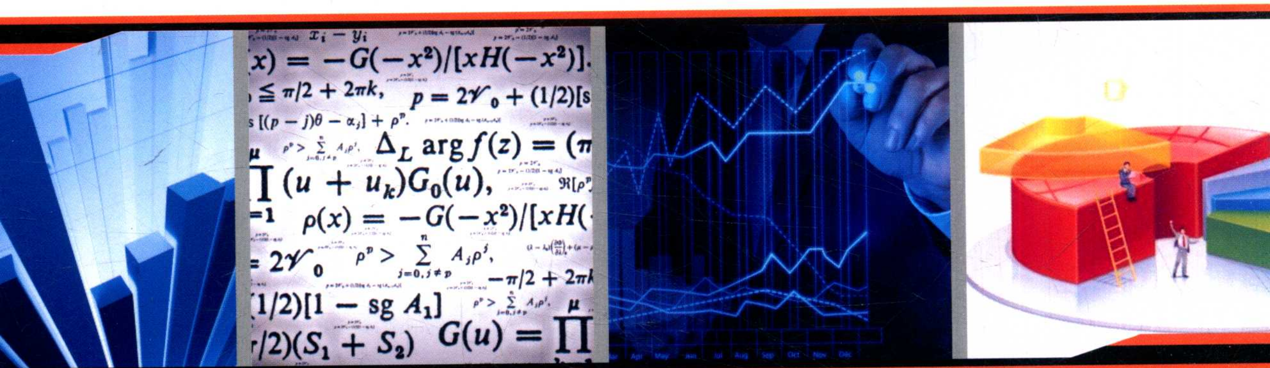
高等学校规划教材

PLANNING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

贵州民族大学博士点学科建设经费资助项目



随机过程及其应用

孙玉东 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

SUIJI GUOCHENG JIQI YINGYONG

随机过程及其应用

孙玉东　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分为7章，依次为概率理论基础、随机过程的基本概念、Poisson过程、离散时间Markov链、随机分析、Brown运动以及连续时间Markov链等。对随机过程的基本概念与核心内容的讲述力求做到循序渐进、由浅入深、叙述严谨。对于复杂的理论，通过典型的例子进行通俗的解释，便于学生能更加形象地理解随机过程的基本理论。

本书可作为高等学校工科类、管理类、数学类以及统计类专业高年级本科生、研究生相关课程教材，亦可供从事随机微分方程、随机分析以及金融衍生产品定价研究的科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机过程及其应用/孙玉东编著.—西安：西北工业大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5612-5060-0

Ⅰ.①随…　Ⅱ.①孙…　Ⅲ.①随机过程—基础知识　Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第213254号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　　1/16
印　　张：18
字　　数：382千字
版　　次：2016年8月第1版　　2016年8月第1次印刷
定　　价：40.00元

前　言

随机过程理论是概率论的延伸，是一门应用性很强的学科。从 20 世纪 30 年代起，对于随机过程理论的研究不断发展和丰富。特别是近 10 多年，随机过程理论及其应用得到了迅速发展。随机过程理论被广泛地应用到金融学、经济学、管理科学、物理学、自动控制、电子信息工程以及通信科学等领域。

多数随机过程书籍需要学生事先掌握测度理论和高等概率论。这限制了那些非数学专业学生对随机过程的掌握程度。多数学生在学习随机过程之前，并没有掌握测度理论和高等概率论等方面的知识。另外，他们在课程学习过程中也没必要学习“将来用不到”的抽象数学知识。因此，在与学生交谈的过程当中，笔者萌发了一个念头：撰写一本不依赖测度理论和高等概率论的随机过程教材。

本书包含一定数量的习题并附有答案，读者需要具备概率论、线性代数以及一些微积分知识。本书附有一些随机过程轨迹的模拟方法和程序，需要读者具备一些 Matlab 编程的基本知识。

全书分 7 章，依次为概率理论基础、随机过程的基本概念、Poisson 过程、离散时间 Markov 链、随机分析、Brown 运动以及连续时间 Markov 链等。本书对随机过程的基本概念与核心内容的讲述力求做到循序渐进、由浅入深、叙述严谨。对于复杂的理论，通过典型的例子进行通俗的解释，便于学生更加形象地理解随机过程的基本理论。

本书可作为高等学校工科类、管理类、数学类以及统计类专业高年级本科生、研究生的相关课程教材，亦可供从事随机微分方程、随机分析以及金融衍生产品定价研究的科研人员参考。编写本书曾参阅了相关文献资料，在此，谨向其作者深表谢意。

笔者得以完成本书，要感谢许多同仁的鼓励、支持和帮助。特别是金良琼副教授和王新锋老师在百忙之中审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，纠正了一些不妥之处，在此表示诚挚的谢意！

由于笔者水平所限，书中错误或不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2016 年 6 月

目　　录

第 1 章　概率理论基础

1.1　随机事件及其概率

生活中常常出现一些随机现象，例如股票价格，其分布特征随时间发展变化，而且所涉及的随机变量往往是无穷多个，这就是随机过程的研究对象。随机过程通常被视为概率论的动态部分。为此，首先对本书中经常用到的概率论基本知识做简要的回顾。

1.1.1　基础概念

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能确定，但是实验的所有可能的结果是已知的。

定义 1.1.1　对于随机试验，将每一个可能出现的结果称为样本点，并将某些样本点构成的集合称为随机事件，简称事件。把单个样本点构成的集合称为基本事件，而把所有样本点构成的集合称为必然事件或样本空间，记为 Ω。

我们用 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 等大写字母表示随机事件。为了以后运算封闭，规定不含任何元素的空集也为事件，称为不可能事件，用 Φ 表示。

例题 1.1.1　已知一批产品共 30 件，其中有正品 26 件、次品 4 件，从中随机取出 5 件，则

$$A_i=\{\text{被取出的 5 件产品中恰好有 } i \text{ 件次品}\}$$

$$B=\{\text{被取出的 5 件产品中最多有 3 件次品}\}$$

$$C=\{\text{被取出的 5 件产品中正品不超过 2 件}\}$$

都是随机事件，其中 $i=0,1,2,3,4$。

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，其结果往往事先无法预测。但是，在做大量重复试验时，其发生的可能性大小是客观存在的，是事件本身的固有属性。对此，人们试图用一个数加以度量。通俗地说，把度量事件 A 在试验中发生的可能性大小的数叫作概率，并记为 $P(A)$。

对于给定的随机事件，如何定义和获得该事件发生的概率，通常与试验条件有关。下面只给出在实际中用得较多的两个定义：概率的统计定义和古典概型定义。

统计定义是以大量重复试验为前提的。为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的

频繁程度。进而引出表述事件在一次试验中发生的可能性大小的量——概率——及其稳定性概念。

定义 1.1.2 在 N 次重复试验中，事件 A 发生的次数 M（频数）与试验次数 N 的比值 M/N，称为事件 A 的频率，并记为 $f_N(A)$，即 $f_N(A)=M/N$。

容易验证，频率 $f_N(A)$ 具有下述性质。

(1)对于任一事件 A，有 $0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$；

(2) $f_N(\Omega)=1, f_N(\Phi)=0$；

(3)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_N(A_1)+f_N(A_2)+\cdots+f_N(A_n)$$

实践表明，当试验次数 N 逐渐增大时，频率 $f_N(A)$ 虽然不尽相同，但却稳定在某个实数附近，这种性质称为频率的稳定性。

定义 1.1.3（概率的统计定义） 在相同条件下重复进行 N 次随机试验，如果事件 A 的频率 $f_N(A)$ 随着试验次数 N 的增加而稳定地在某个常数 p $(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$。

由统计定义求得的概率简称为统计概率。定义中的大量试验往往难以办到，实际操作时只是根据需要和可能，用一定数量试验下的频率作为频率的近似。例如，硬币投掷试验，由于 N=500 时，频率逐渐稳定在 0.5 附近，于是便可认定 $P(A)=0.5$。

在统计意义下，概率是作为频率的稳定值而引入的，因而，概率也应当具备频率的基本性质。

性质 1.1.1（概率统计定义的性质）

(1)对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$；

(3)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

古典概型是古典概率模型的简称，称随机试验模型为古典概型，如果它具有下列两个特征。

(1)随机试验只有有限个可能的结果，即有限个样本点（有限性）；

(2)每一个样本点发生的可能性相等（等可能性）。

古典概型也常常被称为等可能性概型，在概率论产生和发展的过程中，它是最早的研究对象，在实际应用中它也是最常用的一种概率模型。

对于古典概型，以 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 表示样本空间，$\omega_i (i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点，对于任一随机事件 $A=\{\omega_{i1}, \cdots, \omega_{in}\}$，下面给出古典概型的定义。

定义 1.1.4（概率的古典概型定义） 对于给定的古典概型，若样本空间中有 n 个样本点，事件 A 含有 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 A 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 所含样本点的个数}} \tag{1.1.1}$$

显然，凡属古典概型的问题只需运用式(1.1.1)，并依据乘法原理或加法原理的思路，借助排列组合为工具，直接计算其概率。由古典定义求得的概率简称为古典概率。

性质 1.1.2（古典概率的性质）

(1)对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$, $P(\Phi)=0$；

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

例题 1.1.2　某种产品共有 30 件，其中含正品 23 件，次品 7 件，从中任取 5 件，试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率。

解　设事件 A 表示被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品，由题设，从中任取 5 件的样本点总数 $n=C_{30}^5$。事件 A 包含的样本点数 $m=C_7^2C_{23}^3$，则所求概率为

$$P(A)=C_7^2C_{23}^3/C_{30}^5=0.2610$$

□

例题 1.1.3　某口袋中有六只球，其中四只白球，两只红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只。考虑两种取球方式：(a) 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。这种取球方式叫作有放回取球；(b) 第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球。这种取球方式叫作无放回取球。试分别就上面两种情况求：(1)取到的两只球都是白球的概率，(2)取到的两只球颜色相同的概率。

解　(1)假定事件 A_1 表示取到的两只球都是白球，则有放回取球情形下事件 A_1 的概率为

$$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

无放回取球情形下事件 A_1 的概率为

$$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(2)令事件 A_2 表示取到的两只球颜色相同，则有放回取球情形下事件 A_2 的概率为

$$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$$

无放回取球情形下事件 A_2 的概率为

$$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$$

□

性质 1.1.3　根据随机事件概率的定义，可得随机事件的概率具有以下性质：

(1) $P(\Phi)=0$；

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(4)若 $B \subset A$,则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$,且 $P(B) \leqslant P(A)$;

(5)对于任意事件 A 和 B,$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

证明 (1)将 Ω 写成 $\Omega + \Phi + \Phi + \Phi + \cdots$,易得

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\Phi) + P(\Phi) + \cdots$$

因此 $P(\Phi) = 0$。

(2) 因为

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m = A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \Phi + \Phi + \cdots$$

所以利用(1),可得

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \cdots + A_m) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + P(\Phi) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) \end{aligned}$$

即(2)得证。

(3)由于

$$A + \overline{A} = \Omega, P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

故利用(2)可得 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 。

(4)注意 $A = AB + (A - B)$,从而

$$P(A) = P(AB) + P(A - B)$$

若 $B \subset A$,则 $AB = B$,易见

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

此外,注意到 $P(A - B) \geqslant 0$,故在条件 $A \supset B$ 下,有

$$P(A) \geqslant P(B)$$

因此(4)得证。

(5) 注意 $A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \Phi$,从而由(2)和(4),可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

□

1.1.2 条件概率、全概率公式以及 Bayes 公式

条件概率是概率论中的一个基本概念,也是概率论中一个重要工具,它既可以帮助我们认识更复杂的随机事件,也可以帮助我们计算一些复杂事件的概率。

定义 1.1.5 对于事件 A 和 B,若 $P(B) > 0$,则称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.1.2}$$

为事件 B 发生前提下事件 A 的条件概率。

从式(1.1.2)出发,变形后可得

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B) \tag{1.1.3}$$

上式称为两个事件概率的乘法公式。

乘法公式可以推广到多个事件同时发生的情形。例如,对于 3 个事件 A_1,A_2,A_3,当 $P(A_1A_2)>0$ 时,概率的乘法公式为

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)=\\ P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

一般情况下,对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,当 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$ 时,概率的乘法公式为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.1.5}$$

由定义 1.1.5 可推出条件概率具有以下性质。

(1)若随机事件 A 和 B 满足 $P(B)>0$,则 $0\leqslant P(A\mid B)\leqslant 1$;

(2)若 $P(B)>0$,则 $P(\Omega\mid B)=1,P(\Phi\mid B)=0$;

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,$P(B)>0$,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\mid B\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\mid B)$$

(4) 若 $P(B)>0$,则 $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$。

当 $B=\Omega$ 时,条件概率变为无条件概率,换句话说一般的概率可以看作条件概率的特例。

例题 1.1.4　某人忘记了电话号码的最后一位数,于是就随意拨号,求:

(1)恰好第三次拨通的概率;(2)3 次内拨通的概率。

解　设 A_i 表示第 i 次拨通,$i=1,2,3$,则恰好第三次拨通的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)&=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

3 次内拨通可以分为 3 种情况:第一恰好拨通、第一次没拨通但第二次拨通、前两次均没拨通第三次拨通,从而 3 次内拨通的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)&=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

□

现在介绍概率论中常见的全概率公式,其作用是将一个复杂的概率分解为若干个互不相容的简单事件的概率之和。

定理 1.1.1 (全概率公式)　若随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个划分,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对于 Ω 中的任意事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i) \tag{1.1.6}$$

证明　由于

$$B=B\,\Omega=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}A_iB$$

且 $A_iB(i=1,2,\cdots,n)$ 两两互斥，故

$$P(B)=P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_iB\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

□

定理 1.1.2 (Bayes 公式) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分满足 $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，B 是 Ω 中的任一事件满足 $P(B)>0$，则有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)} \tag{1.1.7}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$ 。

证明 对于某一固定的 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$

□

Bayes 公式也称为逆概率公式，它是由英国科学家贝叶斯(Bayes)建立的。

例题 1.1.5 盒中有 12 个球，其中 9 个新球，第一次比赛从中任取 3 球，用后放回，第二次比赛从中再取 3 球，求概率：

(1)第二次取出的球都是新球；

(2)若第二次取出的都是新球，第一次取出的都是新球。

解 设 $B=\{$第二次取出的都是新球$\}$，$A_i=\{$第一次取出 i 个新球$\}$，$i=0,1,2,3$，由全概率公式，可得

$$P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\text{，}P(A_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\text{，}P(A_3)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\text{，}P(A_3)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}$$

$$P(B\mid A_0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\text{，}P(B\mid A_1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}\text{，}P(B\mid A_2)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}\text{，}P(B\mid A_3)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}$$

将上述结果代入全概率公式，可得

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\times\frac{C_9^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\times\frac{C_8^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\times\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\times\frac{C_6^3}{C_{12}^3}\\&=\frac{7\,056}{(C_{12}^3)^2}=0.086\end{aligned}$$

进一步利用贝叶斯公式，则有

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}$$

$$=\frac{C_9^3C_6^3/[C_{12}^3]^2}{7\ 056/[C_{12}^3]^2}=0.238$$

□

1.1.3　事件的独立性

由上节的讨论可以看出,条件概率 $P(B\mid A)$ 与 $P(B)$ 通常是不同的。但在某些情况下两者相等,即条件概率 $P(B\mid A)$ 等于无条件概率 $P(B)$ 。为进一步说明这个事实,我们考察如下实例。

例题 1.1.6　一口袋盛有 11 个黑球、7 个白球,从中任抽 2 次,每次取出一球。即事件 A={第一次取出黑球},B={第二次取出黑球}。试就取球的不放回与放回情况,分别计算概率 $P(B|A)$ 及 $P(B)$ 。

解　对于不放回情况,易知 $P(B|A)=10/17$,另外按全概率公式可算得 $P(B)=11/18$,这样便有

$$P(B\mid A)\neq P(B)$$

对于放回情况,显然有

$$P(B|A)=P(B)=11/18$$

等式 $P(B|A)=P(B)$ 说明事件 A 发生与否对于事件 B 发生的概率没有影响。若 $P(B|A)=P(B)$ 成立,则由乘法公式知

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

上式为人们对事件独立性概念的最初认识。

□

定义 1.1.6　设 A 与 B 为两事件,若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.1.8}$$

成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立。

由定义 1.1.6,可以推出如下性质成立。

性质 1.1.4　(1)必然事件 Ω,不可能事件 Φ 与任何事件独立;(2) 若事件 A 和 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 分别相互独立,我们也称两事件的相互独立性关于逆运算封闭。

证明　(1)是显然成立的,这里只证明(2),由于 $A=AB+A\overline{B}$,易得

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

由 A 与 B 的独立性,知

$$P(A)=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$$

则

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})\end{aligned}$$

从而 A 与 $\overline{B}$ 相互独立,类似可证明其他结论。

□

定义 1.1.7 如果以下 4 个等式成立，则称随机事件 A_1，A_2 和 A_3 是相互独立的

$$\left.\begin{aligned} P(A_1A_2)&=P(A_1)P(A_2)\\ P(A_2A_3)&=P(A_2)P(A_3)\\ P(A_1A_3)&=P(A_1)P(A_3)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.9}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\tag{1.1.10}$$

若前 3 个等式成立即公式(1.1.9)成立，则称随机事件 A_1，A_2 和 A_3 是两两独立的。

上述 3 个事件相互独立的定义中要求 4 个等式同时成立，缺一不可，下面的例子说明了这一点。

例题 1.1.7 若有一个均匀正八面体，其中 1，2，3，4 面染红色，1，2，3，5 面染白色，1，6，7，8 面染黑色，以 A，B，C 表示投掷一次正八面体出现红，白，黑 3 种颜色的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

但

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(B)P(C)$$

□

可以类似举例，由两两独立也不能推出公式(1.1.10) 成立，进而可以定义任意 n 个事件的相互独立性。

定义 1.1.8 设有 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果对任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 以及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\tag{1.1.11}$$

则称事件 A_1，A_2，…，A_n 是相互独立的。n 个事件相互独立的条件十分苛求，如果 n 个事件相互独立，则有

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1=2^n-n-1$$

个等式(1.1.11)必须同时成立。例如，当 $n=3$ 时应有 $2^3-3-1=4$ 个等式。

需要指出的是，由于公式(1.1.9)与公式(1.1.10)不能相互推出，因而 3 个事件的两两独立与相互独立是有原则区别的不同概念。类似也可有三三独立，四四独立等概念，同样它们与相互独立是含义不同的概念。由多个事件相互独立可以推出它们两两独立。反之，由多个事件两两独立不一定能推出它们相互独立。

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\tag{1.1.12}$$

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=1-p(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})\\ &=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})\end{aligned}$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}) \tag{1.1.13}$$

类似于两个事件相互独立的性质，若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则将其中的某一个或某些个事件甚至是所有事件换成对立事件之后，它们仍然相互独立。也就是在相互独立的随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中，变更某些 A_i 为$\overline{A_i}$ 后形成的 n 个事件依然保持其独立性。

例题 1.1.8　每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，假设每个人血清中是否含有肝炎病毒相互独立，混合 100 个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率。

解　以 A_i 记第 i 个人的血清含有肝炎病毒这一事件 $i=1,2,\cdots,100$。假设 A_i 相互独立，则

$$P(\overline{A_i})=0.996$$

从而所求概率为

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{100})=1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{100}})=1-0.996^{100}\approx 0.33$$

□

1.2　随机变量及其分布

在许多随机试验中，试验的结果可以用某些实数值(数组)加以刻画，例如，产品检验中被查出的次品件数、首次获奖时购买彩票的次数、某企业今年以来获得的利润、飞机着陆点的位置以及体现房屋质量的多种指标等均属此例。即使有些试验，其结果仅仅由定性指标给出，但也可以人为地进行数量化描述。

1.2.1　随机变量的定义

定义 1.2.1　设随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 为试验的样本点。若对于每一个样本点 ω，都有惟一实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称实数值 $X(\omega)$ 为 Ω 上的随机变量。

定义中的随机变量只涉及到一个实值，所以它是一维的，其本质是在试验结果与实数值之间建立的一种对应关系，通常被视为试验结果的函数。它与人们熟知的、在高等数学中反复出现的普通函数存在某些差别：首先，自变量不是实数 x 而是试验结果 ω；其次，定义域也不是实数集而是所有基本事件构成的集合，即样本空间 Ω。因而，随机变量 $X(\omega)$ 是一个实值集函数。

为了方便起见，书写时常常略去 ω，而把随机变量 $X(\omega)$ 简写为 X。随机变量也可以用 Y，$Z,\cdots$，或 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 等表示。

若对随机事件 $\{X\leqslant x\}$ 求概率，则引出随机变量分布函数的定义。

定义 1.2.2　设 X 为一随机变量，则对于任意实数 x，事件$\{X\leqslant x\}$ 的概率

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{1.2.1}$$

称为随机变量 X 的分布函数。

可见，分布函数 $F(x)$ 是定义域为$(-\infty,\infty)$、值域为$[0,1]$ 的普通函数。分布函数的实质是满足条件 $X\leqslant x$ 下概率的累积(和)，故分布函数也称为概率累积函数。

由分布函数的定义知，对于任意实数 $a,b\ (a<b)$，有

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a) \tag{1.2.2}$$

事实上，对于题设中 a,b，有

$$\{a<X\leqslant b\}=\{X\leqslant b\}-\{X\leqslant a\}$$

注意

$$\{X\leqslant b\}\supset\{X\leqslant a\}$$

从而可得

$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b)-F(a)$$

因此，随机变量 X 落入任一区间的概率都可用分布函数来表达。从这个意义上讲，分布函数完整地描述了各类随机变量取值的概率规律。

易见，分布函数具有下述基本性质。

(1) 对于任意实数 x，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；

(2) $F(x)$ 是单调非减函数；

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(4) $F(x)$ 是右连续函数，即对每一点 x_0，有 $F(x_0)=F(x_0+0)$。若 X 为连续型随机变量，则 $F(x)$ 是连续函数。

性质(1)是显然成立的。性质(2)、(3)在直观上也不难理解。性质(4)证明要用到较多的测度论知识，我们略去此部分证明。

分布函数的引入，使得某些概率论方面的问题有可能得到简化而转为普通函数的运算，从而高等数学中的许多结果可以作为讨论随机变量概率规律性的有力工具。

例题 1.2.1 设连续型随机变量 X 的分布密度为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a\leqslant x<a,(a>0)\\ 1, & x\geqslant a\end{cases}$$

试确定常数 A 和 B 的值。

解 X 为连续型随机变量，故分布函数 $F(x)$ 连续，于是

$$F(-a-0)=F(-a)\ ,\ F(a-0)=F(a)$$

即 $A-\frac{\pi}{2}B=0$，$A+\frac{\pi}{2}B=1$，解之可得

$$A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$$

□

1.2.2 离散型随机变量

设 X 是一个随机变量，如果它的全部可能取值只有有限个或可数个，则称 X 为一维离散

型随机变量。

例如“射击打靶时命中的环数”“首次获奖时购买彩票的次数”“掷骰子出现的点数”等均为一维离散型随机变量。

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1, x_2, \cdots$，对于每个取值 x_i，$\{X = x_i\}$ 是其样本空间上的一个随机事件，为了描述随机变量 X，还需要知道这些随机事件发生的可能性(概率)。

定义 1.2.3　设离散型随机变量所有可能取值为 $x_i, i = 1, 2, 3, \cdots$，则

$$P\{X = x_i\} = p_i$$

称为随机变量 X 的概率分布或分布律。对于 X 的分布律，通常用下表的形式来表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

离散型随机变量 X 的分布律描述了 X 的变化规律，它对于 X 可能取值的正、负并无限制，为了方便叙述我们通常约定：$x_1 < x_2 < \cdots x_i < \cdots$ 。

由上面的讨论可知，事件 $\{X = x_1\}$、$\{X = x_2\}$、$\cdots$、$\{X = x_i\}$ 、$\cdots$恰好构成的一个划分。因而分布律具有以下基本性质：

(1) $p_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, \cdots$(非负性)。

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ (规范性)。

离散型随机变量分布律的性质之所以重要，不仅在于可据此确定分布律中的待定系数，而且其逆命题也成立，即凡是满足了非负性、规范性的实数序列 $p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots$ 都可以成为某个随机变量的分布律。从这个意义上讲，分布律完整地描述了离散型随机变量取值的概率规律。现在给出一些常用的离散型分布。

1. *两点分布*

如果随机变量 X 的分布律为

0	1
q	p

其中 $0 < p < 1$，$(q = 1 - p)$ 为常数，则称 X 服从参数为 p 的两点分布。两点分布又称为 0—1 分布。它的分布律可以写成

$$P\{X = m\} = p^m q^{1-m}, \quad m = 0, 1$$

0—1 分布可简记为 $X \sim b(1, p)$(或 $B(1, p)$)。凡是只取两种状态或可归结为两种状态的随机试验均可用两点分布来描述。例如，投掷硬币试验，检查产品的质量是否合格，某种树苗的高度是否超过指定高度等。

例题 1.2.2　某产品 200 件，其中有 195 件正品，5 件次品。今从中随机抽取一件，若规定

$$X = \begin{cases} 1, & \text{取到正品} \\ 0, & \text{取到次品} \end{cases}$$