ZHONGXUE SHUXUENENG LI PEIYANG《中学数学能力培养》编辑

中学数学能力培养

上册

科学普及出版社

中学数学能力培养

上　册

《中学数学能力培养》　编辑组

科学普及出版社

内 容 提 要

数学教学中能力培养问题是目前国内外学术界、教育界都在积极探讨的问题。本书征集全国十几个省市、自治区的有关文章60余篇，文章作者多系具有丰富经验的数学教师和数学教育研究人员。全书内容紧密联系教材，并按现行中学课本顺序编排。文中既有理论上的分析探索，同时又不脱离教学实践。通过典型习题的分析、讲解，抽象出解题的规律与方法，总结归纳出能力培养的途径。

本书按初、高中不同内容分上、下册出版。可供中学教师、从事成人教育和其他教育工作的同志参考使用，也可作为广大中学生和自学青年的能力"自我培养"的参考书。

中学数学能力培养

上　册

《中学数学能力培养》编辑组

责任编辑：颜　实

技术设计：王予南

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥 路 32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京市密云县印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：12.5　字数：328 千字

1988 年 8 月第 1 版　1988年 8 月第 1 次印刷

印数：1—10,000册　定价：3.80元

统一书号：7051·1182　本社书号：1614

ISBN 7-110-00489-9/G·117

前　言

在信息革命的时代，知识总量骤增，科学技术迅猛发展，这就使学校所教授的相对稳定的知识与时代的要求之间的矛盾越来越尖锐。然而不论教材怎样更新，如果学生只能接受现成的知识，他们仍将落后于时代。因此培养能力以适应时代的需要就成为教学改革的重大课题。

长期以来，世界各国的教育学、心理学专家和数学家们一直关注并致力于能力培养的研究，他们不仅给能力下定义，而且探究能力的结构。

早在1908年法国数学家彭加勒（*Poincare*，1854—1912）就发表了数学创造力和本质的见解，他提出了数学创造力的“无意识侧面”，并认为“这是灵感的经常性源泉。”“数学家们有一种特殊的、与众不同的审美感（审美本能）。”

1918年，著名科学家罗杰斯（*A.L.Rogers*）提出两种数学能力：再现能力与创造能力。

瑞典心理学家魏德林（*I.Werdelir*）给一般人所说的掌握、再现以及独立运用数学信息的那种“学校式”能力下了定义。他认为：“数学能力是理解数学的（以及类似的）问题、符号、方法和证明的本质的能力；是学会他们，在记忆中保持和再现它们的能力；是把它们同其他问题、符号、方法和证明结合起来的能力；也是在解数学的（或类似的）课题时运用它们的能力。”魏德林认为数学推理能力是构成数学能力的基础。

法国数学家哈达玛（*Hadamard*）曾断言：“在试图解代数题和几何题的学生的活动与数学发现者的活动之间，仅仅具有程度和水平上的差异——这两种活动在性质上是相似的。

苏联的克鲁捷茨基认为应从两个方面来看待数学能力的概念。

1．看作创造性（科学的）能力——科学的数学活动方面的能力，这种能力能产生对人类有意义的新成果和新成就，对社会作出有价值的贡献。

2．看作一般学习的能力——学习（学会、掌握）数学的能力，迅速而顺利地掌握适当的知识和技能的能力。

苏联著名数学家辛钦、柯尔莫戈洛夫、格涅坚科、希代茨伯德都曾就能力的成分及发展条件提出看法并加以论证。他们根据对数学科学的描述以及培养训练有创造性的青年数学家的经验，讨论了在数学领域成功地从事创造性工作应具有的品质。

例如柯尔莫戈洛夫认为数学能力的成分为：

（1）熟练地变换复杂的字母表达式的能力，找出成功的方法来解不符合标准法则的方程的能力（计算能力）。

（2）对几何图形的想象力或对几何图形的直觉。

（3）精通连贯而又适当分段的逻辑推理。

30年代美国心理学家瑟斯顿（*L.L.Thurstone*）提出了多因素分析的学说并研究群因素，他的方法曾被广泛采用。不少专家通过各种形式的测验，借助统计科学的手段、处理测试结果，抽取信息，以说明被测试的对象的能力与测试题目的相关程度，从而分析出一些共同因素来说明能力的结构。

不少专家研究能力的差异类型，能力的形成过程，以及如何培养能力，如何在教学中使之增长发展。

当前国内对于能力定义的讨论，关于能力结构的研究正逐步深化。关于传授知识与培养能力之间关系的讨论，认识已渐趋一致。普遍认为二者是统一的。数学教育工作应以学生能力是否强作为重要的衡量标准，也渐渐为越来越多的人所接受。

但是由于我国这方面研究时间不长，还不够深入，研究的方法和手段有的不完全或不甚科学。相当多的教师感到结合教学培养能力自己有一定困难。对于能力结构的讨论中，所列举的应

培养的各种能力越来越多，有无限增加的趋势。我们认为：数学教学毫无疑问应着重培养数学的三大能力（运算能力、空间想象能力及逻辑思维能力，逻辑思维能力是核心）及获得数学知识和运用数学知识的能力。这是必须花大力量进行研究的。与此同时，一般能力）如观察能力，自学能力，操作能力，包括数学的绘图与测量等）的培养当然也应与其他科目同步进行，以期使学生有坚实的基础并有创造性。

为了展示如何在教学的实际过程中进行能力培养，我们组织了十几个省、市、自治区的几十位有丰富教学经验的教师和数学工作者（其中绝大多数是特级教师，副教授，省、市、自治区教育学院或科研所的研究人员），编写了这本能力培养的汇编。他们在多年的教学实践中积累了如何培养能力的经验，并取得了良好的效果。这些论文既是他们经验的结晶，也一定程度反映了各地进行能力培养的水平。

本书不是能力问题的专论，但我们希望它能对广大数学教师在教学中如何进行能力培养有所助益，同时也为广大中学生和青年在自学过程中提供一本如何提高能力的参考读物。

本书的另一特点是：完全从数学教学实际出发，内容紧密联系教材，紧扣课本与大纲，并以现行课本的目录为顺序。

全书分上、下两册，上册为初中部分，下册为高中部分。

本书由罗小伟同志负责统编，参加工作的还有彭文逵、周耿、晨光、张立铭等同志。初中与高中代数部分由彭文逵、罗小伟同志负责，平面几何由张立铭同志负责，立体几何与三角由周耿同志负责，解析几何由晨光同志负责，最后由罗小伟同志审定。

编　者

目　录

Ⅰ. 初 中 代 数

Ⅱ．初　中　几　何

I. 初 中 代 数

Ⅰ－1　代数教学中的能力培养问题

中央民族学院数学系　罗小伟

代数在中学数学教学中，所占课时最多，延续时间最长，从初一至高三年年学习。且内容庞杂、参差交错，教师和学生都认为代数是最难以掌握的科目。因而认真研究代数课的教与学是数学教学改革的重要课题。

从各年级教学情况检查及高考试卷分析的统计材料中可以看出：代数方面存在的问题与失误都较其他科目为多，不仅是体现在知识方面而且更多地体现在能力方面。因此，在代数教学中注意能力的培养就更为急切。这对于提高数学教育的水平，增强学生的素质，都有极为重要的作用。

中学数学教学大纲提出：培养“运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力”这三大能力，代数教学当然应着重培养运算能力与逻辑思维能力。

学生的能力是在学习知识的过程中得到培养并逐步增强的。体现在信息的获取、消化、存储记忆、提取、运用等各个环节。通过一次次信息的反馈、整理，建立其自身的认知结构——思维的网络。

本文试图从六个方面探讨代数教学中能力的培养。各种能力之间是互相联系不能割裂的，但为了叙述方便起见，仍然分别讨论之。

一、关于运算能力的培养

中学数学中的“运算”主要是数与式的运算，正确、迅速地进行运算是解决任何数学问题必需具备的条件，也是学习数学中的各种知识及学习物理、化学等科目所不可缺少的。

1．“运算”就是对应，就是映射

要培养运算能力，首先要正确认识运算的本质。一切运算不过是一种特殊的对应，一种映射。

例如，求有理数（实数）的绝对值，是全体有理数（实数）集到非负有理数（实数）集的映射：

$$x \longrightarrow |x|$$

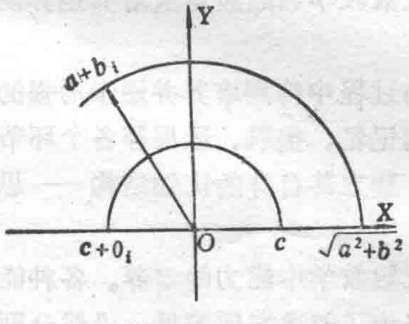
求有理数（实数）的相反数，是全体有理数（实数）集到全体有理数（实数）集的一个映射：

$$x \longrightarrow -x.$$

求复数的模，是全体复数集到实数集的映射：

$$z = a + bi \longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (a, b \in R)$$

并可用平面上向量的旋转来表现（如图Ⅰ-1-1）



图Ⅰ-1-1

求有理数（实数）的相反数，也可看成是数轴上代表有理数（实数）的向量或点绕原点旋转180°而成。

有理数（实数、复数）的加、减、乘、除等都是二元运算，即任何两个有理数（实数、复数）都有唯一确定的一个有理数（实数、复数）与之对应。（除法要求除数不为零）

如任给$a+bi$、$c+di$两个复数，对于加法来说，$(a+bi)+(c+di)$是唯一的确定的复数$(a+c)+(b+d)i$。

即 $a+bi，c+di \xrightarrow{+} (a+c)+(b+d)i$

对于乘法，有

$$a+bi，c+di \xrightarrow{\times} (ac-bd)+(ad+bc)i$$

这是代数中最本质的概念之一，从讲授有理数运算开始，应注意渗透这个概念，在高中讲授映射之后，应逐渐让学生领会。进入复数运算时，则应逐渐明确之。

由于乘方就是乘法，乘方可视为多元运算的特例，也可直接看作一元运算。如立方运算，可视为三元运算的特例：

$$(a，a，a) \longrightarrow a^3；$$

也可视为一元运算

$$a \xrightarrow{\text{立方}} a^3=a\cdot a\cdot a.$$

四位数学用表中求立方，从数值来看是近似值，实质上清楚的体现了一个一元运算。

求实数的三次方，在实数范围内是个一一映射。（求奇次方均如此）。

求实数的二次方，在实数范围内就不是一一映射。（求偶次方均如此）。

因而求实数的奇次方在实数范围内有逆映射，即实数开奇次方在实数范围内仍是映射，求实数的偶次方在实数范围内没有逆映射。

对于任何非负实数a，$n\in z^+$，

$$\sqrt[2n]{a} \xrightarrow{2n\text{次方}} a$$

$$-\sqrt[2n]{a} \xrightarrow{2n\text{次方}} a$$

故求非负实数a的偶次算术根是非负实数集到非负实数集的映射。

$$a \xrightarrow{2n\text{次算术根}} \sqrt[2n]{a} \qquad (a\geqslant 0)$$

对于复数，求复数的n次方（n为正整数，$n>1$）是映射，但非一一映射。因为有n个复数经n次方后都得到同一个复数，所以复数开方存在多值问题。可先找出n个复数中辐角主值最小的那一个，再依次将辐角主值增加$\frac{2\pi}{n}$，即可得出n个n次方根。

运算决不仅仅局限于代数运算，还有各种超越运算。决不只是对各种数进行，而是对多种对象进行的。如集合的运算（交、并、补）极限运算、微分、积分运算等。只有抓住运算的本质，才能使学生真正理解，才有可能很好的培养运算的能力。

至于数理逻辑中的逻辑运算、几何中的变换，其实质也是一元、二元或 n 元运算。作好运算本质的教学，就可使学生认识能力得以提高。

2．引导学生自己来获得运算法则，突出运算法则之间的联系，巩固对法则的掌握

要提高运算的准确度，必须牢固掌握运算法则，教学实践说明：经过学习者自身的努力获得的法则，不仅倍感亲切，而且印象深刻，容易掌握。

如有理数运算法则，可通过实例让学生自己归纳总结，并用自己的语言叙述法则，然后用运算法则解题以达到巩固的目的。

著名心理学家皮亚盖特（*J．Piaget*）指出：每一个思维运算都有一种逆向运算，这种逆向运算从原始运算的结果出发，能够还原出原始数据。尤其是代数概念的形成是与对运算可逆性观念的掌握有关的。

如讲过有理数加法之后，让学生作下列填空

$$\left(\quad\right)+\left(-1\frac{1}{2}\right)=+2\frac{1}{2}.$$

这是以加法形式出现的。从学生来说，应该从括号内数的符号想起。由于括号内不能填入零和负数，只能填入正数，又因和数的绝对值为$2\frac{1}{2}$，说明括号内填入的正数的绝对值比负数

$\left(-1\frac{1}{2}\right)$的绝对值大 $2\frac{1}{2}$，故应在括号内填入数 $+4$。

以上过程是十分清晰的分析过程，是更深地掌握法则的结果，完成这种填空比完成一般加法题的演算是更高层次能力的表现。

类似地，在讲授有理数乘法后，可作下列填空

$$\left(-1\frac{1}{3}\right)\times\left(\qquad\right)=+2$$

学生也只是依次考虑括号内数的符号与绝对值，从而填出正确的数字。

这样，在讲加法与乘法时，既达到了巩固法则的目的，又为介绍减法与除法埋下伏笔作好了准备。

式的运算也可象上面那样处理。

如填空：

(1) $(\qquad)+(-3a)=-2\frac{1}{2}a$

(2) $\left(-4\frac{1}{3}a^2\right)\times\left(\qquad\right)=3a^6$

(3) $\left(\frac{1}{2x}\right)+\left(\qquad\right)=-\frac{1}{6x}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}\right)\left(\qquad\right)=-\frac{a}{3}\sqrt{b}$

(5) $(-2x^2y)(\qquad)=6x^3y-4x^2y^2-14x^2y^3$

(6) $(x-2)(\qquad)=2x^2-x-6$

(7) $(\qquad)^2=4x^2-4x+1$

(8) $(2x-y)(\qquad)=8x^3-y^3$

当然，还可再增加些变化。

如填空：

(1) $(3x^2-\qquad)^2=(\qquad)-12x^2y+(\qquad)$

(2) $\left[1+(\qquad)\right]\left[(\qquad)-x+(\qquad)\right]=(\qquad)+x^3$

(3) $(\quad)\left[(\quad)+4x^3y+(\quad)\right]=$

$(-2xy)-(\quad)+(6x^2y)$

(4) $\left[(\quad)+(\quad)\right]^2=9x^2-24xy^2+(\quad)$.

坚持在掌握法则的基础上加强逆向思维能力的培养，总是一箭双雕。既增强了逆向思维能力，更使运算能力大大加强。这也说明运算能力并不是孤立培养的。

有了上述的准备，在讲授整式乘法的基础上再讲多项式的因式分解就较为容易。只要突出因式分解的概念及与整式乘法的关系，总结因式分解的各种法则，从而使注意力集中于分析问题能力的培养。

3．加强变形的训练，掌握变形的重要方法

“变形”是个很广的概念，在代数中多指恒等变形与非恒等变形。所有的整式运算、分式运算、根式运算、超越式的运算都是恒等变形。人们常把几种恒等变形的综合运用称为变形，利用变形以期达到预期的目的。

如配方，既可对二次三项式ax^2+bx+c进行，即将二次三项式ax^2+bx+c经过提取首项系数，增加或减去适当项。利用公式、用乘法对加法的分配律变形为 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$的形式，也可对其他式子进行。

如将 $a-1+\frac{1}{a}$ $(a>0)$变形为$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+1$，从而断定该式最小值为1。（这从原式中是不易看出的）又如求三角函数的最值也常用到配方法。

又如待定系数法是以恒等变形为依据的重要方法，它朴素而适用面广，对整系数多项式的因式分解起着根本的作用。

如分解因式：x^5+x+1

人们很难想到将x^5+x+1添加并减去x^2，化为两组后会有公因式。使得