国家自然科学基金项目·物流与供应链管理系列丛书

风险厌恶零售商的订购策略研究

吴萌 著

科学出版社

国家自然科学基金项目·物流与供应链管理系列丛书

风险厌恶零售商的订购策略研究

吴 萌 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书针对供应链管理和库存管理中的重要问题——风险厌恶行为对零售商订购策略的影响，结合实际开展了一系列的深入研究。研究工作以单风险源单零售商的订购策略为基础，主要从多风险源下的最优订购策略、零售商竞争下的均衡订购策略、风险度量准则的选择和比较这三个方面展开。首先讨论供应和缺货成本不确定下的订购策略，研究多个风险源对最优订购策略的影响；其次，在风险价值(VaR) 准则和条件风险价值(CVaR)准则下，比较和分析了风险度量准则对订购策略的影响；最后，研究竞争对订购策略的影响及风险厌恶对均衡策略的影响。

本书适合高等院校管理科学与工程、工业工程、运筹学等专业的研究生和高年级本科生阅读，也适合相关专业的教师和研究人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

风险厌恶零售商的订购策略研究/吴萌著. —北京: 科学出版社, 2016

ISBN 978-7-03-049029-2

Ⅰ. ①风… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①零售商业-商业管理-研究 Ⅳ. ①F713.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 141858 号

责任编辑: 徐 倩 程 凤/责任校对: 赵桂芬
责任印制: 张 伟/封面设计: 蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 6 月第一次印刷 印张: 9 1/4
字数: 210 000

定价: 58.00 元

目　　录

第 1 章　绪论 ······ 1
1.1　风险厌恶现象 ······ 1
1.2　供应链管理中的风险厌恶 ······ 5
1.3　风险度量准则 ······ 7
1.3.1　期望效用函数准则 ······ 7
1.3.2　前景效用函数准则 ······ 8
1.3.3　均值–风险分析法 ······ 10
1.3.4　一致风险度量准则 ······ 11
1.3.5　机会/概率约束准则 ······ 13
1.3.6　不同风险度量准则间的关系 ······ 14
参考文献 ······ 16
第 2 章　需求不确定下风险厌恶零售商的订购策略 ······ 18
2.1　期望效用准则下的报童模型 ······ 20
2.2　损失厌恶效用准则下的报童模型 ······ 22
2.3　均值–方差准则下的报童模型 ······ 24
2.4　机会约束准则下的报童模型 ······ 25
2.5　一致风险度量准则下的报童模型 ······ 28
2.6　风险厌恶零售商订购模型总结 ······ 31
参考文献 ······ 35
第 3 章　供应与需求不确定下风险厌恶零售商的订购策略 ······ 38
3.1　研究背景与现状分析 ······ 38
3.2　供应不确定下的风险厌恶报童模型 ······ 40
3.2.1　基于 VaR 约束准则的风险厌恶报童模型 ······ 41
3.2.2　基于 CVaR 准则的风险厌恶报童模型 ······ 42
3.3　风险厌恶零售商的最优订购策略 ······ 42
3.3.1　确定供应下的最优订购策略 ······ 43
3.3.2　随机供应下的最优订购策略 ······ 44
3.4　供应不确定及风险度量准则对订购策略的影响 ······ 49
3.5　本章结论 ······ 55
参考文献 ······ 55

第 4 章 成本与需求不确定下风险厌恶零售商的订购策略 ······ 59
4.1 研究背景与现状分析 ······ 59
4.2 缺货成本不确定下风险厌恶报童模型 ······ 61
4.2.1 基于 CVaR 准则的风险厌恶报童模型 ······ 62
4.2.2 基于 VaR 约束准则的风险厌恶报童模型 ······ 62
4.3 风险厌恶零售商的最优订购策略 ······ 63
4.3.1 基于 CVaR 准则的最优订购策略 ······ 63
4.3.2 基于 VaR 准则的最优订购策略 ······ 73
4.4 缺货成本不确定对订购策略的影响 ······ 77
4.5 风险度量准则对订购策略的影响 ······ 81
4.6 本章结论 ······ 86
参考文献 ······ 87
附录 ······ 88
第 5 章 竞争性风险厌恶零售商的订购策略 ······ 98
5.1 研究背景与现状分析 ······ 98
5.2 模型描述和假设 ······ 100
5.3 数量竞争下的均衡订购策略 ······ 101
5.3.1 需求按比例分配规则下的均衡订购策略 ······ 101
5.3.2 需求再分配规则下的均衡订购策略 ······ 106
5.4 价格竞争下的均衡订购和定价策略 ······ 112
5.4.1 可加型需求下的均衡订购和定价策略 ······ 113
5.4.2 乘积型需求下的均衡订购和定价策略 ······ 117
5.5 竞争与风险厌恶行为对零售商决策的影响 ······ 120
5.6 异质化风险厌恶零售商的竞争分析 ······ 128
5.6.1 需求按比例分配规则下的数量竞争 ······ 128
5.6.2 需求再分配规则下的数量竞争 ······ 130
5.6.3 可加型需求下的价格竞争 ······ 131
5.6.4 乘积型需求下的价格竞争 ······ 135
5.7 本章结论 ······ 140
参考文献 ······ 140
第 6 章 结论与展望 ······ 142

第1章 绪　　论

在管理科学的研究中，大部分的决策理论都是规范性的 (normative)，也就是说，这些结论大都基于决策者是完全理性的这一假设而得出。然而现实告诉我们，决策者有些时候并不是按照这些最优的理论来做决策的。因此，我们需要另外一种方法去研究和发现决策者的真实决策，而这种方法被称为以事实 (或经验) 为基础的决策分析或描述性决策分析 (descriptive decision analysis)。尽管规范性决策分析和描述性决策分析是两种不同的研究方法，但它们之间是非常相关的。一方面，我们可以通过放松规范性研究的某些假设去研究决策者的真实决策；另一方面，我们也可以通过分析和描述具体的真实决策来合理建模以进行规范性的研究。

在运营管理和供应链管理的研究中，库存管理始终是这一领域的核心问题之一。传统的库存管理问题，基于规范性决策分析方法，主要关注库存经理如何在随机需求实现之前确定最优的订购数量和补货策略以实现成本的最小化。经过多年的发展，库存管理的理论成果已广泛地应用于现实世界，并且明显降低了企业的运营成本并提升了企业的运营效率。然而，大量的研究同时发现，真实的决策与理论上的最优决策是存在明显偏差的。为此，本书基于描述性决策分析方法深入研究一类单周期库存管理问题，即零售商的最优订购策略。

1.1　风险厌恶现象

回溯到 18 世纪，Nicolas Bernoulli 在 1713 年提出了一个被后人称为圣彼得堡悖论 (St. Petersburg paradox) 的问题。这个著名悖论给决策理论中的期望值准则提出了严峻的挑战。

圣彼得堡悖论

赌场提供一个掷硬币的游戏，该游戏只能有 1 个玩家参与。初始的奖池中有 2 元，每当硬币掷出正面则奖池金额翻倍，当第一次掷出反面时游戏结束且玩家可以获得奖池中的全部金额。如果玩家想玩这个游戏，那么这个游戏的公平价格应该是多少呢？

通过计算，我们知道这个游戏的期望收益是

$$\text{Expected Value} = \frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\cdots=\infty$$

如果按照期望收益来看，只要赌场愿意提供这个游戏，无论支付任何的价格玩家都应该参与。然而大多数人并不相信这一结论，并且大多数人认为几乎没人愿意以超过 25 元的价格参与这个游戏。因此，实际的支付意愿与无限大的期望收益之间存在着巨大的差异，这即是圣彼得堡悖论。

1738 年，Nicolas Bernoulli 的堂兄 Daniel Bernoulli 提出了期望效用假设和边际效用递减假设，基于上述假设并通过一个具体的效用函数 —— 对数效用函数刻画玩家的效用，最终解释并消除了这个悖论。对于期望效用假设，Daniel Bernoulli 认为理性的行为是可以通过最大化效用函数的期望值来刻画的，尤其是无法用货币度量的情形。然而对于很多情形，并不是所有的偏好关系都有期望效用的表示形式，为此必须给偏好关系加上合适的结构来达到期望效用表示的目的。尽管众多经济学家对完善期望效用假设做了许多的工作，但直到 von Neumann 和 Morgenstern(1944) 提出的 von Neumann-Morgenstern 效用定理才完整地给出了期望效用假设成立的充分必要条件。von Neumann-Morgenstern 效用定理指出，当决策者的偏序关系满足完备性、传递性、独立性和连续性这四个公理化假设时，决策者才被称为理性的。并且决策者的偏好可由一个效用函数表示，同时它面对不确定收益的决策与最大化该效用函数的期望值是一致的。这个效用函数也被称为 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

从期望效用假设的提出到其最终得以公理化，期望效用理论为分析和研究决策者如何在风险下做出最优决策提供了有效的理论工具。这里我们需要强调说明“风险”一词的含义。不同的人可能对风险一词有着不同的理解。但风险的核心含义是指“未来结果的不确定性或损失”。由于决策者对未来结果的不确定性具有不同的偏好，所以风险偏好又可分为三类：风险中性 (risk neutral)、风险厌恶 (risk averse)、风险追求 (risk seeking)。

由于利用期望效用假设研究的问题都是面临风险的决策问题，所以当个体面临风险时，如何刻画上述三种风险偏好行为是非常重要的。为此，基于期望效用假设，我们有了如下的刻画。考虑一个初始财富为 0 的玩家参与一个公平的赌局。该赌局具有正收益 x，其概率为 p，也具有负收益 y，其概率为 $1-p$。公平赌博就意味着赌局的期望回报为 0，也就是说 $px+(1-p)y=0$。令 $u(\cdot)$ 表示该玩家的效用函数，从三种风险偏好的行为我们可定义三种风险偏好行为下的效用函数应满足如下关系：

$$\text{风险追求}: u(px+(1-p)y) \leqslant pu(x)+(1-p)u(y)$$
$$\text{风险中性}: u(px+(1-p)y) = pu(x)+(1-p)u(y)$$
$$\text{风险厌恶}: u(px+(1-p)y) \geqslant pu(x)+(1-p)u(y)$$

另外，上面的关系式也表明了风险追求者的效用函数为凸函数，风险厌恶者的效用函数为凹函数，而风险中性者的效用函数是既凸又凹的函数。

通过上面的定义，我们可知效用函数的凹凸性可以反映出决策者的风险偏好行为，然而当决策者的风险态度发生变化时，我们同样需要对风险偏好的程度进行度量。由于风险偏好的程度与效用函数的曲率相关，所以对风险偏好程度的度量就是对效用函数曲率的度量。由于 von Neumann-Morgenstern 效用函数在严格正的仿射变换下具有不唯一性，然而风险偏好的度量在仿射变换下应保持不变，所以二阶导数无法准确刻画风险偏好的程度。为此，Arrow(1971) 和 Pratt(1976) 给出了绝对风险厌恶的度量 (ARA)，其定义为

$$\mathrm{ARA}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

通过 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶度量，人们可以刻画出不同的决策者在给定财富下的风险厌恶程度。与此同时，$\mathrm{ARA}(x)$ 在不同的定义域可能表现出不同的单调性。具体来说，如果 $\mathrm{ARA}(x)$ 是严格减函数时，表示递减的绝对风险厌恶 (DARA)；如果 $\mathrm{ARA}(x)$ 是严格增函数时，表示递增的绝对风险厌恶 (IARA)；如果 $\mathrm{ARA}(x)$ 是非增非减函数时，表示常数的绝对风险厌恶 (CARA)。由此可以发现，绝对风险厌恶度量会随着财富的变化而发生改变。若 $\mathrm{ARA}(x)$ 在全部定义域都是严格减函数，则意味着决策者会随着财富的增加而开始喜爱风险，类似地，若 $\mathrm{ARA}(x)$ 在全部定义域都是严格增函数，则意味着决策者会随着财富的增加而更加厌恶风险，若 $\mathrm{ARA}(x)$ 在全部定义域都是常数，则意味着决策者的风险态度与他的（初始）财富无关。因此，一个具有绝对风险厌恶效用函数的决策者，当他的财富增加时，其对风险资产的需求可能是增加，保持不变，或者减少。然而，对风险资产需求的增加 (或减少)，其投资于风险资产的比例却可能增加、保持不变，或者减少。

由于风险厌恶程度与财富水平有着密切的关系，为此 Arrow(1971) 给出了另一种风险厌恶度量，即相对风险厌恶度量 (RRA)，其定义为

$$\mathrm{RRA}(x) = x \cdot \mathrm{ARA}(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

与绝对风险厌恶度量类似，相对风险厌恶度量对财富水平同样有不同的单调性，即递增的相对风险厌恶度量 (IRRA)，递减的相对风险厌恶度量 (DRRA)，常数相对风险厌恶度量 (CRRA)。对于一个具有递增的相对风险厌恶效用函数的决策者，他的初始财富投资于风险资产的比例将随着其财富的增加而减少；对于一个具有递减的相对风险厌恶效用函数的决策者，初始财富投资于风险资产的比例将随着其财富的增加而增加。

自从 von Neumann 和 Morgenstern 将期望效用假设公理化之后，经济学和金融学中的绝大多数模型都是以期望效用最大化为基本假设进行研究的。尽管期望

效用理论有效地解决和解释了很多现实问题和现象，但同样也让部分学者产生质疑和不满。到了 20 世纪 70 年代后期，实验经济学家们开始公布了大批违背期望效用理论的实验证据和现象，其中阿莱悖论 (Allais Paradox，Allais(1953)) 和埃尔斯伯格悖论 (Ellsberg Paradox，Ellsberg(1961)) 是最著名的两个反例。需要说明的是，尽管还有许多不满足期望效用理论的实验版本，但它们基本都是由这两个著名悖论演化而来的。

阿莱悖论

实验 Ⅰ				实验 Ⅱ			
选择 1A		选择 1B		选择 2A		选择 2B	
收益	概率	收益	概率	收益	概率	收益	概率
100 万元	100%	100 万元	89%	0	89%	0	90%
		0	1%	100 万元	11%		
		500 万元	10%			500 万元	10%

针对阿莱设计的两个实验，由于选择 1A 和 2A 的期望收益都分别小于选择 1B 和 2B。在期望效用准则下，风险中性决策者的选择应该是 1B 和 2B，风险厌恶决策者的选择应该是 1A 和 2A。然而现实是，大多数的实验参与者会分别选择 1A 和 2B，这显然和期望效用准则下的决策相矛盾。这就是阿莱悖论。

埃尔斯伯格悖论

罐中有 90 个球，已知其中有 30 个红球，其余的 60 个球可能是黑球或黄球，现从罐中等可能地随机抽取一个球。

实验 Ⅰ				实验 Ⅱ			
选择 1A		选择 1B		选择 2A		选择 2B	
结果	收益	结果	收益	结果	收益	结果	收益
红色	100 元	黑色	100 元	黑色	0	红色	0
非红色	0	非黑色	0	非黑色	100 元	非红色	100 元

针对这两个实验，如果按照期望效用准则来决策，那么实验参与者选择 1A 当且仅当出现红球的概率高于出现黑球，当然这也就意味着出现红球或黄球的概率都高于出现黑球，进一步它也等价于出现非黑色球的概率要高于出现非红球。因此，实验参与者对这两个实验只会在 (1A, 2A) 和 (1B, 2B) 这两种组合中进行选择。然而，实验的结果却是绝大多数参与者选择 1A 和 2B，这显然和期望效用准则下的决策又一次相矛盾。这就是埃尔斯伯格悖论。

比较这两个著名的悖论，我们发现这两个实验的主要差异在于风险的概率分布是否已知。因此埃尔斯伯格悖论和阿莱悖论的不同之处在于，它们暗示了在风险厌恶 (risk averse) 和不确定厌恶 (ambiguity averse) 情形下的决策应该有所差异。同时，它们也共同指出了期望效用准则在刻画理性决策者行为方面的缺陷和不足。为此，决策者希望能够有更为切实的理论来替代期望效用原理。在众多方法中，Kahneman 和 Tversky(1979) 的前景理论被大部分决策者所采用。相比于期望效用理论，前景理论发现并有效刻画了决策者的以下几种非理性行为：①“确定效应”，即处于收益状态时，大部分决策者都是风险厌恶者；②“反射效应”，即处于预期损失时，大多数决策者变得追求风险；③“损失厌恶”，即对于同等大小的损失和收益，大多数决策者对损失更敏感；④“参照依赖”，大多数决策者对得失的判断往往根据参考点决定。

前景理论被认为是一种在不确定性情形下刻画决策的描述性模型。它和期望效用准则的主要区别表现在两个方面。① 效用并不是由最终的财富值决定的，而是取决于某一参考点基础上的收益和损失。为此，该理论利用价值函数替代了效用函数。其中价值函数对于收益部分通常是凹的，而对于损失部分通常是凸的。另外由于 “反射效应”，损失部分的曲率要高于收益部分。② 个体对不确定性预期的评价依赖于 “决策权重”，为此它利用加权概率分布函数替代一般的概率分布函数。具体来说，对于小概率事件赋予稍大的权重，而对于大概率事件赋予偏小的权重。

1.2 供应链管理中的风险厌恶

无论是期望效用准则还是前景理论，它们共同发现了决策者具有风险厌恶行为，并且风险厌恶行为对决策有着非常显著的影响。尽管上述的发现都是基于实验经济学，但这一行为同样也在很多管理学领域中被验证。随着供应链中的不确定性逐渐增加，如何管理风险及如何在风险下决策成为供应链管理领域的热点问题 (van Mieghem, 2003; Zsidisin and Ritchie, 2008)。

对于供应链管理，如果我们想知道如何在风险下做决策，首先我们就要弄清楚供应链的风险来源于何处。对于一条供应链来说，我们通常会通过评估供应链绩效的波动性来衡量该供应链的风险，而影响供应链绩效不确定的因素实际上就是供应链风险的来源。例如，无论是需求的不确定还是供应的不确定都会影响供应链绩效，进一步也使得供应链绩效变得更不确定。由于能够影响供应链绩效波动的因素非常多，为此，我们将供应链风险分为两类，即供应链中断风险 (supply chain disruption risk)(Tang, 2006; Sodhi et al., 2012) 和供应链运营风险 (supply chain operational risk)(Choi and Chiu, 2012)。供应链中断风险主要是指人为因素和不可抗力因素导致供应链系统的正常运营过程发生中断，如经济政策的改革、贸易壁垒、

战争、地震、恐怖袭击、疾病等其他不可预见的事件或非主观意愿的结果。供应链运营风险是在生产经营活动中正常存在且可以预期的波动和不确定性，例如，供应的可靠性、需求的不确定性、产出的不确定性等因素都会产生供应链运营风险。

无论供应链风险来源于中断风险还是运营风险，重要的是我们需要有一套理论去系统地分析供应链风险。在运营管理的研究中，分析供应链风险的传统方法主要是期望准则法。例如，对于需求不确定下的库存决策问题，常用的方法是首先估计订购不足和超额订购的期望成本，然后通过权衡这两类期望成本从而得到最优的库存策略。对于准时生产 (JIT) 供应链中的提前期管理问题，由于供应的提前期不确定，常用的方法是首先分别量化产品晚到和提前到达所导致的期望成本，然后通过权衡晚到和提前到达的期望成本从而得到最优的决策。

尽管期望准则法非常直观而且结构简单，然而这一方法并不完美，因为期望准则法并不包含任何潜在的不确定性信息。具体来说，风险本质上应由两个固有的元素构成，分别是不利的结果和相关的不确定性大小。期望准则方法虽然可以得到不利结果的期望大小，却无法告诉决策者不确定性的大小。因此，基于期望准则方法得到的最优策略有可能无法在实际问题中实现最优，这主要是由于实现最优的可能性可能非常低，或者说决策者可能更愿意通过牺牲一些收益而获得更大的可能性以实现最优。另外，期望准则法的另一本质缺陷是它忽略了决策者的行为特征，或者说期望准则法仅能适用于风险中性的决策者。

为此，为了得到有效的最优决策，决策者还应该考虑将其他的一些风险度量方法纳入分析的框架之中。在上一节中提到，根据决策者的风险态度，我们可以将决策者分为风险中性、风险厌恶和风险追求三类。具体在供应链管理问题中，决策者通常表现出来的都是明显的风险厌恶行为，这一行为在现实世界中存在着许多的证据。比如，Fisher 和 Raman(1996) 通过观察一个时尚服饰制造商的订单记录发现订购数量系统的小于期望收益最大准则下的最优订购量。Patsuris(2001) 报道指出，即使在经济形势最困难的 2011 年，许多零售商却依然订购了许多不需要的库存。Kahn(1992) 发现在 20 世纪 80 年代早期及之前，克莱斯勒汽车的库存量始终高于其竞争对手通用汽车和福特汽车。究其上述现象的原因就是决策者表现出来了避免缺货和避免需求波动这一风险厌恶行为。至于为什么在供应链管理中决策者较少表现出风险追求的行为，其实前景理论的结论已经告诉了我们，当决策者面临损失时才会偏好风险。在真实的世界中，正常的供应链企业所面临的风险相比金融业等其他行业来说是相对较小的，另外保持盈利是正常供应链企业的通常状态，为此风险追求行为可能只在一些偶然或极端的情形才有机会表现出来。

通过上述的分析，我们可知对于供应链风险管理问题，传统的方法都是基于期望准则方法。然而，一方面由于上述提到的期望准则方法本身的缺陷，另一方面，决策者通常表现出风险厌恶的行为特征，为此我们需要一类新的方法去探寻风险

下的供应链最优决策，这类新的方法一般称为风险相关的替代模型。本书也是试图从这个视角，探索风险厌恶行为对零售商决策的影响。

1.3　风险度量准则

研究风险厌恶下的决策问题，如何刻画决策者的风险厌恶行为是问题的核心。近年来，除了使用传统的期望效用准则，越来越多的学者开始利用多种的风险偏好准则刻画风险厌恶行为。总结起来，现有的风险偏好准则可以大致分为两类，即效用函数框架下的风险度量准则与概率论框架下的风险度量准则。又可细分为如下五类：① 期望效用函数准则; ② 前景效用函数准则; ③ 均值–风险分析法; ④ 一致风险度量准则; ⑤ 概率/机会约束准则。下面我们将分别介绍上述几类准则及其之间的关系。

1.3.1　期望效用函数准则

根据期望效用理论，风险厌恶行为是通过一类效用函数刻画的，其定义如下。

定义 1.1 (风险厌恶效用函数)　令 $U(W)$ 是决策者在财富水平 W 下的效用函数，其中 $U(W)$ 为二次可微函数。对任意的 W, 如果下述两个条件成立，则该决策者是风险厌恶的。

$$U'(W) > 0$$

$$U''(W) < 0$$

基于上述定义及上文提到的著名的 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶度量，风险厌恶效用函数在期望效用理论框架下通常分为三类。

(1) 递减的绝对风险厌恶，即当决策者变得更富有时，其对风险的厌恶程度会降低。这类风险厌恶效用函数的具体形式有多种，比如：对数 (logarithmic) 效用函数，即 $U(W) = \log(W)$; 混合指数 (mixed exponential) 效用函数，即 $U(W) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{-\lambda_i W}$，其中权重 $\alpha_i > 0$，且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; 幂函数 (power) 效用函数，即 $U(W) = W^{1-\lambda}/(1-\lambda)$，其中 $\lambda > 0$ 为常数。

(2) 递增的绝对风险厌恶，即当决策者变得更富有时，其对风险的厌恶程度会增加。这类效用函数的具体形式，如二次 (quadratic) 效用函数，即 $U(W) = \alpha W - \beta W^2$，其中 $\alpha, \beta > 0$ 均为常数。

(3) 常数绝对风险厌恶，即决策者的风险厌恶程度和财富水平无关。具体的效用函数形式，比如指数 (exponential) 效用函数，即 $U(W) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda W}$，其中 $\lambda > 0$ 为常数。

通过对具体问题的分析和研究，决策者可以选择适当的效用函数刻画自身的风险偏好行为，并依此对决策进行优化与分析。当然，通过上述的总结，我们也发现，一方面，效用函数具有多样性和不唯一性等特点，即使对于同一类型的效用函数，如何确定具体的参数也尚无有效的方法和机制；另一方面，根据期望效用理论可知一个效用函数不仅可以刻画财富减少导致的效用递减程度，也同时可以刻画决策者的风险态度，然而效用函数却无法准确区分这两种不同的行为和现象。因此，效用函数并不是一个专用的风险度量准则，另外由于效用函数的多样性和不唯一性，它仅能用于经济理论研究，而无法应用于现实的管理决策中。

1.3.2　前景效用函数准则

在经典的经济学中，期望效用理论通常用于刻画决策者在不确定情形下的理性决策行为。与期望效用理论不同，前景理论主要刻画的是决策者在不确定情形下的非理性决策行为。前景理论认为决策者是: ①参照依赖的，即相比于变化的绝对大小，决策者对参考点附近的变化会更敏感；②损失厌恶的，即相比于等值的收益，决策者更厌恶损失；③风险偏好态度随参考点而变化，即决策者在获得收益时是厌恶风险的，而在遭受损失时是追求风险的。基于此，Kahneman 和 Tversky 提出了前景理论并给出了决策者的前景价值函数。

定义 1.2 (前景价值函数)　对于一个前景 $P=(p_1,x_1;\cdots;p_n,x_n)$，它的价值函数定义如下：

$$PT(P)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i U(x_i)$$

式中，x_i 是第 i 种可能的结果且 x_i 是一个有序数列，即 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k\geqslant 0> x_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$p_i$ 是第 i 种结果出现的概率且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，$U(\cdot)$ 表示对结果的效用或主观价值且满足 $U(0)=0$。π_i 是决策权重表示第 i 种结果出现的概率对整体预期价值的影响。当 $i\leqslant k$ 时，$\pi_i=\omega^+(p_1+\cdots+p_i)-\omega^+(p_1+\cdots+p_{i-1})$；当 $i>k$ 时，$\pi_i=\omega^-(p_i+\cdots+p_n)-\omega^-(p_{i+1}+\cdots+p_n)$。其中权重函数 $\omega^{+(-)}:[0,1]\to[0,1]$ 是连续且严格单调增函数，另外它在边界值满足 $\omega^{+(-)}(0)=0$ 和 $\omega^{+(-)}(1)=1$。

注释 1.1　从前景价值函数的定义中，我们容易发现，当 $\pi_i=p_i$ 时，期望效用函数与前景价值函数完全等价。另外，如果对一个前景进行度量，则必须对其损失部分和收益部分分别进行估值。

与期望效用理论中的风险厌恶行为不同，前景理论发现和验证了一个重要的非理性行为 —— 损失厌恶。如何刻画和定义该行为是前景理论的核心问题，为此 Tversky 和 Kahneman 基于决策者不喜欢对称的公平赌博 (50-50 bets) 及其厌恶程度随着赌注的增加而增加这两种行为，给出了如下定义。

定义 1.3　对所有 $x > y \geqslant 0$, 如果决策者认为前景 $(0.5, y; 0.5, -y)$ 总是优于前景 $(0.5, x; 0.5, -x)$，则该决策者是损失厌恶的。

另外，部分学者认为损失厌恶行为是因为效用函数在损失的部分会比在收益的部分更 "陡峭"(steeper)，并据此来判断是否损失厌恶。为了定义这种现象，学者们给出了两种定义 "陡峭" 的方法。

(1) 如果 $U(x) - U(y) < U(-y) - U(-x)$ 对所有 $x > y \geqslant 0$ 成立, 则这个效用函数在损失的部分比收益的部分更陡峭。

(2) 如果 $U'(x) < U'(-x)$ 对所有 $x > 0$ 成立, 则这个效用函数在损失的部分比收益的部分更陡峭。

尽管这两种定义方法十分相似，但并不完全等价，因为第二种定义所需的条件更强。但对于大部分情形，这两种定义是完全等价的。当然，这两种定义也被证明是与 Tversky 和 Kahneman 给出的损失厌恶定义是等价的。为此，损失厌恶的充要条件及损失厌恶程度的度量为

定义 1.4 (损失厌恶)　损失厌恶程度的度量为 $\lambda(x) = \dfrac{U'(-x)}{U'(x)}$，其中 $x > 0$。损失厌恶行为的充要条件为对所有 $x > 0$，

$$\lambda(x) > \frac{\omega^+(0.5)}{\omega^-(0.5)}$$

成立。当权重为等权重函数时，则损失厌恶行为的充要条件为对所有 $x > 0$，$\lambda(x) > 1$。

尽管前景理论可以更好地刻画决策者的非理性行为，但基于前景理论的价值函数，在一般形式下，通常无法应用于实际的问题。为此在理论研究中，学者们更感兴趣于是否有结构简单的价值函数以解决现实问题。基于前景理论中损失厌恶的定义，Köbberling 和 Waker(2005) 给出了如下一类效用函数以刻画损失厌恶行为：

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & x \geqslant 0 \\ \lambda u(x), & x < 0 \end{cases}$$

式中，$U(\cdot)$ 表示观测到的效用，而 $u(\cdot)$ 是基本效用函数；λ 表示损失厌恶程度。当然该定义说明了观测到的效用会随着财富处于损失或收益的状态而发生改变。这里 $u(\cdot)$ 是一个处处光滑的函数 (包括参考点 0)。这个定义虽然没有考虑权重对损失厌恶的影响，但简化了函数的刻画。随后，Wang 和 Webster(2009) 基于这个损失厌恶函数，考虑了一个特殊情形, 即 $u(x) = x$。

定义 1.5 (损失厌恶效用函数)　令 $U(W)$ 是决策者在财富水平 W 下的效用函数，W_0 是财富水平的参考点。如果该效用函数具有下述的分段线性形式，则该

决策者是损失厌恶的。

$$U(W) = \begin{cases} W - W_0, & W \geqslant W_0 \\ \lambda(W - W_0), & W < W_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

式中，$\lambda > 1$ 表示损失厌恶系数。损失厌恶程度越高则 λ 取值越大。

从损失厌恶效用函数的定义，我们发现该函数的定义是基于前景理论的。因为，它可以刻画参照依赖和损失厌恶等非理性行为。唯一的不足是该函数的边际效用不是严格递减的。但是，由于该函数是一个简单的分段线性效用函数，具有简单的函数结构和较好的计算性质，已经被学者们广泛应用于经济、金融、营销和运营管理等领域。

比较损失厌恶效用函数和风险厌恶效用函数，我们会发现它们有相似之处。① 它们都是效用函数，具有效用函数本身的优缺点；② 它们都刻画出了决策者对待“损失”或“ 潜在损失”所表现出来的厌恶行为。因此，与期望效用函数一样，前景效用函数不是专用的风险度量准则，仅能用于经济理论研究，而无法应用于现实的管理决策中。他们的区别主要在于参考点 W_0 的存在，因为根据参考点可以将财富分为“损失”或“收入”两部分，并由此在效用函数上利用不同的斜率来刻画。

1.3.3 均值–风险分析法

尽管损失厌恶和风险厌恶行为本质上是不同的决策行为且具有不同的定义，但现实中这两种行为却难以精确地区分，因此学者们有时将期望效用理论框架下的效用函数准则与前景理论框架下的价值函数准则统一认为是效用函数框架下的风险度量准则。与之相对应的则是另一类方法，即概率论框架下的风险度量准则。

概率论框架下的风险度量准则来源于金融学，其核心是对收益与风险的权衡。在研究方法上，“均值–风险”(mean-risk) 分析法和“机会/概率”约束法是两类主要的方法。对于均值–风险分析法，它通过对均值和风险的清晰刻画实现问题的量化分析，其中均值主要刻画的是收益的平均取值情况，而风险刻画的是收益的波动大小。该方法最大化均值与风险组合，并且在所有的可行决策中选择有效组合，即在给定的期望收益下寻找可以实现风险最小化的策略，或等价地，在给定的风险水平下寻找可以实现期望收益最大化的策略。均值–风险分析法具有很多优点，首先它允许该类问题可以通过一个二次优化问题刻画，另外它使得收益与风险的权衡变得更容易分析。

定义 1.6 (均值–风险分析法) 令函数 $R:\Omega \to \mathbb{R}$ 刻画随机收入的波动性，则均值–风险分析法就是通过求解如下规划权衡收益和风险：

$$\min_x -\alpha E(\pi(x)) + (1-\alpha)R(\pi(x))$$

或

$$\min_x -E(\pi(x)) + \lambda R(\pi(x)) \tag{1.2}$$

其中，$\alpha \in [0,1]$ 和 $\lambda > 0$ 表示权衡风险与收益的权重系数。

对于金融学中经典的投资组合优化问题，Markowitz(1952) 开创性地利用收益的方差刻画风险并研究相应的投资组合问题，即

$$R(\pi(x)) = \mathrm{Var}(\pi(x)) = E[(\pi(x) - E(\pi(x)))^2]$$

方差刻画风险，不仅计算简便，并且将复杂的投资组合问题退化为一个参数二次规划问题。这些优点使得投资组合问题易于建模和求解。为此，均值–方差分析法吸引了大量学者的关注和研究。现在该方法已被推广和应用于许多领域，尤其已在现实的金融决策中被广泛使用。

当然，利用方差刻画风险并不是完美的。我们很容易构造一个反例来说明方差的缺陷。例如，我们令 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ 且 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0.5$, 两个随机收入 X 和 Y 的取值情况如下：

	ω_1	ω_2
X	3	-1
Y	1	-1

显然，收入 X 是优于 Y 的。然而，当我们任意给定权重系数 $\lambda = 1$, 我们会发现

$$E(X) - 1 \cdot \mathrm{Var}(X) < E(Y) - 1 \cdot \mathrm{Var}(Y)$$

这意味着均值–方差准则下的结论是与之矛盾的。另外，从方差的定义可知，方差反映的是收益偏离期望收益的程度。对于投资者来说，他们仅仅希望降低收益低于期望收益时的偏离程度，而希望增大收益超过期望收益时的偏离程度，即投资者只认为下半方差是风险。然而方差的性质决定了它会同等地对待下半方差与上半方差，即方差会同时具有降低风险及获得超额收益的可能性。众所周知，风险和收益是成正比的，如果收益的分布是对称的，方差仍然是适合的风险度量方法，但无论是对于证券投资组合来说，还是对于库存管理来说，收益的分布大多不是对称的。为此，为了克服均值–方差分析法的这一缺陷，Artzner 等 (1999) 提出了一致风险度量理论 (coherent measure of risk)。

1.3.4　一致风险度量准则

为了克服方差刻画风险的缺陷，Artzner 等 (1999) 创立了一致风险度量理论，该理论指出一致风险度量应该满足如下的一些公理。

定义 1.7 (一致风险度量)　令 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一完备概率空间，$X:\Omega\to\mathbb{R}$ 表示随机收入，$\mathcal{H}=\mathcal{L}_\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为所有本质有界可测函数构成的概率空间。如果一个函数 $\rho:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 满足如下公理，则它被称为一致风险度量。

(1) 凸性: $\rho(\alpha X+(1-\alpha)Y)\leqslant\alpha\rho(X)+(1-\alpha)\rho(Y)$，对所有 $X,Y\in\mathcal{H}$ 和 $\alpha\in[0,1]$ 成立。

(2) 单调性: 如果 $X,Y\in\mathcal{H}$ 并且 $X\succeq Y$，则 $\rho(X)\leqslant\rho(Y)$。

(3) 平移不变性: 如果 $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $X\in\mathcal{H}$，则 $\rho(X+\alpha)=\rho(X)+\alpha$。

(4) 正齐性: 如果 $\alpha\geqslant 0$ 且 $X\in\mathcal{H}$，则 $\rho(\alpha X)=\alpha\rho(X)$。

其中，$X\succeq Y$ 表示 $\mathrm{Prob}\{X\geqslant Y\}=1$。

需要说明的是，上述公理都是在最小化框架下给出的，因此在一致风险度量准则下，风险值小的随机收入优于风险值大的随机收入。

对于上述四个公理，凸性公理表示一个投资组合的全局风险应该小于或等于组合中各资产的风险之和。因此，这条公理说明了投资组合具有分散化风险的作用。单调性公理与随机占优性等价。平移不变性公理表示对于一项投资来说，增加一个常数成本与增加等额的风险度量值是等价的。换句话说，风险度量中的固定部分是可以从风险度量中分离出来的。正齐性公理可以确保最优解不会因度量单位的取值改变而发生改变，比如货币单位从美元改成人民币。当然，更为重要的是，当多个资产是完全相关时，正齐性公理可以保证风险分散化效果不出现。这个公理主要是为了克服风险度量次可加性的缺陷。众所周知，次可加性 (subadditivity)，即

$$\rho(X+Y)\leqslant\rho(X)+\rho(Y)$$

是风险度量最为重要也是必备的一条性质，因为该性质表现出了风险分散化的效果。当然由次可加性的定义，我们可以得出 $\rho(nX)\leqslant n\rho(X)$ 是成立的。然而，如果 $\rho(nX)<n\rho(X)$ 成立就表示即使多个投资是完全相关的 (甚至相同的)，风险分散化效用依然存在。这显然是不符合实际的，因此当多个资产完全相关时，该不等式应只在等式情形下成立，即应满足正齐性公理 $\rho(nX)=n\rho(X)$。

一致风险度量本质上来说是均值–风险准则的一个特例。因为对于某些特定的风险度量 $R(\cdot)$ 和特定范围的权重 λ，优化模型 (1.2) 可以满足上述四个公理。因此，如果一个均值–风险模型满足了上述四个公理，则相应的模型 (1.2) 可以表示为

$$\min_x \rho(X)=-E(X)+\lambda R(X) \tag{1.3}$$

其中，$\rho(X)$ 为一致风险度量。

如果 $\rho(X)$ 的取值仅仅依赖于 X 的分布，也就是说如果 X_1 与 X_2 的分布相同，即 $\rho(X_1)=\rho(X_2)$，则一致风险度量 $\rho(\cdot)$ 是具有分布不变性的 (law-invariant)。