线性代数
辅导讲义

张立卓 / 编

出版社

线性代数
辅导讲义

张立卓 / 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书章节安排与“线性代数”普通教科书中的章节安排基本平行。书中每章的各节有内容要点与评注、典型例题以及习题；各章都设有专题讨论，每个专题以典型例题解析的方式阐述了围绕该专题的解题方法与技巧，每章末附有补充题，是在前面各专题的引领下，对知识点融会贯通、综合运用的体现，它包含客观题和主观题，客观题的设置意在考查对该章知识点全面而深入的理解，主观题的设置意在考查对该章知识点的综合运用能力与掌握。对于典型例题的讲解处理得非常细致，试图营造一对一辅导的氛围，以帮助读者理解和掌握。对于专题的处理，力图理清知识点之间的脉络与联系，实现对知识的系统理解。

本书可作为学生学习“线性代数”课程时的同步学习辅导材料，也可作为考研复习的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义/张立卓编. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-45179-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 239579 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　**印　张**：23　**字　数**：553 千字
版　次：2016 年 12 月第 1 版　**印　次**：2016 年 12 月第 1 次印刷
印　数：1～2000
定　价：49.80 元

产品编号：065389-01

前 言

学生们要学好线性代数，首先必须要弄清概念、理解定理；其次要掌握分析问题和解决问题的方法，而要实现这两点，最好的途径之一就是研读例题和演练习题，因此要学好线性代数，就必须要演练一定数量的习题。

在课堂教学中，课程的讲授是按知识的逻辑顺序展开的，习题则是按章或节编排的，学生们所受到的解题训练是单一的、不完善的，课堂教学的局限之一是缺乏对融会贯通的综合解题能力的训练与培养，再加上受教学时数的限制，许多解题方法与技巧未能在课堂上讲解与演练，当然更谈不上使学生系统掌握这些方法与技巧。

一些基础课程有开设习题课的做法，这对于学生的学习和理解能力的培养和训练是非常有帮助的。但由于学时和助课人员短缺方面的问题，许多学校取消或削减基础课的习题课学时。

本辅导讲义试图为改善上述各点做出努力。具体的做法是将知识的**细致性**和**系统性**通过讲的方式得以落实。所谓知识的细致性是指对概念和定理的多角度分析和讲解，使之细化，并在例题和习题中将这些细化的内容展现出来，实现各个知识点的突破。所谓知识的系统性是指将涉及多个知识点的综合题目归纳为一些专题，对各个专题的解题方法和涉及的技巧进行剥丝抽茧式的分析和讲解，实现各个知识点间线的突破。讲是一个交互的过程，通过交互过程来达成讲解和理解的基点。这在书中是不好实现的，为此，我根据以往辅导学生时的经验，将问题细化，将理解的梯度细化，减少读者在阅读和理解本书内容过程中的障碍或阻力，努力营造出一对一辅导时的细致氛围。这也是书名中“辅导讲义”的一种体现。

本书内容的展开与普通教科书基本平行，每章各节有内容要点与评注、典型例题以及习题，各章专门设立专题讨论一节，每个专题以典型例题解析的方式阐述了围绕该专题的解题方法与技巧。每章末附有补充题，是在前面各专题的引领下，对知识点融会贯通、综合运用的体现。它包含客观题和主观题，客观题的设置意在考查对该章知识点全面而深入的理解，主观题的设置意在考查对该章知识点的综合分析能力的领会与掌握。

全书包含了175道例题和446道习题。这些题目内容全面，类型多样，涵盖了线性代数教学大纲的全部内容，其中不少例题题型新颖、解法精巧，有些例题选自历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些题目都有中等或中等以上的难度。对于例题，大多先给出“分析”，引出解决问题的思路，然后在分析的基础上给出详细的解答过程，其间注重各个步骤的理论依据，努力做到知其然还要知其所以然，细化概念和定理在解决问题过程中的具体体现。之后，将一些要点通过“注”“评”“议”的方式将题目的要点提炼出来。一些题目还配以多种解题方法，以帮助读者从多个角度比较与归纳解题方法与技巧。对于习题，给出了答案和比较具体的提示。

本书的一个特色是对大多数例题都配以“分析”“注”“评”和“议”，其中：

分析——意在强调解题思路；

注——意在强调求解过程中的关键点和重要环节；

评——意在评述本例的技巧、方法和结论；

议——意在对本例结论和方法的延伸与拓展。

本书的另一个特色是将知识点分专题(37个)展开，以突出对知识点及解题方法与技巧作系统而深入的阐述，同时对一般教材不予证明的结论等补充了证明。

初学者可以把本书作为教辅书与课堂教学同步使用，以帮助弄清概念、理解定理，掌握解题方法与技巧。进一步，本书提供的丰富材料将帮助学习者在期末总复习或备考硕士研究生时，作全面而深入的总结性复习或专题性研究。

本书是笔者多年来从事线性代数教学经验的积累与总结。

感谢对外经济贸易大学，是这片沃土滋养了这枚果实；感谢清华大学出版社刘颖老师；感谢书末参考文献所有的专家们，他们的著作为我的编写工作带来了启发与指导。

历时三年，数度修改，完成此稿，自知错误和不当之处在所难免，恳请专家与读者不吝赐教，万分感激。

作 者

2016年10月

于对外经济贸易大学

目 录

第1章 行列式

对于含有 n 个方程的 n 元线性方程组，有时需要直接从线性方程组的系数及常数项判别该方程组解的情形，这需要有 n 阶行列式的概念.

1.1 二阶、三阶行列式

设以 x_1,x_2 为未知元的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为第 i 个方程第 j 个未知元的系数，$b_i(i=1,2)$ 为第 i 个方程的常数项，利用消元法可求得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

如何简化上述解的表达式，以更便于记忆？

1. 内容要点与评注

为了便于记忆表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，这个表达式称为**二阶行列式**，它由二元一次方程组(1.1)的未知元系数组成(同一方程的系数依次放在同一行上，同一未知元的系数依次放在同一列上)，故也称为该线性方程组的**系数行列式**，显然依照二阶行列式的概念可得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

于是对于二元一次方程组(1.1)，上述结论可以叙述如下.

命题 1 当线性方程组(1.1)的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上述表达式的分母是共同的，均为方程组的系数行列式，分子的区别在于用方程组的常数项分别替换系数行列式的第1列、第2列而得的二阶行列式.

对于以 x_1,x_2,x_3 为未知元的三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为第 i 个方程中 x_j 的系数，$b_i(i=1,2,3)$ 为第 i 个方程的常数项.

利用消元法可求得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\ =\ &b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32},\\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_2\\ =\ &a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{12}b_3,\\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_3\\ =\ &a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32},\end{aligned}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时，此线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

为了便于记忆表达式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

引进记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

这个表达式称为**三阶行列式**，它由三元一次方程组未知元的系数组成(同一方程的系数依次放在同一行上，同一未知元的系数依次放在同一列上)，故也称为该方程组的**系数行列式**，从左上角至右下角的连线称为行列式的**主对角线**，从左下角至右上角的连线称为行列式的**副对角线**，带正号的3项分别为位于主对角线上以及与之平行的线上的3个元素乘积，带负号的3项分别为位于副对角线上以及与之平行的线上的3个元素乘积.

利用三阶行列式的记法可得

$$\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32},$$

对于三元一次方程组(1.2),上述结论可以叙述如下.

命题 2 当线性方程组(1.2)的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,此方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

上述表达式的分母是共同的,均为方程组的系数行列式,分子的区别在于用方程组的常数项分别替换系数行列式的第 1 列、第 2 列、第 3 列而得的三阶行列式.

三阶(二阶)行列式的每一项是来自不同行、列的 3 个(2 个)元素的乘积.

对于含 2 个方程 2 个未知元的二元一次方程组,当系数行列式不等于 0 时,此方程组有唯一解,该唯一解可利用二阶行列式求得.

对于含 3 个方程 3 个未知元的三元一次方程组,当系数行列式不等于 0 时,此方程组有唯一解,该唯一解可利用三阶行列式求得.

对于线性方程组的系数行列式等于 0,或者所含方程个数与未知元个数不相等的情形,将在第 2 章作系统讨论.

2. 典型例题

例 1.1.1 利用二阶行列式,判断二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5, \\ x_1 + 7x_2 = 6 \end{cases}$$

是否有唯一解? 如果有唯一解,求出其解.

解 该线性方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\times7-(-3)\times1=17\neq0$,依命题 1,此方程组有唯一解,且唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-17}{17} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{17}{17} = 1.$$

例 1.1.2 利用二阶行列式,判断三元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3=3,\\6x_1+5x_2+x_3=0,\\3x_1\qquad-x_3=1\end{cases}$$

是否有唯一解？如果有唯一解，求出其解.

解　该线性方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2&-1&4\\6&5&1\\3&0&-1\end{vmatrix}&=2\times5\times(-1)+(-1)\times1\times3+4\times6\times0-4\times5\times3\\&\quad-(-1)\times6\times(-1)-2\times1\times0\\&=-79\neq0,\end{aligned}$$

依命题 2，则此方程组有唯一解，且唯一解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&4\\0&5&1\\1&0&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&4\\6&5&1\\3&0&-1\end{vmatrix}}=\frac{36}{79},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&3&4\\6&0&1\\3&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&4\\6&5&1\\3&0&-1\end{vmatrix}}=-\frac{49}{79},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&3\\6&5&0\\3&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&4\\6&5&1\\3&0&-1\end{vmatrix}}=\frac{29}{79},$$

其中

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3&-1&4\\0&5&1\\1&0&-1\end{vmatrix}&=3\times5\times(-1)+(-1)\times1\times1+4\times0\times0-4\times5\times1\\&\quad-(-1)\times0\times(-1)-3\times0\times1\\&=-36,\end{aligned}$$

类似还可得 $\begin{vmatrix}2&3&4\\6&0&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=49$，$\begin{vmatrix}2&-1&3\\6&5&0\\3&0&1\end{vmatrix}=-29$.

习题 1-1

1. 利用二阶行列式，判断二元一次方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2=-4,\\3x_1+5x_2=1\end{cases}$$

是否有唯一解？如果有唯一解，求出其解.

2. 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&8&4\\-3&1&-1\end{vmatrix}$.

3. 利用三阶行列式,判断三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad = 1, \\ \qquad 8x_2+4x_3=-2, \\ -3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

是否有唯一解? 如果有唯一解,求出其解.

1.2 n元排列

从二阶行列式的表达式可知,它由两项组成: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,前一项带正号,后一项带负号,各项符号缘何而定? 观察这两项的区别仅在于列的标号的排列不同,它们分别是:12,21,它们恰好对应于1,2两个数字的全部排列.

从三阶行列式的表达式可知,它由6项组成:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

前三项带正号,后三项带负号,各项符号缘何而定? 观察这6项的区别仅在于列的标号的排列不同,它们分别是:123,231,312,321,213,132,它们恰好对应于1,2,3三个数字的全部排列.

由此可知,为了给出n阶行列式的定义,需要首先讨论n个正整数组成的全排列及其相关性质.

1. 内容要点与评注

n个不同的正整数的一个全排列称为一个n元排列.n元排列的总数为$n!$.

注 一般地,我们考虑由$1,2,\cdots,n$组成的n元排列,讨论其性质,这些性质对于由任意n个不同的正整数组成的n元排列也成立,比如$2,3,\cdots,n,n+1$.

定义1 在一n元排列$i_1i_2\cdots i_n$中,任取一对数$i_k,i_l(k<l)$,如果$i_k<i_l$,那么称这一数对组成一个**顺序**,如果$i_k>i_l$,那么称这一数对组成一个**逆序**,一个n元排列中逆序的总数称为此排列的**逆序数**,n元排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数记作$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶数(奇数)的排列称为**偶排列**(**奇排列**).

n元排列$12\cdots n$称为**自然排列**,也称**标准排列**.

将一排列中任意两个数码位置对调,称为一次**对换**.

定理1 经一次对换,排列改变奇偶性.

定理2 任一n元排列$j_1j_2\cdots j_n$与自然排列$12\cdots n$之间可以经一系列对换互变,且所作对换的次数与$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$具有相同的奇偶性.

事实上,可经1次或0次对换将元素"1"换到第1个位置,再依次将元素$2,3,\cdots,n$换到第$2,3,\cdots,n$个位置,假设经过s次对换变为自然排列,因为自然排列为偶排列,则$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$经过s次奇偶性的改变成为偶数,故s与$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$奇偶性相同,即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^s.$$

◆

2. 典型例题

例1.2.1 求7元排列5236714的逆序数,并且指出它的奇偶性.

分析 1　对于 n 元排列，从 1 开始，考查 1 的前(左)面有几个数，即构成几个逆序，再考查 2 前面有几个比 2 大的数，即构成几个逆序，依次类推，直至考查 $n-1$ 的逆序(n 与其前面的数都不构成逆序)，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

解法 1　从 1 开始，考查它前面有几个数，再考查 2 前面有几个比它大的数，依此下去，……，直至考查 6 前面有几个比它大的数，构成逆序的数对是

$$51,21,31,61,71,52,53,54,64,74,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而 7 元排列 5236714 为偶排列.

分析 2　对于 n 元排列，从 n 开始，考查 n 后(右)面有几个数，即构成几个逆序，再考查 $n-1$ 后面有几个比 $n-1$ 小的数，即构成几个逆序，依次类推，直至 2 的逆序(1 与其后面的数都不构成逆序)，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

解法 2　从 7 开始，考查它后面有几个数，再考查 6 后面有几个比它大的数，依此下去，……，直至考查 2 后面有几个比它大的数，构成逆序的数对是

$$71,74,61,64,52,53,51,54,31,21,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而 7 元排列 5236714 为偶排列.

注　(分析 3)对于 n 元排列，从 n 元排列的首位数字开始，考查其后(右)面有几个比它小的数，即构成几个逆序，再考查第 2 个数后面有几个比它小的数，即构成几个逆序，依次类推，直至考查该排列中倒数第 2 个数的逆序，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

(解法 3)从 5 开始，考查它后面有几个比它小的数，再考查 2 后面有几个比它小的数，依此下去，……，直至考查 7 后面有几个数(1 后面的数都比 1 大)，构成逆序的数对是

$$52,53,51,54,21,31,61,64,71,74,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而 7 元排列 5236714 为偶排列.

(分析 4) 对于 n 元排列，从 n 元排列的末位数开始，考查其前(左)面有几个比它大的数，即构成几个逆序，再考查倒数第 2 个数前面有几个比它大的数，即构成几个逆序，依次类推，直至考查该排列中正数第 2 位数的逆序，所有数对逆序的总和为该 n 元排列的逆序数.

(解法 4) 从 4 开始，考查它前面有几个比它大的数，再考查 1 前面有几个比它大的数，依此下去，……，直至考查 2 前面有几个比它大的数，构成逆序的数对是

$$54,64,74,51,21,31,61,71,53,52,$$

因此 $\tau(5236714)=10$，从而 7 元排列 5236714 为偶排列.

计算逆序数时，无论选择上述哪一种方法，都要求统一朝一个指定方向，由左向右，或者由右向左，依次考查每个数与其他数构成的逆序.

评　计算 n 元排列逆序数就是以自然排列为标准，针对任一数对，考查是否为逆序，确定所有数对逆序的总数.

例 1.2.2　求 n 元排列 $(n-1)(n-2)\cdots321n$ 的逆序数，并且讨论它的奇偶性.

分析　可以考虑从 n 开始考查逆序，再考查 $n-1$ 的逆序，依次下去.

解　由于 n 处在末位，与其前面每一数字都不构成逆序，考查 $n-1$，$n-1$ 与后面 $n-2$，$n-3$，$n-4$，…，3，2，1 构成 $n-2$ 个逆序，$n-2$ 与后面 $n-3$，$n-4$，…，3，2，1 构成 $n-3$ 个逆序，依次下去，1 与后面 n 有 1 个逆序，因此

$$\tau((n-1)(n-2)\cdots321n)=n-2+n-3+\cdots+2+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

当 $n=4k$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=(2k-1)(4k-1)$；当 $n=4k+1$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2k(4k-1)$；当 $n=4k+2$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=2k(4k+1)$；当 $n=4k+3$ 时，$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=(2k+1)(4k+1)$.

因此，当 $n=4k$ 或 $n=4k+3$ 时，$(n-1)(n-2)\cdots321n$ 为奇排列；当 $n=4k+1$ 或 $n=4k+2$ 时，$(n-1)(n-2)\cdots321n$ 为偶排列.

注 1 与其前面数字构成 $n-2$ 个逆序，2 与其前面数字构成 $n-3$ 个逆序，……

例 1.2.3 已知 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数为 k，求 n 元排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

分析 因为自然排列 $12\cdots(n-1)n$ 的逆序数为 0，其顺序的总数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，任一 n 元排列都可由自然排列经有限次对换而得，而每一次对换，其顺序数减少的个数恰好等于其逆序数增加的个数，所以该排列的顺序数与逆序数总和为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

解 由题设，$\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=k$，即 n 元排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的顺序数为 k，所以

$$\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

注 $\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)$.

评 $\tau(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$.

例 1.2.4 证明 在由 $1,2,\cdots,n$ 构成的全部 $n(n>1)$元排列中，奇排列与偶排列各占一半.

分析 依定理 1，偶排列经对换第 1,2 位数字后成为奇排列.

证 设在全部 $n(n>1)$元排列中，偶排列有 i 个，奇排列有 j 个，则 $i+j=n!$，对换所有 i 个偶排列中排在第 1,2 位的数，得 i 个奇排列，因为在 n 元排列中，所有奇排列共计为 j 个，所以 $i\leqslant j$. 同理对换所有 j 个奇排列中排在第 1,2 位的数，得 j 个偶排列，即 $j\leqslant i$，故 $i=j=\frac{n!}{2}$.

注 对换 i 个偶排列第 1,2 位的数，所得的 i 个奇排列必是所有 j 个奇排列中某 i 个，故 $i\leqslant j$. 强调对换 1,2 位数是避免重复.

例 1.2.5 设由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 中，

$$i_1<i_2<\cdots<i_k,j_1<j_2<\cdots<j_{n-k},$$

求排列 $i_1i_2\cdots i_kj_1j_2\cdots j_{n-k}$ 的逆序数.

分析 从该排列的首位数 i_1 开始考查，其后面必有 i_1-1 个数小于它. 由左至右，依次类推.

解 在 i_1 后面，比 i_1 小的数有 i_1-1 个(在数 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 中)，即有 i_1-1 个逆序，在 i_2 后面，比 i_2 小的数有 i_2-1-1 个(除 i_1)，即有 i_2-2 个逆序，……，依次类推，在 i_k 后面，比 i_k 小的数有 $i_k-1-(k-1)$个，即有 i_k-k 个逆序，由题设，在 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 中，每个数后面都没有比其小的数字，逆序均为 0，因此