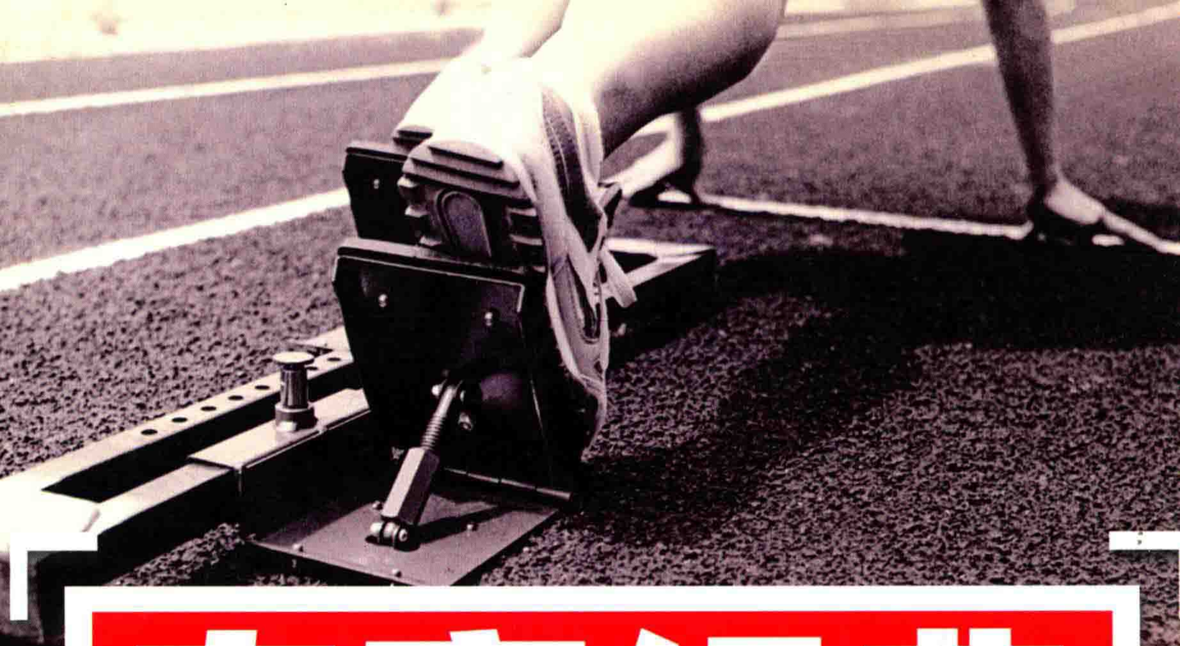


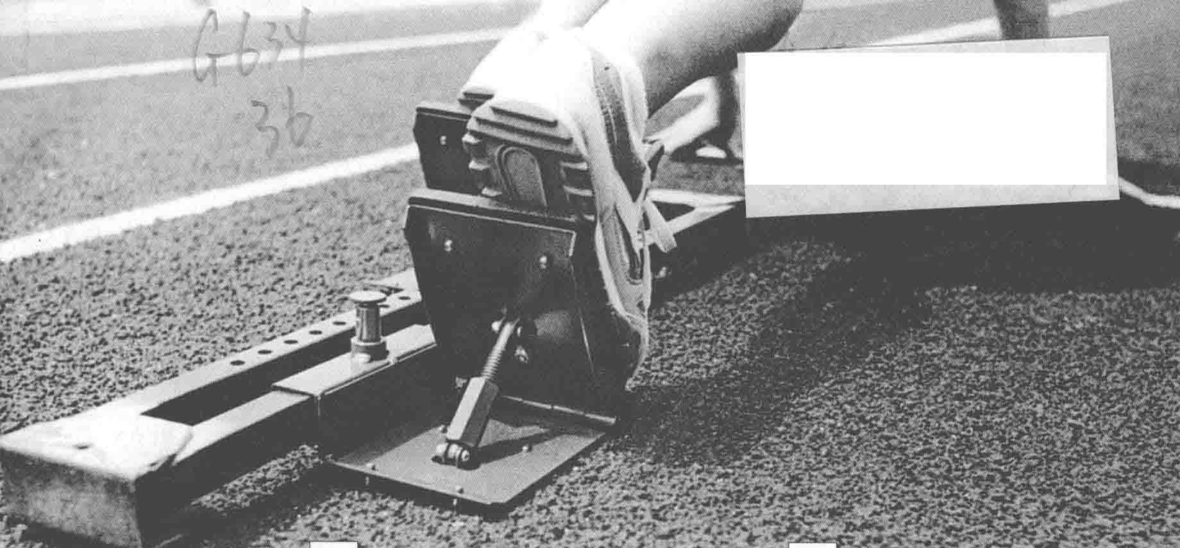
奥赛经典

分级精讲与测试系列

高一物理

◇武建谋/编著

湖南师范大学出版社



奥赛经典

分级精讲与测试系列

高一物理

◇武建谋/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

分级精讲与测试系列·高一物理 / 武建谋编著 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.5
(奥赛经典丛书)
ISBN 7-81081-424-9

Ⅰ.分… Ⅱ.武… Ⅲ.物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 038748 号

分级精讲与测试系列·高一物理

武建谋　编著

◇丛书策划:陈宏平　廖建军　周玉波　何海龙
◇组稿编辑:何海龙
◇责任编辑:莫　华
◇责任校对:胡晓军
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
网址/www.hunnu.edu.cn/press
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960　1/16
◇印张:11.75
◇字数:243 千字
◇版次:2004 年 10 月第 1 版　2005 年 3 月第 2 次印刷
◇印数:5001—10000 册
◇书号:ISBN 7-81081-424-9/G·268
◇定价:12.00 元

目 录

第一讲　运动学

竞赛要点

1. 运动学基本物理量

(1)参照系

为描述一个质点的运动，首先必须选定另外一个物体作为标准，这个被作为标准的物体称为参照物.不同的参照物对同一运动的描述一般说来是不同的.为表述的方便，我们还假想一个坐标系与参照物相固结，这个坐标系便为我们的参照系.通常我们所选用的参照系是固结于地球上的坐标系，即与地球无相对运动的坐标系.灵活选择参照物可以使得对某些问题的处理变得简单明了.

(2)位置、位移、速度和加速度

运动学的基本物理量常有位置、位移、路程、速度(包括平均速度和瞬时速度)、速率和加速度等.中学物理常规教材对此已有明确的叙述.由于位移、速度、加速度都是矢量，因此在描述它们时，要同时关注它们的大小和方向.

2. 运动的合成和分解

(1)运动的独立性原理

质点运动时，若同时受到几个互相独立因素的作用，而这几个因素独立作用于质点时都可以使质点产生一个相应的运动，则此质点的运动可以看成是由这几个独立进行的运动叠加而成的，这就是运动的独立性原理或称为运动的叠加原理.

(2)分运动和合运动

以上所谓独立的运动称为分运动，而它们的叠加结果就称为合运动.例如，我们熟知的平抛运动同时存在两个分运动：一是质点水平方向的匀速直线运动；二是质点在竖直方向受重力的作用做自由落体运动.这两个分运动的合成即为平抛运动.

合运动的位移、速度、加速度都是由各分运动对应的位移、速度、加速度叠加而成的.这里应该注意时间上的同一性，例如，是由同一时刻各分运动速度叠加而得到这一时刻合运动的速度.

由各已知的分运动可以确定它们的合运动，反之，由合运动也可以确定它的分运动，这就是运动的合成和分解.矢量的合成与分解遵循平行四边形法则.

3. 抛体运动

(1)处理抛体运动的方法

抛体运动通常指抛出的物体只受重力的作用下的运动,如平抛、斜抛等.处理抛体运动的方法通常是把它分解为水平方向的分运动和竖直方向上的分运动,作为两个分运动来处理.例如斜上抛运动便可看成是由水平方向的匀速直线运动和竖直方向上的竖直上抛运动所组成的合运动.但这不是惟一的处理方法,有时为了方便,也可以将抛体运动看成是由别的方向上的分运动组合而成的合运动.如前述的斜上抛运动也可以看成是沿初速度方向的匀速直线运动和自由落体运动两分运动组成的合运动.这一思路的来历是:只考虑初速度而不考虑重力作用时,质点将沿初速度方向作匀速直线运动;只考虑重力而不考虑初速度时,质点将作自由落体运动.

以上处理斜上抛运动的方法,也同样适应于斜下抛运动,还可进一步推广到其他恒力作用下(加速度恒定)质点做曲线运动的情形.

(2)斜上抛运动方程

位移方程:$\begin{cases} x = v_0\cos\theta \cdot t, \\ y = v_0\sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$

速度方程:$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta, \\ v_y = v_0\sin\theta - gt. \end{cases}$

轨迹方程:$y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2v_0\cos^2\theta}$.

4. 圆周运动

质点运动的轨迹为圆周(或圆周的一部分)时,质点的运动称为圆周运动.圆周运动中,质点的即时速度通常叫做线速度,方向沿圆周切线方向,其大小为 $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$,$\Delta s$ 为质点在时间 Δt 内通过的弧长.

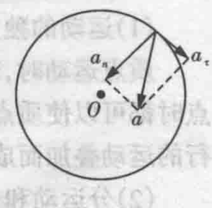


图 1-1

一般情况下作圆周运动的质点的加速度 a 可分解为沿半径指向圆心的分量 a_n 和沿圆周切线方向的分量 a_τ,如图 1-1 所示,其中 a_n 称为法向加速度(又叫向心加速度),它使速度的方向发生改变;a_τ 称为切向加速度,它使速度的大小发生改变.

对于匀速圆周运动,由于其运动速度不变,则 $a_\tau = 0$,故有

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}.$$

对于一般的曲线运动,同样可将其加速度分解为 a_n 和 a_τ,只不过式中的 R 应理解

为质点所在处曲线的曲率半径.

5. **相对运动**

如前所述,同一运动在不同的参照系中,其描述是不同的,这就是运动的相对性.同一运动在不同参照系中的描述可以互相转换.以速度为例,这种转换有以下的两个基本关系,即

$$\vec{v}_{A对B} = -\vec{v}_{B对A},$$

$$\vec{v}_{A对C} = \vec{v}_{A对B} + \vec{v}_{B对C}.$$

上面的 $\vec{v}_{A对B}$ 表示 A 物体相对于 B 物体的速度,即以 B 物体为参照物时所得到的 A 的运动速度.对于位移和加速度,上述转换关系照样成立.

通常我们把质点对地或地面上静止物体的运动称为绝对运动,质点相对于运动参照系的运动称为相对运动,而运动参照系相对地的运动称为牵连运动.以速度为例,这三种速度分别称为绝对速度、相对速度和牵连速度,则由上面的速度转换关系可得

$$v_{绝对} = v_{相对} + v_{牵连}.$$

在进行各参照系的速度转换时,各速度方向不一定在同一直线方向,要特别注意公式的矢量性.

前面已述,在处理运动学问题时,灵活地选用参照物,利用相对运动的转换关系,有时可使某些运动学问题的求解过程变得简捷.一个简单而能说明问题的例子是:一小船在河中逆流而上,某时刻,船上的一救生圈掉入河中之后在河水中随波逐流,历时 t 后,船上的人发觉救生圈丢了,便立即掉转船头向下游驶去寻找丢失的救生圈.问船掉头后要历时多久才能追上救生圈?(设河水流速恒定,船相对于水的速度也不变)

按常规思路一般取地球为参照物,建立运动方程来求解,则计算较繁琐.如选择河水为参照物(选择为参照物的物体即认为它静止),由于救生圈和流水是相对静止的,故也相当于取救生圈为参照物,则相当于救生圈不动,自救生圈掉下船至发现掉了救生圈这一段时间内是船远离救生圈而去,而船返回追救生圈的这段时间内则为船向救生圈靠拢.值得注意的是,船远离救生圈和靠近救生圈的两过程中,船相对河岸的速度是不相同的(顺水速度大于逆水速度),但船相对于我们选择的参照物即河水(或救生圈)的相对速度无论远离或靠近均为静水速度,即两过程的相对救生圈速度大小相等.又船远离和靠近救生圈的相对运动距离相等,显然船掉头追上救生圈的时间亦为 t.

6. **物体间的速度、加速度关联**

运动学问题中往往牵涉多个物体同时参与其中,情形比较复杂,但通过这些物体间其位形的礁何约束,可以找出它们运动参量之间的某些联系.作为力学的基础知识,这些结论或方法对于后面的进一步学习都是很重要的.

(1)刚性杆、绳上各点在同一时刻具有相同的沿杆、绳的分速度.

(2)接触物体在接触面法线方向的分速度相同,切向分速度在无相对滑动时也相同.

(3)线状交叉物体交叉点的速度是相交物体双方沿各自切向运动分速度的矢量和.

如图 1-2 所示的装置,细绳不可伸长,三个物体的加速度方向如图所示,那么它们的加速度 a_1、a_2、a_3 之间有什么关系呢?

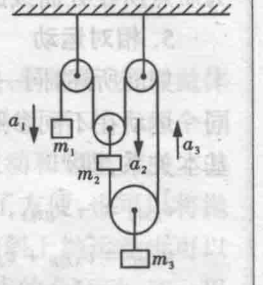


图 1-2

在 m_2 不动的情况下,m_1 物体下降 Δh_1 时 m_3 物体将上升 $\frac{\Delta h_1}{2}$,当 m_1 不动时,m_2 物体下降 Δh_2 时 m_3 物体也将上升 $\frac{\Delta h_2}{2}$.两个同时动时,m_1 下降 Δh_1,m_2 下降 Δh_2,m_3 上升 $h_3 = (\Delta h_1 + \Delta h_2)/2$.

根据速度的定义:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

$$v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta h_1}{\Delta t}.$$

m_2,m_3 物体的速度也有同样的公式,因此有

$$v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2).$$

上式无论在什么情况下都成立,设 v_1,v_2,v_3 速度有变化,则

$$\Delta v_3 = \frac{1}{2}(\Delta v_1 + \Delta v_2).$$

因为有

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

所以可以得到

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

又如图 1-3 所示的物体组合,由于 B 受重力作用,使 B 球向下作加速运动,同时三角形劈 A 向左加速运动.设球和劈在原来的 K 点接触,经过时间 Δt 之后,球上的 K 点移到了 P 点处,劈上的 K 点移到了 Q 点处,K,P 在同一铅直线上,因此 $\angle QPK = Q$,又 K,Q 在同一水平线上,所以 $\angle QKP = 90°$,所以有

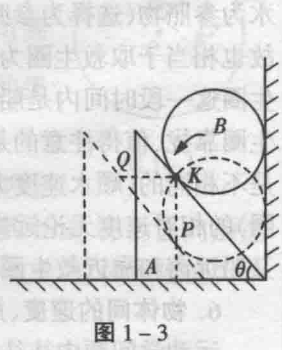


图 1-3

$$\frac{PK}{QK} = \cot\theta.$$

同样,在任何情况下都有(球 B 落地之前):

$v_A/v_B = \tan\theta$,

$a_A/a_B = \tan\theta$.

再有铰链铰接如图 1-4 所示.球 A、B、C 三点的速度和加速度之比,由几何关系可以得到:

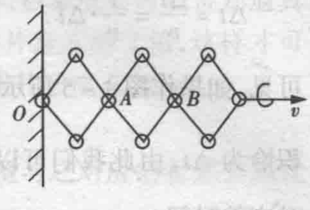


图 1-4

$OA:OB:OC = 1:2:3$.

因此

$v_A:v_B:v_C = 1:2:3$,

$a_A:a_B:a_C = 1:2:3$.

名题精析

例 1 一木板竖直地立在车上,车在雨中匀速前进一段给定的路程,木板板面与车前进的方向垂直,其厚度可以忽略.设空间单位体积中的雨点数目处处相等,雨点匀速竖直下落,下列诸因素中与落在木板上雨点数量有关的因素是(　　).

A. 雨点下落的速度　　B. 单位体积中的雨点数

C. 车行进的速度　　D. 木板的面积

解析 木板竖直,而雨点也竖直下落,所以车不动时,雨点是落不到板面上的.当车运动时,木板随车一起运动,这时雨点相对板面(以板为参照物)的运动可理解为由两个独立的运动合成,其一为雨点水平方向的匀速运动,其二为雨点竖直方向的匀速运动(收尾速度为匀速),这两个运动的合成使得雨点相对于板面斜向下匀速落向板面.显然,由上面的分析可知,水平方向的速度是导致雨点落在板面上的原因,易理解落在板面上的雨点数目的多少正比于水平方向速度(v)的大小,另外正比于时间(t)的长短、单位体积中的雨点数目(n)以及板面面积(S)的大小,即正比于这四个量的乘积,而前两个量的乘积恰为路程.由于本题中路程大小一定,因此决定落在板面上的雨点数量的因素是单位体积内的雨点数和木板的面积,即正确选项为 B、D.

例 2 蚂蚁离开蚁巢沿直线爬行,它的速度与到蚁巢中心的距离成反比.当蚂蚁爬到距巢中心 $l_1 = 1$ m 的 A 点处时,速度是 $v_1 = 2$ cm/s.试求蚂蚁继续由 A 点爬到距巢中心 $l_2 = 2$m 的 B 点需要多长的时间?

解析 蚂蚁爬行作变速运动,且不是匀变速运动,为求得蚂蚁爬完 A 点至 B 点这段路程所用的时间,没有现成的公式可以直接应用.为此,我们来研究蚂蚁爬完一小段路程 Δl 所用的时间 Δt.设蚂蚁在某一小段路程 Δl 上的速度为 v(由于 Δl 很小,则 v 可近似看成是常数,即在这小段时间内蚂蚁的运动可近似看成是匀速运动),则它爬完这段路程 Δl 所用的时间 Δt 为

$$\Delta t=\frac{\Delta l}{v}=\frac{1}{v}\cdot\Delta l.$$

可见,如果作图 1-5 所示的$\frac{1}{v}-l$图象时,其中阴影区的面积恰为 Δt,由此我们可以设法用$\frac{1}{v}-l$图上的面积来表示对应的时间.

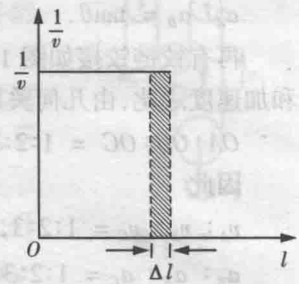


图 1-5

将蚂蚁由 A 至 B 的全程分为很多小段,设任一小段 Δl 上对应的速度为 v,则蚂蚁爬完全程所用的时间 t 为

$$t=\sum_{l=l_1}^{l_2}\frac{\Delta l}{v}=\sum_{l=l_1}^{l_2}\frac{1}{v}\cdot\Delta l.$$

依上分析可知,$\sum_{l=l_1}^{l_2}\frac{1}{v}\cdot\Delta l$之值近似等于图 1-6 中阴影部分的面积.这样,由图可求出蚂蚁由 A 点爬至 B 点所用的总时间 t 为

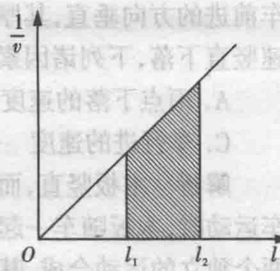


图 1-6

$$t=\frac{1}{2}(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})(l_2-l_1).$$

由于 $\frac{v_2}{v_1}=\frac{l_1}{l_2}$,

且 $l_1=1\ \text{m}, l_2=2\ \text{m}, v_1=2\ \text{cm/s}$,故得$\frac{1}{v_2}=\frac{2}{v_1}$.

所以 $t=\frac{1}{2}(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})(l_2-l_1)=\frac{3(l_2-l_1)}{2v_1}=75\ \text{s}$.

例 3 摄制电影时,为了拍摄下落物体的特写镜头,做了一个线度为实物的$\frac{1}{49}$的模型.放电影时,走片速度为每秒 24 张,为了使画面逼真,拍摄时走片速度应为多大?模型的运动速度应为实物运动速度的多少倍?

解析 设实物在时间 t 内下落的高度为 h,而模型用时间 t_0 下落了对应的高度 h.则由自由落体公式应有

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

$$h_0=\frac{1}{2}gt_0^2.$$

由于 $\frac{h_0}{h}=\frac{1}{49}$,

故得 $t_0=\frac{1}{7}t$.

可见放电影时应将模型运动的时间"放大"7 倍，才能使人们看电影时观赏到逼真的画面. 为此，在拍摄电影时，拍摄的走片速度应为放映时走片速度的 7 倍，这样才可使对应于模型运动时间 t_0 而放映时间却为 $7t_0$. 故得拍摄时走片速度应为

$$24\text{ 张/秒} \times 7 = 168\text{ 张/秒}.$$

又设实物在某段时间 Δt 内以速度 v 通过位移 Δs，而模型与之对应的量则分别是时间 Δt_0、速度 v_0、位移 Δs_0，由于有

$$\Delta t_0 = \frac{1}{7}\Delta t, \Delta s_0 = \frac{1}{49}\Delta s,$$

故得模型运动速度 v_0 与实物运动速度 v 之比为 $\frac{v_0}{v} = \frac{\Delta s_0/\Delta t_0}{\Delta s/\Delta t} = \frac{1}{7}$，即模型运动速度应为实物运动速度的 $\frac{1}{7}$.

例 4 如图 1-7 所示，一直角三角板 ABC 的斜边 AB 紧靠在竖直墙壁 M 上，$\angle B$ 紧靠墙根，三角形板面和竖直墙壁 M 垂直. 已知 AB 长为 a，BC 长为 b，若此三角形的 A、B 两点分别紧靠着竖直墙壁和水平地面滑动至图所示的位置，且滑动过程中板面始终与墙壁 M 垂直，求直角顶点 C 移动的路程.

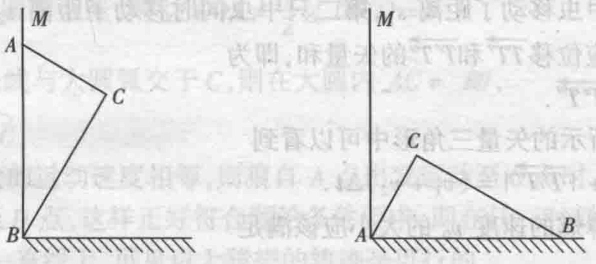


图 1-7

解析 考察三角板运动的某一中间状态，如图 1-8 所示，由几何关系易知，A、C、B、O 四点共圆. 连结 OC 可以看出，$\angle COB = \angle BAC$，由于 $\angle BAC$ 为定角，故三角板运动过程中 $\angle COB$ 的大小始终不变，说明直角顶点 C 的运动轨迹始终在直线 OC 上，即作直线运动.

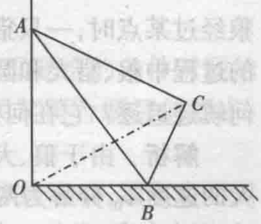


图 1-8

显然，C 点起始位置离墙角 O 的距离为 b，在三角板的运动中 C 点离墙角 O 的最远距离为 a，最终位置时，C 点离 O 的距离为 $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$. 因此整个运动过程中三角板顶点 C 运动的路程为

$$S = (a - b) + (a - \sqrt{a^2 - b^2})$$

$=2a-b-\sqrt{a^2-b^2}$.

例 5 一只蟑螂和两只甲虫在一水平大桌面上爬行，每只甲虫的速度都能达到 $v=1$ cm/s.开始时这些虫子恰位于一个等边三角形的三个顶点上.问蟑螂应具有什么样的速度，才能在两只甲虫任意移动的情况之下仍能保持三者分别位于一等边三角形的三个顶点上？

解析 假设在一段很短的时间间隔 Δt 内，第一只甲虫爬了 $s_1=v_1\Delta t$ 的距离，而第二只甲虫则爬了 $s_2=v_2\Delta t$ 的距离.为求蟑螂应该怎样移动才能保证它们移动后所处的位置能连成一个等边三角形，可以先假设第一只甲虫不动，而第二只甲虫爬了 s_2 的距离.由图 1－9 可见，为使三角形 $A_1A_2'T'$ 为等边三角形，蟑螂应移动距离 TT'，且

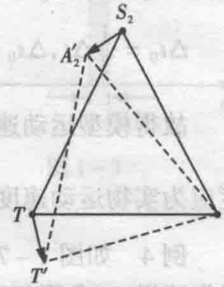


图 1－9

$|\overrightarrow{TT'}|=|\overrightarrow{s_2}|=v_2\Delta t$.

现在再假定第二只甲虫不动，而第一只甲虫爬了 s_1 的距离，那么此时蟑螂应移动一个距离 $T'T''$，

$|\overrightarrow{T'T''}|=|s_1|=v_1\Delta t$.

如果第一只甲虫移动了距离 s_1，第二只甲虫同时移动了距离 s_2，则蟑螂移动的距离应为前述两对应位移$\overrightarrow{TT'}$和$\overrightarrow{T'T''}$的矢量和，即为

$\overrightarrow{TT''}=\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'T''}$.

由图 1－10 所示的矢量三角形中可以看到

$|\overrightarrow{TT''}|\leqslant\overrightarrow{TT'}+|\overrightarrow{T'T''}|=(v_1+v_2)\Delta t$.

从上式可知蟑螂的速度 v_0 的大小应该满足

$v_0=\dfrac{|\overrightarrow{TT''}|}{\Delta t}\leqslant v_1+v_2=2v=2$ cm/s.

图 1－10

例 6 一只狼沿半径为 R 的圆形岛边缘按逆时针方向匀速跑动，当狼经过某点时，一只猎犬以相等的速度从岛中心 O 出发追逐狼，设在追逐的过程中狼、猎犬和圆心 O 三者在任一瞬间均在同一直线上，问猎犬应沿何轨迹追逐？它在何处可以追上狼？

解析 由于狼、犬和圆心 O 三点总在一直线上，故当猎犬未追上狼时，总可以把猎犬的速度 v_0 分解为两个分量：一个是与此时由圆心指向狼的半径垂直的分量 v_n，一个是沿上述半径由圆心指向狼的方向的分量 v_r，v_n 起保证狼、猎犬和圆心三者在同一直线的作用，而 v_r 则起使犬和狼之间的距离缩小的作用.由此，猎犬总可以追上狼.由于狼绕着圆周运动，故猎犬的速度方向需不断地变化，则猎犬运动的轨迹应为一曲线.

根据狼的运动轨迹和狼与猎犬运动速度相等的特征，我们可以猜想猎犬的运动轨

迹也是一条圆弧线,以下就循此猜想来进行分析.

如图 1-11,设狼位于 A 点时猎犬自圆心 O 出发,出发时由于猎犬本身在 O 点,故不需要 v_n 分量的作用,可见此时猎犬的速度方向就是沿 OA 方向,即在 O 点处猎犬运动轨迹曲线的切线是沿 OA 方向的.则上述猜想的猎犬轨迹圆弧的圆心应位于与半径 OA 垂直的半径 OB 上.另一方面,考察当猎犬刚追上狼时,应该是猎犬速度的分量 v_n 与狼的速度相等,则此时狼与猎犬的速度相同(猎犬此时的速度分量 v_r 为零).由前分析已有:猎犬运动轨迹圆的圆心必在 OB 上,且在 B 点时狼的速度与 OB 垂直,则 B 点可作为猎犬刚好追上狼的点.这样,上述猜想的猎犬运动的轨迹便是以 OB 为直径的半圆弧.

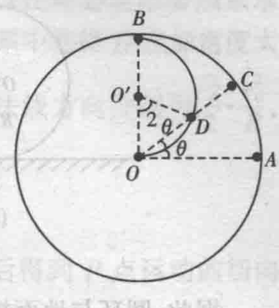


图 1-11

如图 1-11,设想猎犬沿以 OB 为直径的半圆弧运动,则当其运动到弧上的任一位置 D 时,设$\overset{\frown}{OD}$在以 OB 为直径的小圆内所对的圆心角为 2θ,则

$$\overset{\frown}{OD}=\frac{R}{2}\cdot 2\theta=R\theta.$$

由于 OA 为小圆的切线,则 $\angle DOA=\frac{1}{2}\angle DO'O=\theta$.

令 OD 的延长线与大圆弧交于 C,则在大圆内 $\overset{\frown}{AC}=R\theta$,

故得 $\overset{\frown}{OD}=\overset{\frown}{AC}$.

由于狼和猎犬的运动速度相等,则狼自 A 点出发运动至 C 点时,猎犬自 O 点出发沿小圆弧必刚好至 D 点,这样正好符合题给条件要求,即在任一时刻满足狼、猎犬和圆心 O 三者均在同一直线上.可见以上猜想的轨迹是可行的.

由上分析可知,若狼的初位置对应于圆形岛的半径为 OA,另一条与之垂直的半径为 OB(OB 的指向与狼的初速度方向相同),则猎犬应沿以 OB 为直径的半圆弧按逆时针方向运动,便可在岛缘的 B 点刚好追上狼.

启迪与思考 本题的求解采用了猜想→验证的思路.即先根据题给的条件对题的答案进行猜想,然后再对这一猜想的答案进行严格的检验来证明其符合题目的要求.这种思路是分析物理问题常用的思路之一.

例 7 有一半径为 R 的刚性圆环竖直地在刚性水平地面上作纯滚动,圆环中心以不变速度 v_0 在圆环平面内水平向前运动.求圆环上与圆心等高的 P 点的瞬时速度、切向加速度、法向加速度.如图 1-12(a)所示.

解析 圆环在地面上作纯滚动,必然满足条件

$v_0=R\omega$.

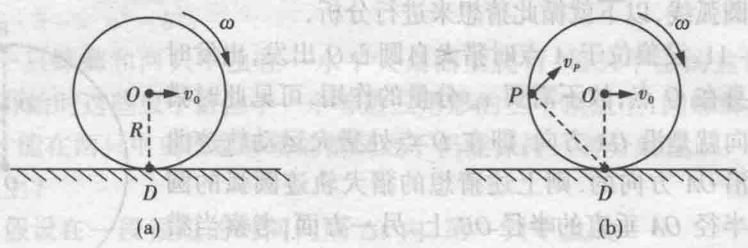


图 1－12

据此，圆环与地面接触点 D 在地面参照系速度为零，D 点为速度瞬心．因此，在该瞬时 P 点的运动是相对于 D 点、角速度为 ω 的一个转动，P 的速度方向垂直于 B，即与速度 v_0 的夹角为 45°，如图 1－12(b)所示．此方向就是 P 点瞬时运动的切线方向，速度大小为

$$v_P = \overset{\frown}{PD}\cdot\omega = \sqrt{2}R\cdot\frac{v_0}{r} = \sqrt{2}v_0. \quad ①$$

P 点速度还可以表示为

$$v_P = v_0 + v_P'.$$

其中 v_P' 为 P 点相对环心 O 的速度．由此写出 P 点运动的加速度

$$a_P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(v_0 + v'_P)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v'_P}{\Delta t}. \quad ②$$

即 P 点相对于地面的加速度和相对于环心 O 的加速度相同(此处已利用 v_0 是常量，牵连加速度为零)．这容易理解，因为地面参照系和环心参照系均为惯性系，质点 P 的运动加速度是一个绝对量(即不变)．这个加速度等于 P 点绕 O 点作圆运动的向心加速度，大小为 $v_P' = R\omega = v_0$．最后得 P 点的切向加速度和法向加速度大小分别为

$$a_\tau = \frac{v_0^2}{R}\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0^2}{R}, \quad ③$$

$$a_n = \frac{v_0^2}{R}\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0^2}{R}. \quad ④$$

启迪与思考　有人认为，既然 P 点的运动是该瞬时 P 点绕 D 点的一个转动运动，那么 P 点的加速度就应该是从 P 点指向 D 点的向心加速度，因此只有法向加速度无切向加速度，且加速度大小为

$$a_P = \frac{v_P^2}{\sqrt{2}R} = \sqrt{2}\cdot\frac{v_0^2}{R}.$$

其中已利用式①．这个结论无疑是错误的．原因是这里只计算了 P 点相对 D 点的相对加速度，没有计算 D 点的牵连加速度．不要误认为瞬时速度为零的 D 点，其瞬时加速

度也为零. D 点的加速度既可以在地面静止参照系求出,也可以在环心运动参照系求出.前面已指出,这是因为两参照系均为惯性系的缘故.在环心系中易得 D 点加速度大小为$\frac{v_0^2}{R}$,方向竖直向上指向环心,它在 P 点运动的切线方向和法线方向分别为$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0^2}{R}$,$-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v_0^2}{R}$.

再利用 P 相对 D 的相对加速度大小(法向)$a_P'=\frac{\sqrt{2}v_0^2}{R}$,最后得到 P 点运动的切向加速度和法向加速度与式③和④相同.

例 8 一个半径为 R 的环(环心为 O_2)立在水平面上,另一个同样大小的环(环心为 O_1)以速度 v 从前一环的旁边经过,如图 1-13 所示.试求当两球的环心相距为 d $(2R>d>0)$时,两环上部的交点 A 的运动速度.两环均很薄,可以认为两环是在同一平面内,第二个环是紧贴着第一个环擦过去的.

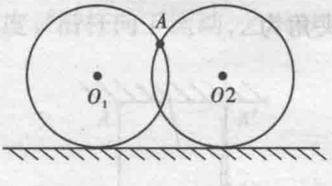


图 1-13

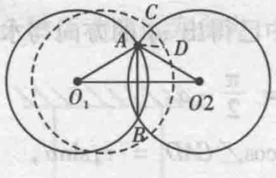


图 1-14

解析 解法一:用微元法求解.

设两环心相距为 d 时的位置如图 1-14 中的实线所示,自此时刻起,经历一段极短的时间 Δt,动环移到了图中的虚线位置,而两环上部的交点则由图中的 A 点移至 C 点,由于 Δt 很小,故图中 A、C、D 三点是相距很近的(为使图中相对位置清楚,图中的位移是夸大了的),则$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{DC}$可以近似地看成是与弦 AC、DC 重合的.故这段时间内,动环的位移可用 AD 表示,交点的位移可用弦 AC 表示,其大小分别为

$$AD = v\Delta t,AC = v_A\Delta t,$$

所以 $v_A=\frac{AC}{AD}v$. ①

上式中 v_A 为交点的移动速度.又以 α 表示等腰$\triangle AO_1O_2$ 的底角,且视 AC 为一小段弦,则由图中有

$$\angle CAD = \frac{\pi}{2}-\angle DAO_2=\frac{\pi}{2}-\alpha;$$

又在等腰 ΔADC 中,有

$$AD = 2AC\cdot\cos\angle CAD,$$

即 $AD=2AC\cdot\cos\angle CAD$， ②

以②式代入①式有

$$v_A=\frac{v}{2\sin\alpha}=\frac{v}{2\sqrt{R^2-(\frac{d}{2})^2/R}}=\frac{R_v}{\sqrt{4R^2-d^2}}.$$

解法二：由速度的分解求解.

仍如图 1－14，由于交点是在不动的环上由 A 点移至 C 点，故交点的移动速度必沿不动圆环的切线方向.另一方面，可以从水平方向上来考察交点的运动，当交点由 A 移至 C 时，由于交点在水平方向上的坐标总是与两环心连线中点的坐标相同，则在任何一段时间内此交点的水平位移总是等于环心 O_1 的水平位移的一半，即此交点速度的水平分量是

$$v_{Ax}=\frac{1}{2}v.$$

由上一解法中已得出 v_A 的方向与水平方向的夹角为

$$\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

则有 $v_{Ax}=v_A\cos\angle CAD=v_A\sin\alpha$，

故得 $v_A=\dfrac{v_{Ax}}{\sin\alpha}=\dfrac{v}{2\sin\alpha}=\dfrac{Rv}{\sqrt{4R^2-d^2}}$.

启迪与思考 本题所用的两种解法是求解运动学问题时常用的方法.特别是微元法，更是物理学中分析和求解问题时常用的方法.在物理学问题中，往往是针对一个对象经历某一过程或处于某些状态来进行研究，而在此过程中或状态之间，描述研究对象的物理量可能是不变的，更多的则可能是变化的.对于那些变化的量的研究，有一种方法是把全过程分为很多短暂的小过程或把研究对象的整体分解为很多微小的局部来考察，然后通过对这些小过程或微小局部的研究而归纳出适用于全过程或者是整体的结论.这些微小过程或者是微小局部常被称为“微元”，这种方法也就被称为“微元法”.

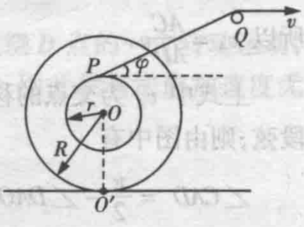


图 1－15

例 9 半径为 r 的小圆柱同心地固连于半径为 R 的大薄圆柱上构成一个线轴，缠绕在线轴上的线引出并绕过滑轮 Q 后，以恒定速度 v 拉线的一端，同时线轴的大圆柱沿水平平面作无滑动的滚动运动，如图 1－15 所示.运动中线 PQ 段与水平方向夹角为 φ，求线轴中心 O 点的速度随角变化的关系式.