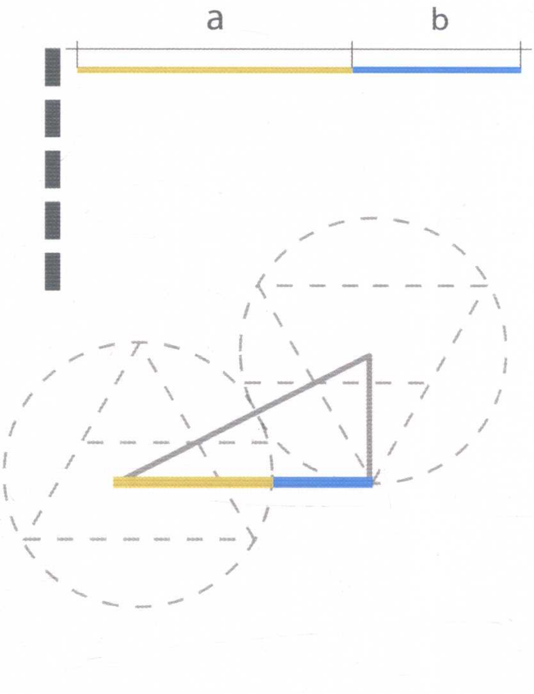
普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数与解析几何

李晓艳　魏晓娜　李永军　主编



上海财经大学出版社
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

普通高等教育"十三五"规划教材

线性代数与解析几何

主编　李晓艳　魏晓娜　李永军

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/李晓艳，魏晓娜，李永军主编．—上海：上海财经大学出版社，2017.3
(普通高等教育“十三五”规划教材)
ISBN 978-7-5642-2673-2/F·2673

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②魏… ③李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 035958 号

□ 责任编辑 石兴凤
□ 封面设计 杨雪婷

XIANXING DAISHU YU JIEXI JIHE
线性代数与解析几何
主编 李晓艳 魏晓娜 李永军

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)
网 址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海译文印刷厂印刷
上海淞杨印刷厂装订
2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 17.5 印张 425 千字
印数：0 001－2 000 定价：48.00 元

内容提要

本书内容包括行列式、矩阵与线性方程组、几何向量与坐标、轨迹与方程、平面与直线、线性空间、特征值与特征向量、二次型与常见的二次曲面，同时附有多个应用教学案例，本书的特点是强调几何与代数的融合，强调从具体到抽象的思维方式，以及从问题出发引入概念与内容的教学模式。

本书可作为理工科和其他非数学类专业高等院校的教学用书，也可作为各大专院校或成人教育学院的学生教材，还可作为考研生、自学者和广大科技工作者的参考资料。

前 言

“线性代数与解析几何”是大学数学中最基本、最重要的课程之一，主要讲授矩阵运算的原理、线性空间与线性变换的理论以及空间解析几何的基本知识。该课程是将线性代数与解析几何的内容有机地整合，而不是简单地拼凑。在讲授线性代数内容的同时，要以解析几何为背景及应用的对象；而在讲授解析几何时，则要以线性代数为工具，两者是相辅相成的。它的思想方法与几何直观性可为许多抽象的、高维的数学问题提供形象的几何模型与背景。

长期以来，在我国理工科类大学数学教学中，线性代数都是作为一门独立的课程开设，而解析几何则作为高等数学的一部分被置于微积分课程体系中。然而，线性代数是讨论有限维空间的理论课程，相关理论较为抽象，没有背景材料与实际应用的支持，会使学生对其概念及基本思想的理解造成一定的困难。如“矩阵的秩”和“向量组的秩”等概念是学生感到最抽象、最难理解同时又感到最没用的知识，而它们在解析几何中却有着广泛的应用，使得对几何问题的讨论变得简洁明了。因此，如何让学生通过这一难关，顺利地从“具体的数学”过渡到“抽象的数学”，也是这一课程努力的目标。本书三位编者都有着线性代数与解析几何方面多年的教学经历，一方面在多年的教学实践中我们阅读过许多有特色的教材，另一方面是为了适应高校非数学类专业数学课程教学改革，这使我们有了编写一本更加切合实际的教学用书的想法。

本书在写作上具有以下特点：第一，在教材内容的安排和文字的表述上，遵循由浅入深、由易到难、由具体到抽象的过渡原则，力求通俗易懂，用较少的知识引入较多的概念和解决较多的问题。比如，通过初等变换化简矩阵所得非零行数引入矩阵的秩的概念，通过数组空间引入一般线性空间的概念和内容等。第二，从问题出发，引入要研究的内容。例如，从解线性方程组出发，为解决解的存在性及唯一性、公式解、解的几何结构等问题，引入行列式、矩阵运算、线性空间等概念和内容。第三，本书每章都给出了经典例题的解法与技巧，这些例题或为阐释基本概念或为说明基本方法，都具有较典型的代表性，读者应予以足够的重视。第四，本书每章都安排了实际应用问题的数学案例，一部分还编排了数学软件求解，让读者了解线性代数与解析几何在解决实际问题中的独特作用，特别是代数与几何相结合的一些经典实例，有利于学生充分认识数学模型中代数与几何问题的相互依托作用。整合线性代数与空间解析几何，不仅可以借助几何直观地使一些抽象的代数概念和理论变得比较

容易接受，而且也可以借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问题，例如，直线问题、直线与平面间的位置关系、二次曲面或平面二次曲线的化简等。再者，整合后的课程在大学一年级开设，为后续课程的学习奠定了坚实的基础。

另外，在配置习题时，我们尽可能选入传统的、有代表性的题目，同时为理解基本概念、掌握基本方法而选编了一些基本题目，并且每一节的题目安排由易到难，力求做到所附习题能反映各章节的基本要求并让学生通过练习能有所提高，以最大限度地发挥习题的作用。

本书由兰州城市学院教师李晓艳、魏晓娜、李永军编写。李晓艳编写第 1 章、第 2 章、第 3 章；魏晓娜编写第 4 章、第 5 章、第 6 章；李永军编写第 7 章并负责全书文字、符号的规范化和统筹处理。本书在编写和出版过程中得到了相关领导、同事的支持与帮助，也得到了国家自然科学基金(11261027)和 2014 陇原青年创新人才扶持计划项目资金的支持，在此一并表示衷心的感谢！

本书在编写过程中参考了许多文献资料，列举在后，在此对有关的作者表示诚挚的谢意。限于编者水平，书中定有许多不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2016 年 12 月于兰州城市学院

目　录

第 1 章　行列式

在空间解析几何的讨论中常常会用到线性代数中的矩阵与行列式. 这两部分知识在数学及其他学科领域有着广泛的应用. 行列式(determinant)的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的. 作为基本的数学工具之一,行列式在线性代数、多项式理论及解析几何等领域中都有着极其广泛的应用. 行列式的提出可以追溯到 17 世纪,其雏形由日本数学家关孝和(Seki Takakazu)与德国数学家莱布尼兹(Leibniz)各自独立得出. 最终,法国数学家柯西(Cauchy)于 1841 年创立了现代的行列式概念和符号.

§ 1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶与三阶行列式

先来看中国古代的一个鸡兔同笼问题. 大约在 1500 年前,《孙子算经》中记载了这样一个有趣的问题:"今有雉兔同笼,上有三十五头,下有九十四足,问:雉兔各几何?"这四句话的意思是:有若干只鸡和兔同在一个笼子里,从上面数,有 35 个头;从下面数,有 94 只脚. 问:笼中各有几只鸡和兔? 用二元一次方程很容易求解:可设鸡有 x_1 只,兔有 x_2 只,则

$$\begin{cases} x_1+x_2=35, \\ 2x_1+4x_2=94, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法易得:$x_1=23$,$x_2=12$,即鸡有 23 只,兔子有 12 只.

我们将二元一次方程组一般化,来观察解的特点. 考虑二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,由消元法可得方程组的解:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

这就是二元一次线性方程组(1.1.2)的公式解. 据此,我们引进二阶行列式的概念.

定义 1.1.1　令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,其中,$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做一个二阶行列式,显然,其值由主、副对角线元素的积作差得来.

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,借助于二阶行列式这个新概念,方程组(1.1.2)的公式解可简

记为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

我们回顾那道鸡兔同笼的题目，在方程组(1.1.1)中，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0, D_1=\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix}=46, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix}=24,$$

于是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=23$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=12$，即鸡有 23 只，兔子有 12 只.

类似可以给出下面的定义：

定义 1.1.2 令

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

我们称之为三阶行列式.

三阶行列式定义没有二阶行列式那么容易记忆，需要注意展开式的六项中哪些项带有正号，哪些项带有负号.

类似地，若三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则用消元法同样可求其解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}, \end{cases}$$

其中，D_1、D_2、D_3 是将 D 的第一列、第二列、第三列分别换成常数项所得到的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.1 解方程组$\begin{cases}3x-2y+z=15,\\5y-2z=9,\\2x+y-z=1.\end{cases}$

解 因为系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\0 & 5 & -2\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-11\neq0$,所以方程组有解. 再由

$$D_1=\begin{vmatrix}15 & -2 & 1\\9 & 5 & -2\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-55, D_2=\begin{vmatrix}3 & 15 & 1\\0 & 9 & -2\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-99, D_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 15\\0 & 5 & 9\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-198,$$

可得 $x=\dfrac{-55}{-11}=5, y=\dfrac{-99}{-11}=9, z=\dfrac{-198}{-11}=18$.

1.1.2 n 阶排列及其逆序数、对换

我们已经知道二、三阶行列式展开式中有的项取正号,有的项取负号,如果将行列式定义扩展到 $n(n\geqslant4)$ 阶,必然也会出现这样的现象,那么每一项及其符号是基于什么规律而确定下来的呢? 展开式的项数又是多少呢? 这就要用到我们这一部分将要阐述的 n 阶排列的概念.

定义 1.1.3 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的任意一个 n 元有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 阶排列. 其中,$12\cdots n$ 称为自然排列.

比如 2413 是 4 阶排列,253164 是 6 阶排列. 需要注意的是,1123 及 13567 都不是排列. 易知,n 阶排列一共有 $n!$ 个.

定义 1.1.4 在一个排列中,如果一个较大的数字排在一个较小的数字之前,则称这两个数字构成一个逆序. 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

比如,8 阶排列 57864312,为方便起见,将数 i 与排在其前面的数构成的逆序数记为 τ_i,则 $\tau_1=6,\tau_2=6,\tau_3=5,\tau_4=4,\tau_5=0,\tau_6=2,\tau_7=0,\tau_8=0$,于是

$$\tau(57864312)=6+6+5+4+0+2+0+0=23,$$

故 8 阶排列 57864312 为一个奇排列.

思考:还有别的计算逆序数的方法吗?

定义 1.1.5 把一个排列中两个数字 i,j 的位置互换而保持其余数字的位置不动,则称对这个排列施行了一个对换,记作 (i,j). 相邻位置两个数字的对换称为相邻对换,否则称为一般对换.

对换具有可逆性,即若连续实施两次同一个对换,则将排列还原. 对换有下述重要性质:

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明 当 (i,j) 为相邻对换时,对换前后,i,j 之外数字的位置都没有改变,因此这些数字所构成的逆序数不变,i,j 和其余数字所构成的逆序数也不变,故只需考虑 i,j 两者之间的逆序. 如果 i 和 j 原来并没有逆序(即 $i<j$),那么在对换后的新排列中会得到一个新的逆序,即增加了一个逆序数;如果原来两者就是逆序(即 $i>j$),那么现在就会变成顺序,即减少了一个逆序数. 在这两种情形中排列前后奇偶性都发生了变动.

当 (i,j) 为一般对换时，设 i,j 之间有 s 个数字 $k_1,k_2,\cdots,k_s$. 不失一般性，设原排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots, \tag{1.1.5}$$

经对换 (i,j)，得到

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots. \tag{1.1.6}$$

用下面的方法可以将(1.1.6)看作由(1.1.5)经过一系列的相邻对换而得到：先将(1.1.5)的 i 向右依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 作 s 次相邻对换得 $\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots$，再将 j 向左依次与 $i,k_s,k_{s-1},\cdots,k_1$ 作 $s+1$ 次相邻对换而得(1.1.6)，即(1.1.6)可由(1.1.5)经 $2s+1$ 次相邻对换而得. 由第一段论述知，每一个相邻对换都要改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 是一个奇数，所以(1.1.5)和(1.1.6)的奇偶性相反.

推论 1.1.1 排列经过奇数次对换，其奇偶性发生改变；经过偶数次对换，其奇偶性不变.

证明 由上面的定理知此结论显然成立.

推论 1.1.2 当 $n\geqslant 2$ 时，在 n 阶排列中，奇偶排列数目相等，即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 任取对换 (i,j)，对所有的奇排列作 (i,j) 对换，由推论 1.1.1 知上述排列将全部变为偶排列，故奇排列个数不大于偶排列个数. 同理，对所有的偶排列作 (i,j) 对换，可知上述排列将全部变为奇排列，故偶排列个数不大于奇排列个数. 于是，在 n 阶排列中，奇偶排列数目相等，即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

定理 1.1.2 自然排列 $12\cdots n$ 可以与任意 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过一系列对换相互转换，且所作对换次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

证明 先来看由自然排列到任意同阶排列的转换. 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，一阶排列只有自然排列，命题成立. 当 $n=2$ 时，二阶排列有两个，即自然排列 12 和一般排列 21，命题显然成立.

假设对 $n-1$ 的情形命题成立，即 $n-1$ 阶自然排列可经一系列对换变为任意的同阶排列. 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是任一 n 阶排列，若 $i_n=n$，则 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列，结论由归纳法得到；若 $i_n=j\neq n$，作对换 (j,n)，归结到 $i_n=n$ 的情形，结论成立.

由于对换可逆，任意 n 阶排列可经(同样的)一系列对换变为同阶自然排列. 由推论1.1.1知，两者相互转换所作的对换次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

1.1.3 n 阶行列式的定义

我们用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个 n 阶行列式，其中，元素 $a_{ij}\in C(i,j=1,2,\cdots,n)$，这里 C 为复数集. 为了描述行列式中某个位置的元素，我们将行列式的横排称为行(row)，竖排称为列(column)，这也是用行列式来命名上面式子的原因所在. a_{ij} 表示此 n 阶行列式的第 i 行第 j 列的元素，i 称为行指

标，j 称为列指标.

我们首先分析二阶和三阶行列式的定义.

对于二阶或三阶行列式，它的值都是元素之“积”的“和”. 对于二阶行列式，积是取自不同行不同列的两个元素的积，这样的积共有 $2!=2$ 个，$a_{11}a_{22}$ 取正号，$a_{12}a_{21}$ 取负号. 对于三阶行列式，积都是取自不同行不同列的三个元素的乘积，共有 $3!=6$ 个. 其中三项，即 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 带正号，另外三项 $a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$ 和 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 带负号.

进一步可以观察到，若我们首先将上述取自不同行不同列的元素的积项的行指标按照自然顺序排起来，再考察列指标，则对于二阶行列式，两项的列指标为 12，21，而 12 是偶排列，此项前面带有正号，21 是奇排列，对应的项前面带有负号. 对于三阶行列式，行指标按照自然顺序排列后，带正号的项的列指标为 123，231，312，它们是关于 1，2，3 的偶排列；带负号的项的列指标为 132，213，321，它们为奇排列.

从二阶和三阶行列式的展开式中得到启发，下面借助于 n 阶排列的知识来定义 n 阶行列式的值.

定义 1.1.6 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有来自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 由于代数和的项数为 $n!$ 个，为了表达方便，我们可以将每项中的 n 个元素按行指标由小及大的顺序排列，即写作 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的形式，并规定当列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，此项前面带正号；当列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，此项前面带负号. 这样，n 阶行列式可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.1.7}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有可能的 n 阶排列求和.（1.1.7）称为行列式的展开式.

上述 n 阶行列式通常记为 $D=\det(a_{ij})$ 或者 $|a_{ij}|$.

可以验证当 $n=2,3$ 时，我们定义的二、三阶行列式与前面定义的二、三阶行列式是一致的，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

当 $n=1$ 时，规定 $|a_{11}|=a_{11}$.

上面定义行列式展开式中的项是按行指标的自然顺序排列的. 一个自然的问题是，每一项能否按列指标的自然顺序排列呢？答案是肯定的. 由于数的乘法满足可交换性，不妨设某