张景中科普文集

ZHANG JINGZHONG KEPU WENJI

100% 珍藏版

从$\sqrt{2}$谈起

张景中◎著

除了$\sqrt{2}$，还讲了常见的无理数，不带根式的无理数，有理数和无理数哪个多，著名的无理数等许多你能想到但课本上没有的事。

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

张景中
科普文集
ZHANG JINGZHONG
KEPU WENJI

从$\sqrt{2}$谈起

张景中◎著

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

从$\sqrt{2}$谈起 / 张景中著. —武汉：湖北科学技术出版社，2016.1
（张景中科普文集）
ISBN 978-7-5352-5664-5

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①无理数—基本知识 Ⅳ. ①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 069587 号

出版统筹：王小芳 刘志敏
责任编辑：严 冰　　封面设计：戴 旻

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027－87679468
地　　址：武汉市雄楚大街 268 号　　邮编：430070
（湖北出版文化城 B 座 13－14 层）
网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：武汉市金港彩印有限公司　　邮编：430023

710×1010 1/16　　7.75 印张　　107 千字
2016 年 1 月第 1 版　　2016 年 1 月第 1 次印刷
定价：16.00 元

总序

ZONGXU

感谢湖北科学技术出版社督促我将这30多年里写的科普作品回顾整理一下。我想人的天性是懒的，就像物体有惰性。要是没什么鞭策，没什么督促，很多事情就做不成。我的第一本科普书《数学传奇》，就是在中国少年儿童出版社的文赞阳先生督促下写成的。那是1979年暑假，他到成都，到我家里找我。他说你还没有出过书，就写一本数学科普书吧。这么说了几次，盛情难却，我就试着写了，自己一读又不满意，就撕掉重新写。那时没有电脑或打字机，是老老实实用笔在稿纸上写的。几个月下来，最后写了6万字。他给我删掉了3万，书就出来了。为什么要删？文先生说，他看不懂的就删，连自己都看不懂，怎么忍心印出来给小朋友看呢？书出来之后，他高兴地告诉我，很受欢迎，并动员我再写一本。

后来，其他的书都是被逼出来的。湖南教育出版社的《数学与哲学》，是我大学里高等代数老师丁石孙先生主编的套书中的一本。开策划会时我没出席，他们就留了“数学与哲学”这个题目给我。我不懂哲学，只好找几本书老老实实地学了两个月，加上自己的看法，凑出来交卷。书中对一些古老的话题如“飞矢不动”“白马非马”“先有鸡还是先有蛋”“偶然与必然”，冒昧地提出自己的看法，引起了读者的兴趣。此书后来被3家出版社再版。又被选用改编为数学教育方向的《数学哲学》教材。其中许多材料还被收录于一些中学的校本教材之中。

《数学家的眼光》是被陈效师先生逼出来的。他说，您给文先生写了书，他退休了，我接替他的工作，您也得给我写。我经不住他一再劝说，就答应下来。一答应，就像是欠下一笔债似的，只好想到什么就写点什么。5年积累下来，写成了6万字的一本小册子。

这是外因，另外也有内因。自己小时候接触了科普书，感到帮助很大，印象很深。比如苏联伊林的《十万个为什么》《几点钟》《不夜天》《汽车怎样会跑路》；我国顾均正的《科学趣味》和他翻译的《乌拉·波拉故事集》，刘薰宇的《马先生谈算学》和《数学的园地》，王峻岑的《数学列车》。这些书不仅读起来有趣，读后还能够带来悠长的回味和反复的思索。还有法布尔的《蜘蛛的故事》和《化学奇谈》，很有思想，有启发，本来看上去很普通的事情，竟有那么多意想不到的奥妙在里面。看了这些书，就促使自己去学习更多的科学知识，也激发了创作的欲望。那时我就想，如果有人给我出版，我也要写这样好看的书。

法布尔写的书，以十大卷的《昆虫记》为代表，不但是科普书，也可以看成是科学专著。这样的书，小朋友看起来趣味盎然，专家看了也收获颇丰。他的科学研究和科普创作是融为一体的，令人佩服。

写数学科普，想学法布尔太难了。也许根本不可能做到像《昆虫记》那样将科研和科普融为一体。但在写的过程中，总还是禁不住想把自己想出来的东西放到书里，把科研和科普结合起来。

从一开始，写《数学传奇》时，我就努力尝试让读者分享自己体验过的思考的乐趣。书里提到的“五猴分桃”问题，在世界上流传已久。20 世纪 80 年代，诺贝尔奖获得者李政道访问中国科学技术大学，和少年班的学生们座谈时提到这个问题，少年大学生们一时都没有做出来。李政道介绍了著名数学家怀德海的一个巧妙解答，用到了高阶差分方程特解的概念。基于函数相似变换的思想，我设计了“先借后还”的情景，给出一个小学生能够懂的简单解法。这个小小的成功给了我很大的启发：写科普不仅仅是搬运和解读知识，也要深深地思考。

在《数学家的眼光》书中，提到了祖冲之的密率 355/113 有什么好处的问题。数学大师华罗庚在《数论导引》书中用丢番图理论证明了，所有分母不超过 366 的分数中，355/113 最接近圆周率 π。另一位数学家夏道行，在他的《e 和 π》书中用连分数理论推出，分母不超过 8000 的分数中，355/113 最接近圆周率 π。在学习了这些方法的基础上我做了进一步探索，只用初中数学中的不等式知识，不多几行的推导就能证明，分母不超过 16586 的分数中，355/113 是最接近

π的冠军。而52163/16604比355/113在小数后第七位上略精确一点，但分母却大了上百倍!

我的北京大学老师程庆民教授在一篇书评中，特别称赞了五猴分桃的新解法。著名数学家王元院士，则在书评中对我在密率问题的处理表示欣赏。学术前辈的鼓励，是对自己的鞭策，也是自己能够长期坚持科普创作的动力之一。

在科普创作时做过的数学题中，我认为最有趣的是生锈圆规作图问题。这个问题是美国著名几何学家佩多教授在国外刊物上提出来的，我们给圆满地解决了。先在国内作为科普文章发表，后来写成英文刊登在国外的学术期刊《几何学报》上。这是数学科普与科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事发表过一篇短文，盛赞中国几何学者的工作，说这是他最愉快的数学经验之一。

1974年我在新疆当过中学数学教师。一些教学心得成为后来科普写作的素材。文集中多处涉及面积方法解题，如《从数学教育到教育数学》《新概念几何》《几何的新方法和新体系》等，系源于教学经验的启发。面积方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出两个基本工具（共边定理和共角定理），并发现了面积方法是具有普遍意义的几何解题方法。1992年应周咸青邀请访美合作时，从共边定理的一则应用中提炼出消点算法，发展出几何定理机器证明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系统地建立了几何定理可读证明自动生成的理论和算法。杨路进一步把这个方法推广到非欧几何，并发现了一批非欧几何新定理。国际著名计算机科学家保伊尔（Robert S. Boyer）将此誉为计算机处理几何问题发展道路上的里程碑。这一工作获1995年中国科学院自然科学一等奖和1997年国家自然科学二等奖。从教学到科普又到科学研究，20年的发展变化实在出乎自己的意料!

在《数学家的眼光》中，用一个例子说明，用有误差的计算可能获得准确的结果。基于这一想法，最近几年开辟了“零误差计算”的新的研究方向，初步有了不错的结果。例如，用这个思想建立的因式分解新算法，对于两个变元的情形，比现有方法效率有上千倍的提高。这个方向的研究还在发展之中。

1979—1985年，我在中国科学技术大学先后为少年班和数学系讲微积分。

在教学中对极限概念和实数理论做了较深入的思考，提出了一种比较容易理解的极限定义方法——“非ε语言极限定义”，还发现了类似于数学归纳法的“连续归纳法”。这些想法，连同面积方法的部分例子，构成了1989年出版的《从数学教育到教育数学》的主要内容。这本书是在四川教育出版社余秉本女士督促下写出来的。书中第一次提出了“教育数学”的概念，认为教育数学的任务是“为了数学教育的需要，对数学的成果进行再创造。”这一理念渐渐被更多的学者和老师们认同，导致2004年教育数学学会（全名是“中国高等教育学会教育数学专业委员会”）的诞生。此后每年举行一次教育数学年会，交流切磋为教育而改进数学的心得。这本书先后由三家出版社发行，从此面积方法在国内被编入多种奥数培训读物。师范院校的教材《初等几何研究》（左铨如、季素月编著，上海科技教育出版社1991年出版）中详细介绍了系统面积方法的基本原理。已故的著名数学家和数学教育家，西南师大陈重穆教授在主持编写的《高效初中数学实验教材》中，把面积方法的两个基本工具“共边定理”和“共角定理”作为重要定理，教学实验效果很好。1993年，四川都江教育学院刘宗贵老师根据此书中的想法编写的教材《非ε语言一元微积分学》在贵州教育出版社出版。在教学实践中效果明显，后来还发表了论文。此后，重庆师范学院陈文立先生和广州师范学院萧治经先生所编写的微积分教材，也都采用了此书中提出的“非ε语言极限定义”。

10多年之后，受林群先生研究工作的启发带动，我重启了关于微积分教学改革的思考。文集中有关不用极限的微积分的内容，是2005年以来的心得。这方面的见解，得到著名数学教育家张奠宙先生的首肯，使我坚定了投入教学实践的信心。我曾经在高中尝试过用5个课时讲不用极限的微积分初步。又在南方科技大学试讲，用16个课时不用极限讲一元微积分，严谨论证了所有的基本定理。初步实验的，效果尚可，系统的教学实践尚待开展。

也是在2005年后，自己对教育数学的具体努力方向有了新的认识。长期以来，几何教学是国际上数学教育关注的焦点之一，我也因此致力于研究更为简便有力的几何解题方法。后来看到大家都在删减传统的初等几何内容，促使我作战

略调整的思考，把关注的重点从几何转向三角。2006 年发表了有关重建三角的两篇文章，得到张奠宙先生热情的鼓励支持。这方面的想法，就是《一线串通的初等数学》一书的主要内容。书里面提出，初中一年级就可以学习正弦，然后以三角带动几何，串联代数，用知识的纵横联系驱动学生的思考，促进其学习兴趣与数学素质的提高。初一学三角的方案可行吗？宁波教育学院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一节课的反复试验。她得出的结论是可行！但是，学习内容和国家教材不一致，统考能过关吗？做这样的教学实验有一定风险，需要极大的勇气，也要有行政方面的保护支持。2012 年，在广州市科协开展的“千师万苗工程”支持下，经广州海珠区教育局立项，海珠实验中学组织了两个班的初中全程的实验。两个实验班有 105 名学生，入学分班平均成绩为 62 分和 64 分，测试中有三分之二的学生不会作三角形的钝角边上的高，可见数学基础属于一般水平。实验班由一位青年教师张东方负责备课讲课。她把《一线串通的初等数学》的内容分成 5 章 92 课时，整合到人教版初中数学教材之中。整合的结果节省了 60 个课时，5 个学期内不仅讲完了按课程标准 6 个学期应学的内容，还用书中的新方法从一年级下学期讲正弦和正弦定理，以后陆续讲了正弦和角公式，余弦定理这些按常规属于高中课程的内容。教师教得顺利轻松，学生学得积极愉快。其间经历了区里的 3 次期末统考，张东方老师汇报的情况如下：

从成绩看效果

期间经过三次全区期末统考。实验班学生做题如果用了教材以外的知识，必须对所用的公式给出推导过程。在全区 80 个班级中，实验班的成绩突出，比区平均分高很多。满分为 150 分，实验一班有 4 位同获满分，其中最差的个人成绩 120 多分。

	实验 1 班平均分	实验 2 班平均分	区平均分	全区所有班级排名
七年级下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年级上期末	136	133	87．76	第一名和第五名
八年级下期末	145	141	96．83	第一名和第三名

这样的实验效果是出乎我意料的。目前，广州市教育研究院正在总结研究经验，

并组织更多的学校准备进行更大规模的教学实验。

科普作品，以“普”为贵。科普作品中的内容若能进入基础教育阶段的教材，被社会认可为青少年普遍要学的知识，就普得不能再普了。当然，一旦成为教材，科普书也就失去了自己作为科普的意义，只是作为历史记录而存在。这是作者的希望，也是多年努力的目标。

文集编辑工作即将完成之际，湖北科学技术出版社刘虹老师建议我写个总序。我从记忆中检索出一些与文集中某些内容有关的往事杂感，勉强塞责。书中不当之处，欢迎读者指正。

湖北科学技术出版社何龙社长热心鼓励我出版文集；还有华中师范大学国家数字化学习工程中心彭翕成老师（《绕来绕去的向量法》作者之一，该书中绝大多数例题和题解由他提供）为文集的出版付出了辛勤劳动，在此谨表示衷心的感谢。

张景中

2014 年 10 月 14 日

目录

MULU

第一章

从 $\sqrt{2}$ 谈起

$\sqrt{2}$是人类最早发现的无理数之一。早在公元前500年左右，人们就会证明$\sqrt{2}$是无理数了。

边长为1的正方形，它的对角线的长是多少？如果你已经学过勾股定理，马上就能算出它的长度是$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$（图1-1）。

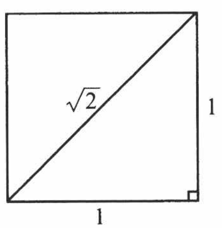

图 1-1

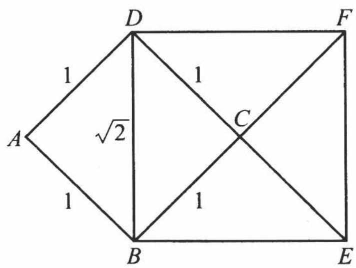

图 1-2

不用勾股定理，也能算出这个对角线的长。如图1-2所示，正方形 *ABCD* 边长为1，面积为1；而正方形 *BEFD* 的面积是 *ABCD* 面积的两倍，也就是说

$BD^2=2$，于是 $BD=\sqrt{2}$。

显然，若正方形边长为 a，则对角线长为$\sqrt{2}a$，即对角线长是边长的$\sqrt{2}$倍。

我们知道，记号$\sqrt{2}$代表这样一个正数：x 的平方等于 2。换句话说，$\sqrt{2}$是二次方程式 $x^2-2=0$ 的正根，通常把它叫做 2 的算术平方根。

很明显，$\sqrt{2}$不是整数。因为 1 的平方比 2 小，2 的平方又比 2 大，所以$\sqrt{2}$应当在 1 和 2 之间。

在 1 和 2 之间，分数多得很，要多少有多少，而且是密密麻麻地挤在一起。那么，其中有没有这样一个分数，它自乘之后恰巧等于 2 呢？看来似乎应当有。真的有吗？那你找几个试试看，你一定找不到——不是太大，就是太小。尽管能找到平方很接近 2 的分数，但要想恰巧等于 2，是不可能的。

也许你会说，1 和 2 之间既然有无穷多个分数，那就不可能一个一个地试。既然不能一个一个地试，又怎能断定没有一个分数，它的平方等于 2 呢？

这个问题，早在 2000 多年前就解决了。请看：

［命题 1］ $\sqrt{2}$不是有理数。

证法一 用反证法证明。先假设$\sqrt{2}$是有理数，如果从这一假设出发推出矛盾，便说明这个假设错了，即$\sqrt{2}$不是有理数。

若$\sqrt{2}$是有理数。由于有理数只包含正负整数、正负分数和 0，而$\sqrt{2}>0$，故必然有两个正整数 n，m，使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

且 n 和 m 互质，即没有大于 1 的公约数。

根据$\sqrt{2}$的定义，有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2, \tag{1}$$

也就是

$$n^2=2m^2。 \tag{2}$$

这个式子右端是偶数，故左端的 n^2 也是偶数，因而 n 是偶数。于是可设 $n=2k$，代入（2）式得 $4k^2=2m^2$，即 $2k^2=m^2$。这推出 m 是偶数，说明 n 和 m 有大于 1 的公约数，与假设矛盾。

这个证明还可以说得更简单些：不必假定 n 和 m 没有大于 1 的公约数，直接观察（2）式，它的右端所含 2 的因数有奇数个，而左端含 2 的因数又为偶数个，这就有了矛盾。

证法二 仍用反证法证明。设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，n 和 m 都是正整数，且 n 和 m 没有大于 1 的公约数。由（2）式

$$n^2=2m^2,$$

而在十进制下，整数的平方的个位数字只能是 0，1，4，5，6，9 中之一，2 倍之后只能是 0，2，8 中之一。所以，（2）式左端的个位数字是 0，1，4，5，6，9 中之一，而右端个位数字是 0，2，8 中之一。也就是说，两端的个位都是 0，这说明 n 和 m 有公因数 5，于是推出了矛盾。

在数学中，反证法很有用，尤其是要证明一个数是无理数时，更少不了反证法。上面介绍的第一个证法，曾出现在 2000 多年前希腊几何学家欧几里得（公元前 300 年左右）所写的《几何原本》一书中。这说明早在 2000 多年前，人们就知道 $\sqrt{2}$ 不是有理数，而且会用反证法来进行逻辑推理了。

《几何原本》这部名著，是欧几里得总结、整理了当时他所收集到的资料写成的，并非他一人的研究成果。就拿“$\sqrt{2}$ 不是有理数”来说，这个事实是比欧几里得更早一些的毕达哥拉斯（公元前 500 年左右）学派的人发现的。

毕达哥拉斯学派有一个基本观点，叫做“万物皆数”。在他们心目中，数就只有正整数，而且正整数也就是组成物质的基本粒子——原子。因此他们认为，一切量都可以用整数或整数的比来表示。他们觉得，一条线段就好比一串珍珠，这珍珠就是一个一个的点，不过又小又多罢了。按这种看法，两条线段长度之比，就应当是它们各自包含的小“珍珠”的个数之比，当然应当是可以用整数之比来表示的了。

据说，毕达哥拉斯学派一个名叫希帕苏斯的年轻人，第一个发现了正方形的边和对角线长度之比不能用整数之比来表示。用现在的话说就是“$\sqrt{2}$不是有理数”。这个发现直接和毕达哥拉斯学派的错误信条“万物皆数”相抵触，使这个学派的许多人大为惶恐和恼怒。据说，希帕苏斯在海船上向学派的其他成员讲述这个发现时，遭到激烈反对。由于他坚持自己发现的真理，竟被抛入海中淹死了。

但是，真理是不会被永远淹没的。随着数学的向前发展，无理数终于在人们心目中取得了合法地位，被广泛应用于科学研究、技术推广和人们的社会生活中。

顺便提一下，用“$\sqrt{\quad}$”来表示平方根，是解析几何的创始人笛卡儿（1596—1650）于16世纪首先采用的。那时，$\sqrt{2}$已被发现了近2000年，不少数学家已开始承认像$\sqrt{2}$这类不能用分数表示的数了。

至于把整数和分数叫做“有理数”，据考证，倒是由于一开始翻译时的讹误。原来，“有理数”中的“有理”一词，英文是Rational。这个词本来有两个含义：其一是“比”，其二是“合理”。照数学上的原意，分数可以表示成两整数之比，把“有理数”叫做“比数”是很确切的。可是，日本学者在19世纪翻译西方的数学书时，把这个词译成了“有理数”。日本语言中本来就有很多汉字。后来，在中日文化交流中，中国又从日本引进了“有理数”和“无理数”这两个词，一直用到现在，没法改，也不必改了。

练习题一

1. 若a，b是两个有理数，且$a<b$，试证明一定有一个有理数x，满足$a<x<b$。

2. 若a是有理数，b是无理数，问ab什么时候是有理数，什么时候是无理数？

3. 求证：$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt[3]{2}$都不是有理数。

4. 若a，b是两个有理数，且$a<b$，试证明一定有一个无理数y，满足$a<y<b$。

5. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$是不是有理数？为什么？

6. 若a，b都是无理数，$a+b$是否一定是无理数？

7. 若$a+b$，$a-b$都是有理数，a和b是否一定是有理数？

8. 已知线段AB之长为1，试利用直尺和圆规，画出长度为$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$的线段。

第二章

庞大的无理数家族

无理数也是无穷无尽的，它们比起有理数来要多得多。

除了$\sqrt{2}$，还有哪些无理数呢？

从$\sqrt{2}$出发，就可以造出无穷多个无理数，如：$1+\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$，$3+\sqrt{2}$，…它们都是无理数；

$2\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$4\sqrt{2}$，…也都是无理数：

$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，$3-2\sqrt{2}$，$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$，…仍是无理数。

也许你会说，你怎么知道它们都是无理数呢？一个一个地证多麻烦呀！其实，我们根本不用一个一个地证。不信，请看命题 2：

[命题 2]　如果 r 和 s 是有理数，$r\neq 0$，且 a 是无理数，那么 $ra+s$ 必是无理数。

证明　用反证法。若 $ra+s$ 是有理数，令 $ra+s=q$，则 $q-s$ 是有理数，$\frac{1}{r}(q-s)$也是有理数。由 $ra+s=q$ 解出

$$a=\frac{1}{r}\ (q-s),$$

于是推出 a 是有理数，和已知矛盾。所以，$ra+s$ 应是无理数。

你看，由命题 2 我们可以知道，当 $a=\sqrt{2}$ 时，上面提到的 $1+\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$\frac{3}{5}-\frac{7}{4}\sqrt{2}$，…都是无理数。也就是说，只要有一个无理数 a，就可以造出无穷多个无理数来。

无理数是不是都要带个$\sqrt{2}$呢？当然不是。就在人们发现$\sqrt{2}$不是有理数之后不久，希腊数学家塞阿多斯（公元前 470 年左右），就证明了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，…，$\sqrt{17}$都是无理数。于是，像 $3-2\sqrt{5}$，$\frac{5}{4}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$等这类的数，也都是无理数。

下面我问你，无理数开平方如$\sqrt{3+\sqrt{2}}$是不是无理数呢？我们的结论是：是的。请看：

［命题 3］ 若 a 是无理数，k 是正整数，则$\sqrt[k]{a}$是无理数。

证明 用反证法。若$\sqrt[k]{a}=q$ 是有理数，则可推出 $a=q^k$ 是有理数，与已知矛盾。所以，$\sqrt[k]{a}$是无理数。

用类似于证明命题 2 和命题 3 的方法，很容易证明：若 a 是无理数，则$\frac{1}{a}$也是无理数。进一步可以证明，若 a 是无理数，m，n，p，q 是有理数，则当 $mq-np\neq0$ 时，比值$\frac{ma+n}{pa+q}$也是无理数。（证明留给读者做练习）

不过，两个无理数相加，可就不一定是无理数了。例如 $3+\sqrt{2}$ 和 $3-\sqrt{2}$，这两个无理数之和为 6，是有理数。类似地，两个无理数的差、积、商，可能是无理数，也可能是有理数。但是，像$\sqrt{2}+\sqrt{3}$这类数是无理数。请看：

［命题 4］ 若 a，b 是正的有理数，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$是无理数，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$也是无理数。如果 $a\neq b$，则$\sqrt{a}-\sqrt{b}$也是无理数。

证明 用反证法。设$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=r$ 是有理数，且 $r\neq0$，则$\pm\sqrt{b}=r-\sqrt{a}$，两端