 $bc\sin\alpha=ac\sin\beta$，故 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$.

同理可证

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

因此 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$，三角形正弦定理得证.

27. 已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，证明

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2[1-\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})]\\&=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

28. 已知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$两两垂直，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$的长度与它和$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的夹角.

解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{s}|^2=|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{s}|&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2=1^2+2^2+3^2=14.\end{aligned}$$

故

$$|\boldsymbol{s}|=\sqrt{14},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{a}})=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

即

$$(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{a}})=\arccos\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

同理，

$$(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{2}{\sqrt{14}},\ (\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{c}})=\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

29. 已知$\boldsymbol{a}=(7,-4,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-1,2)$，向量$\boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的角平分线上，且$|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{42}$，求$\boldsymbol{c}$的坐标.

解 取$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{9}(7,-4,-4)$，$\boldsymbol{e}_b=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{3}(-2,-1,2)$，$\boldsymbol{e}_a+\boldsymbol{e}_b=\dfrac{1}{9}(1,-7,2)$，

$\boldsymbol{c}=\lambda(1,-7,2)$，$|\lambda|\cdot\sqrt{54}=3\sqrt{42}$，$\lambda=\pm\sqrt{7}$.

$\boldsymbol{c}=\pm(\sqrt{7},-7\sqrt{7},2\sqrt{7})$.

注 这里向量$\boldsymbol{e}_a+\boldsymbol{e}_b$在$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的角平分线上(见图5-1).

或设$\boldsymbol{c}=\lambda(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})=\lambda(3(7,-4,-4)+9(-2,-1,2))$

$=3\lambda(1,-7,2)$，

$3|\lambda|\cdot\sqrt{54}=3\sqrt{42}$，$\lambda=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{7}$，$\boldsymbol{c}=\pm(\sqrt{7},-7\sqrt{7},2\sqrt{7})$.

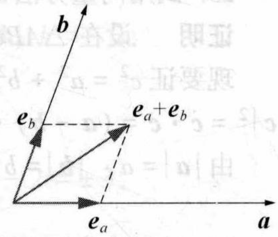


图5-1

30. 设向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{j}$成60°角，与$\boldsymbol{k}$成120°角，且$|\boldsymbol{x}|=5\sqrt{2}$，求$\boldsymbol{x}$.

解 由题意知，$\cos\beta=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\gamma=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，则

$$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=5\sqrt{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\pm5,\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

习题 5-2 平面及其方程

1. 填空题.

(1) 过原点且与向量$\boldsymbol{a}=(3,1,-1)$垂直的平面方程为__________.

(2) 平面$x+2y+kz+1=0$与向量$\boldsymbol{a}=(1,2,1)$垂直，则$k=$__________.

(3) 过点$M(2,0,-1)$且与向量$\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,0,4)$平行的平面方程为__________.

解 (1) 因为向量$\boldsymbol{a}=(3,1,-1)$与平面垂直，即向量$\boldsymbol{a}$可取为平面的法向量. 由平