概率与統計

射击公算教研室

姚平中 韩之俊 编

潘承泮 李咏姬 审校

华东工程学院

一九八三年六月

内 容 简 介

本书主要介绍概率论及数理统计的基本理论。前四章介绍随机事件及概率，随机变量及分布，正态分布及应用，随机变量函数的分布等内容。后三章介绍参数估计，假设检验，回归分析与方差分析等内容。为了便于读者更好地消化正文内容，各章节附有适量习题，供学习提高之用。

本书作为我院有关各专业概率与统计课程的基本教材，使用时内容可根据不同需要，适量增减。亦可作为兵器工业部门需要概率与统计基本知识的工程技术人员及管理人员自学或参考用书。

前 言

本书是为炮、弹、药、引信等专业学生编写的概率统计教材，对于从事军工产品试验或检验的技术工作者亦可以此书作为参考书，从中获得必要的概率统计知识。

概率与统计发展到现在，内容是很丰富的，要想在一本书中包含它们的各个方面十分困难。因此，本书在编写时主要选择与军工产品试验或检验有关内容，并考虑到概率与统计本身理论的系统性与严密性。全书共分七章：前四章是概率基本理论，主要介绍有关概率的基本概念及运算，随机变量的分布及统计特性等基本理论；后三章是数理统计的原理和方法，主要介绍参数估计，假设检验以及回归分析与方差分析等。

本书概率论部份由姚平中同志编写，数理统计部份由韩之俊同志编写。写后由潘承泮与李詠姬等同志审阅，提出了许多宝贵意见。最后，由韩之俊同志执笔，统一修改，并由潘承泮同志再次审阅。

华东工程学院绘图室帮助绘制了本书的插图，谨此一并致谢。

由于我们水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

概述

概率论与数理统计是数学学科的分支，它们是由社会生产实践的需要发展起来的。正如革命导师恩格斯所说：“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的”。㊀

毛主席教导我们：“科学研究的区分，就是科学对象所具有的特殊矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”㊁概率论与数理统计与其它自然科学的区别，在于它们研究的对象具有自身的特殊矛盾性。

概率论与数理统计是从数量方面研究大量随机现象的统计规律。其中概率论主要研究这些统计规律的一般理论，而数理统计则是通过试验数据，对统计规律进行分析、估计和推断。

什么是随机现象？什么是随机现象的统计规律呢？现以一些实例来说明。

例如纯水在标准大气压下，加热到100℃时，它开始沸腾。这种现象是“必然现象”。就是说，在一定条件下（纯水在标准大气压下，加热到100℃），必然产生某种确定的结果。但在客观世界中，许多现象并不是这样简单。也即在一定条件下，试验结果的出现是不确定的，而是随机的。这种具有不确定性的现象称为“随机现象”。譬如弹药是同一批生产的，大气条件也比较稳定，但在多次射击时，各发弹着点在立靶上的位置是不同的。也即每次射击，我们无法事先确定该发弹着点在靶面上的位置，弹着点的坐标是随机的。经过多次射击，在靶板上可以得出“弹着点散布”。这便是一种大量随机现象。再譬如某种穿甲弹对一定规格的钢板进行穿甲试验，在规定的命中角和选定的速度下㊂，进行多次射击，结果有些穿甲弹穿透了钢板，有些则不能穿透钢板。因此，对某次发射来说，射击结果具有随机性，即事先不能确定这发穿甲弹能否穿透钢板。总之，随机现象的例子是不胜枚举的。概括起来，就是在一定的条件下，不能预先确定其结果的现象，统称为“随机现象”。

随机现象被唯心论和形而上学看成不可捉摸的东西，这种观点是完全错误的。实际上，随机现象不是不可捉摸的，而是在大量的随机现象中有确定的统计规律性。概率论与数理统计的基本任务，就是研究大量随机现象的统计规律性。

下面，我们就“弹着散布”这种随机现象为例，来说明大量随机现象的统计规律。

㊀ 恩格斯《自然辩证法》，人民出版社，第162页。

㊁ 《矛盾论》，毛泽东选集，合订本，第284页。

㊂ 指弹丸碰击钢板瞬间的速度。

火炮在相同条件下对立靶进行多次射击，从理论上说，每次射击的射角、初速、弹道系数这三个因素都不会改变，因之存在一条理想弹道（就是外弹道学研究的弹道），此弹道在靶面上所得的弹着点称为**散布中心**。但在实际射击时，由于各种随机因素的影响，各次射击的弹道与理想弹道是不一致的，它们有的高、有的低、有的左、有的右，或是相互交错，形成一束，称为“**弹道散布**”，反映在靶面上的叫做“弹着散布”（图0.1）

在弹着散布中，对某一次射击，我们不能预先确定此发弹着的具体位置，但在大量重复射击下，弹着散布呈现以下规律性：

1. 大多数弹着点密集于散布中心C附近，远离散布中心的弹着点稀少——这表现为集中性；

2. 弹着散布对于散布中心概略呈现对称——这表现为**对称性**；

3. 弹着散布都局限于一个有限的范围内——这表现为**有限性**。

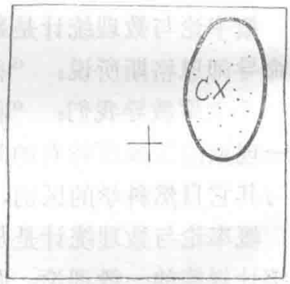

图0.1 弹着散布

C—散布中心

弹着散布所呈现的统计规律性可用数学模型表示，称为“正态分布”（这些以后详细介绍）。

不同的火炮（例如用57毫米高射炮和37毫米高射炮）在相同距离上对立靶射击，所得弹着散布的统计规律性是不一样的，这主要反映在集中性上。57毫米高射炮弹着散布的集中性优于37毫米高射炮。弹着散布集中性的优劣，反映了火力系统质量的好坏，同时也表明了研究随机现象的重要意义。

概率论与数理统计应用的范围是很广泛的，特别在国防科学技术领域中，概率论与数理统计有着重要的应用。例如武器弹药的试验中，试验结果经常表现为随机现象。因之，试验方案的设计，试验结果的处理，以及分析与评定武器系统的效能等等，都要使用概率与统计的原理和方法。随着近代科学技术的发展，概率论与数理统计也日益发展，并且出现了许多分支的学科（如过程论、信息论、试验设计、多元分析等），其应用范围也愈来愈广泛。例如在控制论、最优化理论、军事技术运筹学、系统工程、产品质量控制、天气预报等方面，都有着重要的应用。

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件与样本空间

一、随机试验与事件

我们研究某种随机现象，是在某些条件下进行的。例如，弹着散布是在一定的射击条件下（即一定的瞄准诸元，同一批弹药，在比较稳定的大气条件下）进行多次射击所得到的随机现象。与随机现象联系在一起的是某种条件下的试验，这种试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验结果事前不可预言，我们称此种试验为随机试验，或简称为试验，并用“试验T”表示。随机试验的每一个可能结果称为随机事件，或简称为事件，并用字母A，B，C……表示。

下面举几个随机试验与事件的例子。

例1.1　试验T——反坦克导弹对坦克射击一次，

这一试验有两个可能结果，一个是命中坦克，用事件A表示；另一个是不命中坦克，用事件B表示。

例1.2　试验T——在1，2，…，9九个数字中任取一个。

下述事件均是试验T的可能结果：

事件A_i——取得一个大小为i的数（i＝1，…，9）；

事件B　——取得一个偶数；

事件C　——取得一个奇数；

等等。

我们把最简单的事件称为基本事件。例如，在例1.1中，事件A、B均为基本事件。在例1.2中，事件A_i（＝1，…，9）这九个事件亦均为基本事件。由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件。例如，在1.2中，事件B为一复合事件，它是由A_2，A_4，…，A_8组合而成的。事件C亦为复合事件，它是由A_1，A_3，…，A_9组合而成的。

一个事件是否称为基本事件是相对于研究的目的来说的。例如，火炮射程试验，其研究目的是为了测量射程，一般说区间（0，∞）中的任一实数都可以是一个基本事件。倘若，火炮对一固定目标射击，其研究目的是为了了解是否命中目标，则只有两个基本事件即：命中目标与不命中目标。

在一定条件组下必然发生的事件称为必然事件，用符号Ω表示。在一定条件组下必然不

发生的事件称为不可能事件，用符号φ表示，把必然事件和不可能事件也算作随机事件，这对我们讨论问题是方便的。

例如，就目前世界上人的身高来说，“身高小于4米”是必然事件，而“身高大于4米”则是不可能事件。

二、事件的简单特性

在某试验T中，往往有很多可能结果，也即有很多事件，他们之间往往具有某些特性。下面先介绍一些事件的简单特性。

1. 相斥性与相容性

在试验T中有两个事件A与B，若其中一个事件的出现使另一个事件不能出现，此两事件A与B，称为是相斥的；反之，称为是相容的。

例如，在例1.1中，事件A与B是相斥的。在例1.2中，事件B与C是相斥的，事件A_2与B是相容的。

在试验T中有n个事件A_1，A_2，…，A_n，若其中任意两个具有相斥性（两两相斥），则称此n个事件是相斥的，反之是相容的。例如，在例1.2中，九个事件A_1，A_2，…，A_9是相斥的。

2. 等可能性

在试验T中有事件A_1，A_2，…，A_n，当其中各个事件出现的可能性一样时，我们称这n个事件为等可能事件。

例1.3 试验T——任意抛掷一枚硬币。

事件A——国徽面朝上；

事件B——币值面朝上。

事件A与B是等可能的。

事件的等可能性，反映事物此时具有均匀性与对称性的结果。在例1.3中抛掷的硬币，其结构是对称和均匀的，任意抛掷时哪一面朝上是等可能的。同理，在例1.2中事件，A_1，A_2，…，A_9也是等可能的。

3. 完备性

在试验中有n个事件A_1，A_2，…A_n，若试验结果至少必为其中的一个，则称此n个事件对试验T是完备的。

例如，在例1.2中，事件A_1，A_2，…，A_9对试验T是完备的；事件B，C对试验T也是完备的。

例1.4 验验T——火炮对一个点目标射击一次。

事件A_1——命中目标；

事件A_2——获得远弹；

事件A_3——获得近弹。

事件A_1，A_2，A_3是相斥、完备的，但不是等可能的。

以后，对于任一随机试验的所有基本事件都规定为相斥、完备的，但不必是等可能的。

三、样本空间

为了便于研究随机试验T，我们将试验T的所有基本事件所组成的集合叫做**样本空间**，记为Ω。Ω中的元素用ω表示，称为**样本点**。只包含一个样本点的单点集{ω}也即试验T的基本事件，有时也直接写为基本事件ω。

由于随机事件或是基本事件，或是由基本事件组合而成。引入了样本空间Ω以后，试验T的事件便是样本空间Ω中的子集，而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。又由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间Ω作为一个事件是必然事件。而不可能事件就是空集φ，由此两者使用相同的符号来表示。

下面举几个样本空间的例子。

例1.5 箱中有5件产品，其中有3件正品，2件次品。试验T——从中任取两件。将产品编号为1，2，3，4，5，其中4，5号为次品。倘若不考虑取出的先后顺序，则基本事件为

（1，2），（1，3），（1，4），（1，5），（2，3），（2，4），（2，5），（3，4），（3，5），（4，5）共有10个基本事件。

试验T的样本空间为

$$\{(1,2),(1,3),\cdots\cdots,(4,5)\}$$

共有10个样本点。

倘若，令

事件A——取得两件正品，则

$$A=\{(1,2),(1,3),(2,3)\};$$

事件B——取得两件废品，则

$$B=(4,5)。$$

例1.6 试验T——一枚钱币连续抛掷两次，基本事件是

ω_1=（正面，正面），　ω_2=（正面，背面），

ω_3=（背面，正面），　ω_4=（背面，背面）。

样本空间为：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$$

例1.7 试验T——计算某电话站总机在$[0,t]$内的呼叫次数。基本事件是

ω_i=“i次呼叫”，　$i=0,1,2,\cdots$。

样本空间为：

$$\Omega = \{\omega_i: i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

此时样本点有可列无穷多个。

例1.8 设测量某一零件时，考虑其测量结果与真正长度的误差。一般说，它可用一实数x表示，基本事件为$x(-\infty < x < \infty)$，实数轴上每一点都是其样本点，整个数轴为其样本空间，即$\Omega = \{x: -\infty < x < \infty\}$。此时样本点有不可列无穷多个。

§1.2 概率的直观定义

上节介绍了事件的概念。事件在试验中可能出现，也可能不出现。为了度量某个事件A出现的可能性大小，就需引入概率的概念，最初人们用古典概型定义事件的概率。

一、概率的古典定义

在试验T中，若样本空间Ω中的基本事件总数n为有限数，并且所有基本事件是等可能的，则称此模型为古典概型。对任意事件A，若A包含的基本事件数为m，则比值$\frac{m}{n}$称为A出现的概率，记为P(A)，即

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

此概率亦称为古典概率。

例1.9 在九张记有号码1，2，…，9的卡片中任抽一张，求得到奇数号码的概率。

解 试验T ——任抽一张卡片。

基本事件ω_i——抽得号码为i的卡片，i＝1，2…，9。则试验T的样本空间的基本事件总数n＝9。

事件A ——抽得奇数号卡片。

在九个基本事件中，有ω_1，ω_3，ω_5，ω_7，ω_9这五个基本事件可以导致事件A出现，即m＝5。

由此所求的概率

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

例1.10 条件同例1.5，求获得一件正品，一件次品的概率。

解 设事件A ——获得一件正品，一件次品。

在例1.5的所有基本事件中，只有下列基本事件可导致事件A的出现：

(1，4)，(1，5)，(2，4)，(2，5)，(3，4)，(3，5)

故 n＝10，m＝6，所求概率为

$$P(A)=\frac{6}{10}$$

此例由于产品数不大，故基本事件可以一一列出。若产品数较大，次品数也不少，抽取的件数又多，则用直观方法一个个排就不行了，需要运用组合数来计算。此时，基本事件数$n=C_5^2=10$，可以导致事件A出现的基本事件数m为

$$m=C_3^1\cdot C_2^1=6$$

于是所求概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$$

例1.11 一批产品共有N件，其中有M件次品，其余均为正品。今任意取出n件检验，($n\leqslant N$)，问其中恰有m件次品（$m\leqslant \min\{M, n\}$）的概率是多少？

解 设事件A——取出的n件产品中恰有m件次品。

此时，基本事件总数为C_N^n。而导致事件A出现的基本事件数为

$$C_{N-M}^{n-m}\cdot C_M^m$$

于是，所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_{N-M}^{n-m}\cdot C_M^m}{C_N^n} \tag{1.2}$$

公式（1.2）在抽样检验中有着重要应用，通常称之为抽样检验公式。

根据概率的古典定义，可以知道它有三个属性：

1．任何事件A的概率P(A)，必是〔0，1〕中的一个数值。即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

这个性质是明显的，因为导致事件A的基本事件个数m，总是

$$0\leqslant m\leqslant n$$

故有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

2．必然事件Ω的概率等于1，即

$$P(\Omega)=1 \tag{1.3}$$

3．不可能事件φ的概率等于0，即

$$P(\phi)=0 \tag{1.4}$$

性质2，3是显然的。

在古典概型中，“基本事件总数是有限的，所有基本事件是等可能的”是基本假定。在实际问题中，往往不满足这个基本假定，或者无法验证是否满足这个基本假定。因此人们又提出用重复试验的方法确定事件的概率，于是产生了概率的统计定义。

二、概率的统计定义

首先引出频率的概念。

频率　在n次独立重复试验中，某事件A出现了μ次，比值$\frac{\mu}{n}$称为事件A出现的**频率**，记为R(A)，即

$$R(A)=\frac{\mu}{n} \tag{1.5}$$

易见，事件A的频率R(A)仍有三个特性：

1. $0\leqslant R(A)\leqslant 1$； (1.6)
2. 对于必然事件Ω，$R(\Omega)=1$； (1.7)
3. 对于不可能事件φ，$R(\phi)=0$。 (1.8)

此外，频率有一个显著的特点：对于不同的试验次数，事件A的频率可能有不同的数值，或是尽管保持试验次数相同，重新进行这样的试验时，频率也会取不同的数值。这个特点表明：频率的值具有**波动性**。但是，频率还有另一个特点，就是随着试验次数的增大具有**稳定性**。也即，随着试验次数的增大，频率的值波动性愈来愈小，逐渐稳定于某个数值附近。例如掷硬币试验，统计出币值面朝上的频率R，当试验次数愈来愈大时，它就逐渐稳定于$\frac{1}{2}$、数值$\frac{1}{2}$就是“币值面朝上”这个事件的概率。有人作过试验获得下列结果：

试验者	抛掷次数n	币值面朝上次数μ	频率 $R=\frac{\mu}{n}$
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

我们再分析一个火炮射击的例子。

火炮对 1000 米处的立靶射击，靶面上画有一个区域表示目标（图1.1），射击时命中目标记为事件A。事件A出现的可能性可以用命中率（事件A的频率）来度量。在相同瞄准条件下进行重复射击，设射击了n发，命中目标的弹数为μ发，于是命中率R 为

$$R=\frac{\mu}{n}$$

当射击次数n愈大，命中率逐渐稳定于某个数值p。这个数值表示事件A出现可能性大小的一个度量，它称为事件A出现的概率，即为射击时命中目标的概率。命中概率p的大小，是由事件A的内在性质所决定的，是客观存在的，不依赖于具体试验的结果。命中概率p，它依赖于：

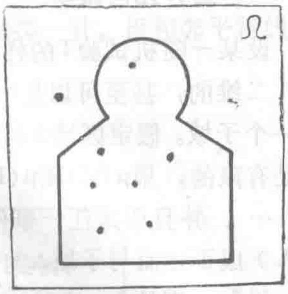

图1.1　靶板图样

——火力系统（火炮弹药）的质量（即弹着散布集中性的好坏）；

——射击时的瞄准条件（瞄准点位置与瞄准误差）；

——目标区域的位置、大小、形状。

这些条件一定时，命中目标的概率p随之确定。在多次重复射击中，当射击次数n很大时，命中率 $R=\frac{\mu}{n}$ 就能很近似地把 p 反映出来。

概率的统计定义　事件A出现的频率 $R(A)=\frac{\mu}{n}$ 在试验次数n无限增大时，它逐渐稳定于某个数值p，此数值称为事件A出现的概率，记为P(A)，即

$$P(A)=p$$

根据概率的统计定义，可得出它的三个性质：

1. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；
2. 对必然事件，$P(\Omega)=1$；
3. 对不可能事件，$P(\phi)=0$。

概率的统计定义，提供了一个近似求概率的方法：对事件A进行多次独立重复试验，求出事件A 的频率 $\frac{\mu}{n}$，在试验次数n较大时，可近似认为

$$P(A)\doteq\frac{\mu}{n} \tag{1.9}$$

例如，生男（或生女）的概率就是用上述方法确定的。

古典概率考虑的是有限个基本事件的情形。统计概率虽可考虑无限个基本事件，但实际

上我们不能进行无穷次独立重复试验。因而，历史上又出现第三种定义和计算概率的方法，这就是几何概率。

三、几何概率

设某一随机试验T的样本空间，可以用欧氏空间的某一区域Ω表示，这个区域可以是一维的，二维的，甚至可以是n维的。此时，基本事件是区域Ω中的一个点，随机事件是区域Ω中的一个子域。假定区域Ω本身以及区域Ω中任一可能出现的子域D都是可以度量的，其度量大小是有限的，用$\mu(\Omega)$和$\mu(D)$表示。例如一维区间的长度，二维区域的面积，三维区域的体积，…。并且假定任一事件A（它是Ω中的一个子域）出现的概率仅与子域A的度量大小$\mu(A)$成正比而与子域A的位置及形状无关（这一假定相当于古典概型中的等可能性）。

设某一事件A，它的度量大小为$\mu(A)$，则事件A出现的概率定义为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1.10}$$

称此概率为几何概率。

几何概率也有类似于古典概率和统计概率的三条性质。

例1.12 军舰直线行驶通过一水雷线，航线与水雷中心连线的夹角为α，相邻的水雷中心的间隔为l，军舰宽为b，水雷直径为d（图1.2）。求军舰被炸的概率。

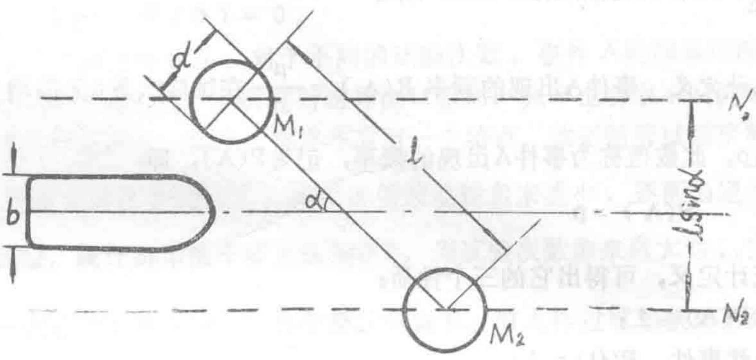

图1.2 军舰通过水雷线

解 在图1.2中，点M_1，M_2为相邻的两水雷的中心，间隔为l。过点M_1，M_2引平行于航线的直线N_1M_1，N_2M_2，这两条平行线的宽度为$l\sin\alpha$。

显然，当军舰宽度b大于等于$l\sin\alpha-d$时，军舰被炸是必然的，即$p=1$。

在$b<l\sin\alpha-d$时，军舰被炸的概率为

$$p=\frac{b+d}{l\sin\alpha}$$

也即