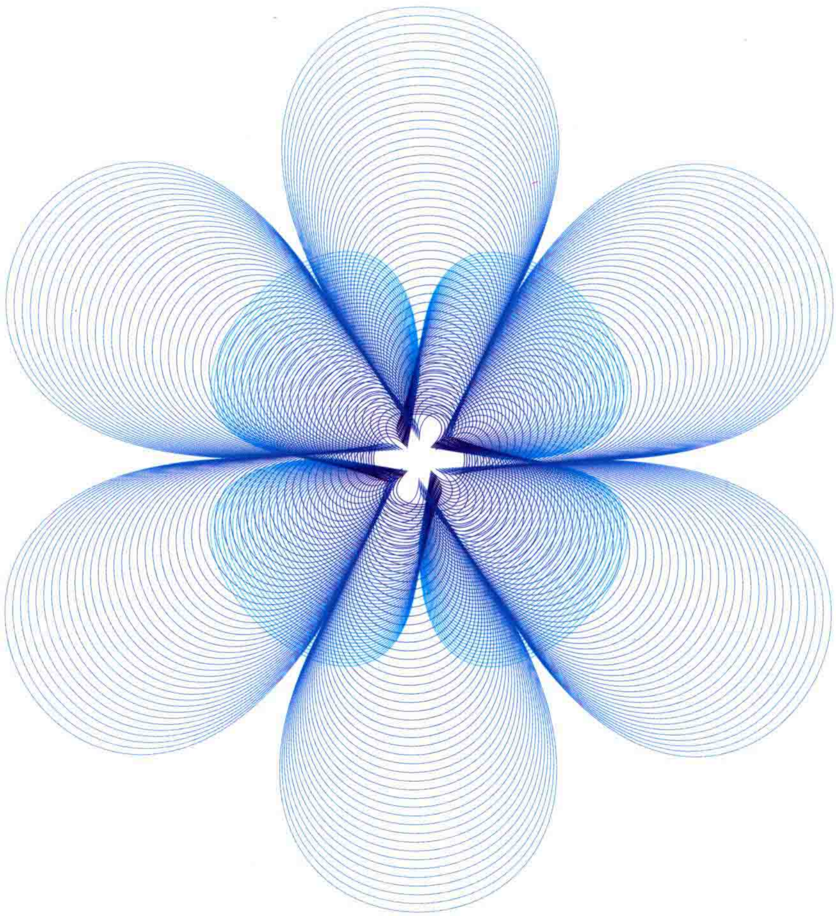
高考数学万能解题法

只做50道题就参加高考

窦志民　编著

修订版

- 提前放弃题海战术，只做最精的实战优选题目
- 摸清高考出题策略，从历年真题中挑战最高分



化学工业出版社

高考数学万能解题法

只做50道题就参加高考

窦志民　编著

修订版

化学工业出版社

·北京·

本书是一本特别针对高考数学而编写的实用应考指南，旨在帮助考生在短时间内完整掌握高考数学的知识点和解题要点，从而快速准确地解答高考题，大幅度提高解题速度和质量.

本书甄选50道最具代表性的高考题，从中总结高中数学的解题思路、解题步骤和知识要点. 本书选题普遍具有“基础”“知识点突出”和“强化细节”的特点，对于高考第二轮复习，也就是知识点综合运用，相当有帮助. 每道例题之后，都会再延伸出5道类似的题目作为练习，让考生能够学以致用，进一步加强认识.

本书知识点全面，选题精辟、重点突出，是广大高考生必备的实用指南.

图书在版编目（CIP）数据

高考数学万能解题法：只做50道题就参加高考（修订版）/窦志民编著. —北京：化学工业出版社，2017.1
ISBN 978-7-122-28695-6

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①窦…　Ⅲ. ①中学数学课-高中-题解-升学参考资料　Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第309143号

责任编辑：张素芳　　装帧设计：关　飞
责任校对：宋　玮

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：大厂聚鑫印刷有限责任公司
710mm×1000mm　1/16　印张 $10\frac{1}{4}$　字数265千字　2017年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80元　

前言

高考是我国学生通往大学的必经之路. 有人形容高考是一座独木桥，只有胆大心细的人才能闯过去，更多的人，因为慌张或者技术技巧问题而落水. 但是，当那些成功闯过独木桥的人回头看的时候，会惊讶地发现，原本桥身并没有想象中的那样狭窄，究其原因，不过是人在高中时期所掌握的知识面不够广，技术技巧不够娴熟，心理机制不够完善，凭空放大了困难的模样.

实际上，高考确实是一种能力与技能的考试，它考察的并非是你是否掌握了某种知识，而是你是否拥有掌握这种知识的能力，以及你运用这种知识的技能有多么娴熟. 这个考试思想在数学学科里的体现尤为明显.

我国的高考数学题目，向来在世界范围内颇受好评，因为它梯度明显，解答弹性好，涉及的知识面广而精炼，可以直接测试出一个学生在数学方面的知识接受能力和逻辑思维程度. 对于高中学生来说，高考数学从集合、函数开始，至解析、立体几何为止，理科学生比文科学生要多接受算法、极限等方面的训练，因此，一张高考数学试卷里，几乎每道题都考到了一个知识点，而这些通常被称为“考点”的知识点，普遍是高中数学学习过程中的重点，而并非难点. 高考的难度体现在个别（约1～3道）题目上，仅针对挑战高分、满分和能力有余的学生，对于绝大多数学生来说，高考数学题目并不难做，即使完全放弃以上所说的难度题，仍然能有可观的分数——这也是高考命题委员会的出题原则——基础题占据了试卷的70%甚至更多.

但是，为什么绝大多数学生头疼的科目，偏偏就是数学?

在很多学生心目中，数学是一个靠海量练习累积而成的学科，同样的题目，条件和结论换位，算法立刻产生了翻天覆地的变化，即使几个数字略加更改，也可能导致完全不一样的解答，好像除了“做遍天下数学题”以外，并没有其他良好的解决办法. 然而，不容忽视的是，在长期“不假思索”的解题过程中，学生对题目产生了熟悉感，却离知识和基础的数学思想越来越远，以至于只会解传统题，一旦题目发生法则以外的变化，学生就只能陷入痛苦重复的错误演算中，自信心受挫，完全找不到解决办法.

有个很典型的例子：某小区有一个面积为 A 的池塘，种植了面积为单位 1 的一片荷叶，每一天，这片荷叶都会长大，面积是前 1 天的 2 倍，20 天后，这片荷叶铺满了整个池塘，试问，当荷叶面积等于 $A/2$ 的时候，是生长期的第几天?

很多学生在拿到题目的时候，瞬间会想到，这是一个等比数列——你是否知道相关的公式和解法——绝大多数学生都知道，但是这道题的答题正确率并不算高，甚至有人写出带分数线、根号的答案. 对于一道填空题来说，花去这样的精力列算式是非常吃亏的，题目本身的巧妙点就在于，它从另一个角度考察了你对“等比数列”这个概念的理解，那就是，后一个数字和前一个数字的比，与前一个数字和再前一个数字的比，是一样的. 这个最基础最浅显的概念才是解题的关键，答案非常简单，第 20 天时，荷叶面积是 A，那么鉴于“2 倍”的公比，第 19 天的时候，面积就是 $A/2$. 不需要算式，甚至，不需要动笔.

这道题目道破了高考数学的天机，对于数学学科来说，掌握基础知识，并且在实践中总结、运用基础知识才是制胜的关键点，高超的解题技巧固然可以带来事半功倍的效果，然而对基础知识的理解，永远是最关键的一部分.

因此，我们编写了一本相对于其他教辅图书来说，题量非常少的数学教辅图书. 本书精选了在高考过程中出现的 50 道基础类真题，帮助你进一步复习、理解最基础的数学知识. 在选题的时候，每一道题都经过了数学老师们的衡量，普遍具有以下 5 个特点：

(1) 每年必考的知识点；

(2) 重复考查的高频率知识点；

(3) 易错、易混淆的相似知识点；

(4) 令人“不理解”的中等难度知识点；

(5) 贯穿小、初、高，甚至大学还要用到的解题思想.

符合这 5 个条件的 50 道真题，按照类型划分为了若干知识模块，方便考生选择性阅读、练习. 同时，这 50 道真题量虽少，内容却十分精巧，考生反复琢磨体会.

希望本书可以从知识、技能的角度，带给广大考生关于数学高考的新思路，愿本书读者金榜题名.

最后，特别感谢戴秋馨、范澄、龚雪蓉、张韧、赵雪凤，以及覃子洋、刘欣然、王珊珊、张筱玫、朱成蹊、薛嫄、黄李慧、谢楠、金秀芳、霍连杰等在本书编写过程中提供的帮助和做出的贡献.

编著者

本书使用说明

(1) 章节前的考点、知识提示不可跳过，应仔细回想相关公式、定理、公理，为做题热身.

(2) 本书精选了 50 道考前复习必做的基础类题目，均来自全国高考考卷.

(3) 每章后，针对本章节的 5 道例题的相关解法、知识点，设计有匹配的 5 道练习题.

(4) 请仔细研读例题，反复思考解法，做练习时，不要继续翻阅答案，解不开的步骤可以倒回例题部分，查看相关解答.

(5) 数学复习讲究适量、精炼，完全掌握 50 道题，领会 50 道题的思路和方法，胜过做 500 张模拟卷.

目 录

第 1 章

函数、导数

1.1 高考重点内容

(1)函数：函数的概念与表示，映射，单调性与最大(小)值，奇偶性，周期性及其图象变换.

(2)指数函数：有理指数幂的含义，实数指数幂的意义，幂的运算，指数函数概念、图象及其性质.

(3)对数函数：对数的概念及其运算性质，换底公式，对数函数的概念、图象及其性质，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数($a>0$ 且$a\neq 1$).

(4)幂函数：幂函数的概念，幂函数 $y=x^a$ 的图象及其性质.

(5)函数的零点.

(6)函数模型的应用.

(7)导数及其应用：导数的几何意义，根据导数定义求函数的导数，导数的四则运算，简单的复合函数的导数，导数公式表，利用导数研究函数的单调性(其中多项式函数不超过三次)，函数的极值、最值，利用导数解决某些实际问题，定积分与微积分基本定理.

1.2 最新高考真题

例 1.(全国卷Ⅰ) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(Ⅰ)求 a 的取值范围；

(Ⅱ)设 x_1、x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

试题分析	求导，当 $a=0$，显然，$f(x)$ 只有一个零点，不合题意．当 $a\neq 0$ 时，分别讨论 $a>0$ 或 $a<0$ 的情况，可得 a 的取值范围． 欲证 $x_1+x_2<2$，只要 $x_1<2-x_2$ 即可，根据（Ⅰ）中的增减性，可由 $f(x_1)$ 与 $f(2-x_2)$ 的值进行判定，由 $f(x)$ 的增减性所决定．

试题详解

（Ⅰ）$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$

① 当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$ 只有一个零点，不合题意；

② 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，故 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增．故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值也是最小值点，$f(1)=-e$，而 $f(2)=a>0$；又取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$，则 $f(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a\left(b^2-\frac{3}{2}b\right)>0$．故 $f(x)$ 存在两个零点；

③ 当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$．当 $a\geqslant\frac{-e}{2}$ 时，$\ln(-2a)\leqslant 1$．故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单增；当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，所以，$f(x)$ 不存在两个零点．

若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 单减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单增．又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点．

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$．

（Ⅱ）不妨设 $x_1<x_2$，由（Ⅰ）知 $x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，则 $2-x_2\in(-\infty,1)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单减，故 $x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$．即 $f(2-x_2)<0$，而 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，$f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$ 所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$．

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$．

则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$，所以，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，而 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<0$，从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$．

例 2.（浙江） 已知 $a\geqslant 3$，函数 $F(x)=\min\{2|x-1|,x^2-2ax+4a-2\}$，其中 $\min\{p,q\}=\begin{cases}p, & p\leqslant q,\\ q, & p>q.\end{cases}$

（Ⅰ）求使等式 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围；

（Ⅱ）（ⅰ）求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$；

（ⅱ）求 $F(x)$ 在区间$[0,6]$上的最大值 $M(a)$.

试题分析 第（Ⅰ）问实际上就是 $x^2-2ax+4a-2<2|x-1|$，解这个不等式即可.（Ⅱ）中的 $m(a)$，由 $(2|x-1|)_{\min}$ 与 $(x^2-2ax+4a-2)_{\min}$ 决定，比较二者可得，$M(a)$ 则为二者在$[0,6]$上的最大值. 由于函数 $2|x-1|$ 的值是确定的，故考虑 $x^2-2ax+4a-2$ 在区间端点与顶点的值即可.

试题详解

（Ⅰ）已知 $a\geqslant 3$.

当 $x\leqslant 1$ 时，$x^2-2ax+4a-2-2|x-1|=x^2-2(a-1)x+4a-4$，其对称轴 $x=a-1\geqslant 2$. 最小值为 $1^2-2(a-1)+4a-4=2a-3>0$，不合题意.

当 $x>1$ 时，令 $x^2-2ax+4a-2-2|x-1|=(x-2)(x-2a)\leqslant 0$，得 $2\leqslant x\leqslant 2a$，即使 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 $x\in[2,2a]$.

（Ⅱ）（ⅰ）显然 $(2|x-1|)_{\min}=0$，而 $(x^2-2ax+4a-2)_{\min}=-a^2+4a-2$ 当 $a\geqslant 3$ 时，$a\in[3,2+\sqrt{2})$，$-a^2+4a-2>0$；$a\geqslant 2+\sqrt{2}$，$-a^2+4a-2\leqslant 0$.

$$\therefore m(a)=\begin{cases}0, & 3\leqslant a\leqslant 2+\sqrt{2},\\ -a^2+4a-2, & a>2+\sqrt{2}.\end{cases}$$

（ⅱ）由（Ⅰ）知，$x\in(2,6]$ 时，$x^2-2ax+4a-2>2|x-1|$，$x\in[0,2]$ 时，$2|x-1|>x^2-2ax+4a-2$.

当 $x\in[0,2]$ 时，$F(x)_{\min}=\max\{f(0),f(2)\}=2$.

当 $x\in[2,6]$ 时，$g(x)=x^2-2ax+4a-2$ 的对称轴 $x=a\geqslant 3$，最大值为 $g(6)=34-8a$，令 $h(a)=34-8a$，当 $a\in[3,4]$ 时，$34-8a\geqslant 2$.

$$\therefore M(a)=\begin{cases}34-8a, & 3\leqslant a<4,\\ 2, & a\geqslant 4.\end{cases}$$

1.3 高考实战解析

例 1.（北京） 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$；

（Ⅲ）设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 k 的最大值.

试题分析

很明显，本题考查导数的几何意义；利用导数研究函数的单调性，证明不等式；含参数问题讨论.

利用导数的几何意义，求出函数在 $x=0$ 处的函数值和导数值，再利用直线方程的点斜式写出直线方程；第二问可用作差法，考查两点：函数是否递增，在 $x=0$ 处的值是否大于或等于零；第三问仍需作差，但要对参数 k 进行讨论. 由第二问可知 $k=2$ 时符合题意，故只需对 $k>2$ 作研究.

试题详解

(Ⅰ) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$，$f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$，$f'(0)=2$，$f(0)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $2x-y=0$；

(Ⅱ) 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$，即不等式 $f(x)-2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)>0$，对 $\forall x\in(0,1)$ 成立.

设 $F(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$，则 $F'(x)=\frac{2x^4}{1-x^2}$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，则 $F(x)>F(0)=0$. 因此对 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$ 成立；

(Ⅲ) 使 $f(x)>k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$ 成立，$x\in(0,1)$，等价于：

$F(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)>0$，$x\in(0,1)$；

$F'(x)=\frac{2}{1-x^2}-k(1+x^2)=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}$，

当 $k\in[0,2]$ 时，$F'(x)\geqslant 0$，函数在 $(0,1)$ 上为增函数，$F(x)>F(0)=0$，符合题意；

当 $k>2$ 时，令 $F'(x)=0$，得 $x_0{}^4=\frac{k-2}{k}\in(0,1)$，

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	极小值	↗

由函数 $F(x)$ 的变化情况可以看出 $F(x)<F(0)$ 不恒成立，

综上所述可知：k 的最大值为 2.

例 2. (全国卷Ⅰ) 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$

（Ⅰ）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅱ）用 $\min\{m, n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\}$，$(x>0)$，讨论 $h(x)$零点的个数.

试题分析

（Ⅰ）先利用导数的几何意义列出关于切点的方程组，解出切点坐标与对应的 a 值；（Ⅱ）根据对数函数的图象与性质将 x 分为 $x>1$，$x=1$，$0<x<1$ 研究 $h(x)$的零点个数，若零点不容易求解，则对 a 再分类讨论.

试题详解

（Ⅰ）设曲线 $y=f(x)$与 x 轴相切于点$(x_0, 0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，

即$\begin{cases} x_0^3+ax_0+\dfrac{1}{4}=0 \\ 3x_0^2+a=0 \end{cases}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{2}$，$a=-\dfrac{3}{4}$. 因此，当 $a=-\dfrac{3}{4}$时，x 轴是曲线 $y=f(x)$的切线.

（Ⅱ）当 $x\in(1, +\infty)$时，$g(x)=-\ln x<0$，从而 $h(x)=\min\{f(x), g(x)\}\leqslant g(x)<0$，

$\therefore h(x)$在$(1, +\infty)$无零点.

当 $x=1$ 时，若 $a\geqslant-\dfrac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\dfrac{5}{4}\geqslant0$，$h(1)=\min\{f(1), g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是 $h(x)$的零点；若 $a<-\dfrac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\dfrac{5}{4}<0$，$h(1)=\min\{f(1), g(1)\}=f(1)<0$，故 $x=1$ 不是 $h(x)$的零点.

当 $x\in(0, 1)$时，$g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$在$(0, 1)$的零点个数.

（ⅰ）若 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在$(0, 1)$无零点，故 $f(x)$在$(0, 1)$单调，而 $f(0)=\dfrac{1}{4}$，$f(1)=a+\dfrac{5}{4}$，所以当 $a\leqslant-3$ 时，$f(x)$在$(0, 1)$有一个零点；当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$在$(0, 1)$无零点.

（ⅱ）若$-3<a<0$，则 $f(x)$在$\left(0, \sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$单调递减，在$\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}, 1\right)$单调递增，故当 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)=\dfrac{2a}{3}\sqrt{-\dfrac{a}{3}}+\dfrac{1}{4}$

①若 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)>0$，即$-\dfrac{3}{4}<a<0$，$f(x)$在$(0, 1)$无零点；

②若 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\dfrac{3}{4}$，则 $f(x)$在$(0, 1)$有唯一零点；

③ 若 $f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)<0$，即$-3<a<-\dfrac{3}{4}$，由于 $f(0)=\dfrac{1}{4}$，$f(1)=a+\dfrac{5}{4}$，所

以当$-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$时，$f(x)$在$(0,1)$有两个零点；当$-3<a\leqslant-\frac{5}{4}$时，$f(x)$在$(0,1)$有一个零点.

综上，当$a>-\frac{3}{4}$或$a<-\frac{5}{4}$时，$h(x)$有一个零点；当$a=-\frac{3}{4}$或$a=-\frac{5}{4}$时，$h(x)$有两个零点；当$-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$时，$h(x)$有三个零点.

例 3.（四川） 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a, & x<0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，其中$a$是实数. 设$A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2, f(x_2))$为函数图象上的两点，且$x_1<x_2$.

（Ⅰ）指出函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若函数$f(x)$的图象在点A，B处的切线互相垂直，且$x_2<0$，求x_2-x_1的最小值；

（Ⅲ）若函数$f(x)$的图象在点A，B处的切线重合，求a的取值范围.

试题分析

第一问是明显的. 第二问即$f'(x_1)f'(x_2)=-1$. 注意，当$x<0$时，对函数$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+2$. 第三问可由函数的图象，容易判断$x_1<0<x_2$. 故两切线斜率的表达式是不一样的. 且其结果必然是$a\in(x,+\infty)$之形式.

试题详解

（Ⅰ）函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$，单调递增区间为$[-1,0)$，$(0,+\infty)$.

（Ⅱ）由导数的几何意义可知，点A处的切线斜率为$f'(x_1)$，点B处的切线斜率为$f'(x_2)$，故当点A处的切线与点B处的切线垂直时，有$f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

当$x<0$时，对函数$f(x)$求导，得$f'(x)=2x+2$.

因为$x_1<x_2<0$，所以$(2x_1+2)(2x_2+2)=-1$，

所以$2x_1+2<0$，$2x_2+2>0$.

因此$x_2-x_1=\frac{1}{2}[-(2x_1+2)+(2x_2+2)]\geqslant\sqrt{-(2x_1+2)(2x_2+2)}=1$.

当且仅当$-(2x_1+2)=2x_2+2=1$即$x_1=-\frac{3}{2}$且$x_2=-\frac{1}{2}$时等号成立.

所以函数$f(x)$的图象在点A，B处的切线互相垂直时，x_2-x_1的最小值为1.

（Ⅲ）当$x_1<x_2<0$或$x_2>x_1>0$时，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故$x_1<0<x_2$.

当$x_1>0$时，函数$f(x)$的图象在点$(x_1, f(x_1))$处的切线方程为

$y-(x_1^2+2x_1+a)=(2x_1+2)(x-x_1)$，即$y=(2x_1+2)x-x_1^2+a$.

当 $x_2>0$ 时，函数 $f(x)$的图象在点$(x_2,\ f(x_2))$处的切线方程为

$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{1}{x_2}\cdot x+\ln x_2-1$.

两切线重合的充要条件是$\begin{cases}\frac{1}{x_2}=2x_1+2 & ① \\ \ln x_2-1=-x_1^2+a & ②\end{cases}$

由①及 $x_1<0<x_2$ 知，$-1<x<0$.

由①②得，$a=x_1^2+\ln\frac{1}{2x_1+2}-1=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1$.

设 $h(x_1)=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1(-1<x_1<0)$，

则 $h'(x_1)=2x_1-\frac{1}{x_1+1}<0$.

所以 $h(x_1)(-1<x_1<0)$是减函数.

则 $h(x_1)>h(0)=-\ln2-1$，

所以 $a>-\ln2-1$.

又当 $x_1\in(-1,\ 0)$且趋近于-1时，$h(x_1)$无限增大，所以 a 的取值范围是$(-\ln2-1,\ +\infty)$.

故当函数 $f(x)$ 的图象在点 A，B 处的切线重合时，a 的取值范围是$(-\ln2-1,\ +\infty)$.

例 4.（天津） 已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in\mathbf{R}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$的单调性；

（Ⅱ）设曲线 $yf(x)$与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=a$（a 为实数）有两个正实根 x_1，x_2，求证：$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.

试题分析

本题考查导数的运算、导数的几何意义、利用导数研究函数的性质及证明不等式. 因为有参数 a，需分类讨论. 其实，第一问对于正整数 n，就需考虑其奇偶性. 第二问作差考查. 在证(Ⅲ)不等式时，可能会用到放缩，应注意放缩要适度，以出现要证的形式.

试题详解

（Ⅰ）由 $f(x)=nx-x^n$，可得 $f'(x)=n-nx^{n-1}=n(1-x^{n-1})$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2$.

下面分两种情况讨论：

(1)当 n 为奇数时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

所以，$f(x)$在$(-\infty, -1)$，$(1, +\infty)$上单调递减，在$(-1, 1)$内单调递增.

(2)当 n 为偶数时，

当 $f'(x)>0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)$单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$单调递减.

所以，$f(x)$在$(-\infty, -1)$上单调递增，$f(x)$在$(1, +\infty)$上单调递减.

(Ⅱ)证明：设点 P 的坐标为$(x_0, 0)$，则 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$，$f'(x_0)=n-n^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$. 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

由于 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在 $(0, +\infty)$上单调递减，故 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$上单调递减. 又因为 $F'(x_0)=0$，所以当 $x\in(0, x_0)$时，$F'(x_0)>0$，当 $x\in(x_0, +\infty)$时，$F'(x_0)<0$，所以 $F(x)$在$(0, x_0)$内单调递增，在$(x_0, +\infty)$内单调递减. 所以对任意的正实数 x 都有 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即对任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$.

(Ⅲ)证明：不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由(Ⅱ)知 $g(x)=(n-n^2)(x-x_0)$. 设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=\frac{a}{n-n^2}+x_0$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递减，又由(Ⅱ)知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$，可得 $x_2\leqslant x_2'$.

类似的，设曲线 $y=f(x)$在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=nx$. 当 $x\in(0, +\infty)$，$f(x)-h(x)=-x^n<0$，即 $\forall x\in(0, +\infty)$，$f(x)<h(x)$.

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x'_1. 因为 $h(x)=nx$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调递增，可得 $x_1'=\frac{a}{n}$. 因为 $h(x)=nx$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)<h(x_1)$，因此 $x_1'<x_1$.

由此可得 $x_2-x_1<x_2'-x_1'=\frac{a}{1-n}+x_0$.

因为 $n\geqslant 2$，所以 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}\geqslant 1+C_{n-1}^1=1+n-1=n$，故 $2\geqslant\frac{1}{n^{n-1}}=x_0$.

所以，$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.