

CHENYONGMING  
JIANGPING  
SHUXUETI

陈永明

讲评

数学题

高中习题归类研讨

主编 陈永明 副主编 阮夏丽  
编写 上海市西南位育中学

大巧法无定法,小巧一题一法。中巧呢,则希望用一个方法解出一类题目。也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法。

——张景中

上海科技教育出版社

# 陈永明

## 讲评数学题

——高中习题归类研讨

主编 陈永明 副主编 阮夏丽

编写 上海市西南位育中学

上海科技教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

陈永明讲评数学题:高中习题归类研讨/陈永明主编. —上海:上海科技教育出版社,2012.11  
ISBN 978-7-5428-5512-1

I. ①陈… II. ①陈… III. ①中学数学课—高中—题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 196528 号

责任编辑:冯晨阳

封面设计:童郁喜

## 陈永明讲评数学题

——高中习题归类研讨

主 编:陈永明

副 主 编:阮夏丽

编 写:上海市西南位育中学

出版发行:上海世纪出版股份有限公司  
上海科技教育出版社  
(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)

网 址: [www.sste.com](http://www.sste.com) [www.ewen.cc](http://www.ewen.cc)

经 销:各地新华书店

印 刷:上海市印刷四厂

开 本:787×1092 1/16

字 数:415 000

印 张:18.5

版 次:2012年11月第1版

印 次:2012年11月第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-5428-5512-1/O·804

定 价:38.00元

# 内 容 提 要

---

本书作者根据张景中院士的“中巧说”，即“用一个方法解出一类题目. 也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法”的思想，曾提出过“将解题经验算法化、显性化”的观点，并提出过“解题模块”和“命题联想系统”的算法化、显性化的两个具体做法.

依据这个指导思想，本书挑选了高中数学的部分内容，精心选择、精心编排例题，进行归类研究，并作精心的讲评，力图寻找解题的规律，使之有章可循.

本书凝聚了老中青三代优秀教师的智慧，特别是“抽象函数的解题策略”、“不等式恒成立问题”、“限位排列题的解题模块”、“三角比中常用的组块”、“条件求最值”、“球面距离与‘旗帜三角形’”、“三类存在问题”、“求函数解析式”、“由  $a^2 + b^2 = 1$  联想到的”等文章不落俗套，匠心独运，亮点多多.

本书的对象是高中数学教师，也可供高中学生参考. 本书选取的题大多属于中等或中等偏上的难度，适合高一、高二的教学和高三高考以及高校自主招生考试复习用.

# 序

习题教学是数学教学中的重灾区,学生陷入题海,苦不堪言;教师难于应付,身心疲惫,是到了应该想想办法的时候了.造成这种现象的原因是多方面的,但教师还是可以有作为,并且应该有所作为.

张景中院士十分关注中小学数学,并提出了“教育数学”的思想,他在谈到解题的时候,说过一段精彩的话:“练武功的上乘境界是‘无招胜有招’.但武功仍要从一招一式入门.解题也是如此……这种‘无招胜有招’的境界,就是‘大巧’吧!但是小巧固不足取,大巧也确实太难,对于大多数学子,还要重视有章可循的招式……大巧法无定法,小巧一题一法.中巧呢,则希望用一个方法解出一类题目.也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法.”

笔者把它称为“中巧说”.笔者读了这番话之后,想法很多.

笔者自忖,自己不过是中等资质的人,因此,学习时需要总结类型.笔者从教50年,在进行教学时,也喜欢总结规律.那些大数学家,可能特别聪明,不要记忆,不要总结,仅凭灵感,就可以创造出新的理论来.现在看来并不是如此.原来像一流数学家张景中这样的院士学习解题时也是整理类型,寻找通法,在较高的起点上研究创新.从这个意义上说,通法、类型(模式)与创新是不矛盾的.

张院士的这番话,不但指出了要总结类型,而且要“寻求可以机械执行的方法,即算法”.这是数学教学的一个全新的观点,对改进数学教学意义重大.请注意,这里用了“算法”一词.

算法的特征是什么?笔者理解,或许一是,“什么情况”下该用某种方法——识别;二是当识别结果是“yes”时,解决问题的步骤是怎样的.不少教师也总结规律,但往往达不到这样的深度.

笔者和一些中青年教师曾经一起编写过一本《数学学习题教学研究》<sup>①</sup>(笔者感谢张院士为该书作序),该书就是以“中巧说”为指导思想,探索数学学习题教学的一些原则和做法.

在那本书里,提出了把解题经验**算法化、显性化**的观点,提出了“**解题模块**”和“**命题**

<sup>①</sup> 陈永明名师工作室,《数学学习题教学研究》,上海教育出版社,2010年

**联想系统**”两个算法化、显性化的具体做法。前者是针对“某一类型”的题，寻找它的解题程序。但中学阶段的数学题不完全都有“套路”，譬如平面几何题，这时候，“中巧”可能体现在：你看到题目条件（或定理、法则）时，能够联想到它可以推出哪些新的命题；看到题目的结论时，联想到哪些命题可以推出它——即命题联想系统。笔者认为，这也应该是“中巧”的体现。

本书实际上是《数学习题教学研究》具体化。把高中数学题中某些类型、某些经验，尽量做些规律性、甚至程序化的归纳和点拨，特别是**解题模块、命题联想系统、基本图形的研究、“组块”**的研究等，是本书主要的特色。

“中巧说”可能是丰富多彩的数学解题教学中的一个流派。有同志担心，这样教法，会不会把学生教呆了。有这个担心是很自然的。

落实“中巧说”是一件重要的工作，怎样促使中巧向大巧过渡，是一项更艰巨的工作，需要广大教师和专家进一步研究。

笔者主张寻找解题规律，但不要把规律教死，要引导学生从中巧逐步向大巧过渡，正像有的专家说的：要有套路，又要突破套路。对此我们也有一些思考。

首先我们强调师生共同总结，这样，不但能够让学生掌握某类数学题的解法或思路，而且可以大大提高学生归纳总结的能力。上海老一辈的数学教育家赵宪初先生说过“要先举三反一，才能举一反三”。因此，本书各节的编写，总是先出现一组例题，然后归纳规律（举三反一），然后再出现一些变式例题和练习（举一反三）。

再有，不能把总结出来的东西变成让学生死记硬背的教条，要突出问题及其解法的本质，突出数学思想。

另外，在《数学习题教学研究》中，笔者提出分析解题思路时要“有序分析”，提出了“思考时通法优先，落笔时优法优先”，还提出了“先估后算”、“寻找巧法”等策略。再加上其他的一些行之有效的措施，如一题多解、变式训练、开放题、课题学习，等等，中巧是可以向大巧过渡的。

以上说的，是我们对数学习题教学的一些看法，我们的认识是否正确，工作是否合理，是否到位，有待于广大教师和专家的鉴定，欢迎大家批评指正。

本书没有面面俱到，只是选取了部分专题进行了探讨。

本书选取的题大多属于中等或中等偏上的难度，特别适合高一、高二的教学和高三高考复习用，对于近年来高校自主招生考试也有益处。

本书除了“解”之外，还重视“评”。“评”采取多种形式：

带总结性的议论我们标为“小结”，小一点的点拨标为“讲评”，这些评议，包括了解题模块、命题联想系统的总结，解题思路的点拨，关键点的指出，教学建议，等等。有些小经验我们用箭头在文旁指出。个别文章，还加了“主编的话”。

学习者的疑惑、错解的剖析，我们用“拓展”标注。

习题背景的分析，我们用“链接”标注。

“评”是比“解”本身难得多的工作，特别是关于解题模块和联想系统的总结，由于水平的关系，可能做得还不够。

我国是解题大国，解题经验值得认真总结。在《数学习题教学研究》的基础上，我们还在探索，本书提出的“组块”的概念，提出的“非逻辑联想”，就是一些新的心得。

笔者年事已高,虽然本书定名为《陈永明讲评数学题》,其实本人负责策划、审稿和统稿,各篇均由上海市西南位育中学的优秀中青年教师执笔(华东理工大学附中部分教师也参与了一些工作),最后由经验丰富的老专家陆云庭老师审读全部书稿.执笔者都十分认真,许多稿子都经过了五六遍的修改,才得以定稿,整个编写过程历时一年之久.编写过程中,本书副主编、中国教育数学学会理事、西南位育中学数学教研组长阮夏丽老师做了大量的工作,还得到了西南位育中学张建中校长、华东理工大学附中童立贤校长的大力支持.在此,对我的合作者,表示感谢.

陈永明

2012年10月于上海

时年七十又二

# 目 录

---

## 一、代数

1. 闭区间上二次函数的最值问题 ..... 1
2. 函数图像变换 ..... 9
3. 复合函数的单调性 ..... 19
4. 函数的值域 ..... 25
5. 基本图形：“耐克函数”的图像 ..... 35
6. 求函数解析式 ..... 48
7. 抽象函数题的解题策略 ..... 52
8. 抽象函数题的若干类型 ..... 63
9. 一元二次方程实根分布 ..... 70
10. 基本不等式及其下游命题 ..... 78
11. 不等式恒成立问题 ..... 86
12. 等差数列的下游命题 ..... 96
13. 数列求和的常用方法 ..... 107
14. 等差数列与等比数列的类比 ..... 116
15. 等差数列前  $n$  项和的最值 ..... 121
16. 由数列递推关系求通项公式 ..... 128
17. 共轭复数的性质及其下游命题 ..... 134
18. 限位排列题的解题模块 ..... 138

## 二、三角

1. 三角化简和求值 ..... 143
2. 三角中的“1”的联想 ..... 150
3. 倍角公式及其下游命题 ..... 156
4. 三角比中常用的“组块” ..... 165
5. 基本图形： $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的图像 ..... 171



### 三、解析几何

1. 基本图形:二次曲线与直线相交 ..... 183
2. 基本图形:焦点三角形 ..... 194
3. 圆锥曲线中的对称问题 ..... 203
4. 二次曲线中距离的最值 ..... 211
5. 条件求最值问题 ..... 219

### 四、立体几何

1. 空间角的求法 ..... 227
2. 空间向量在空间距离度量中的应用 ..... 233
3. 空间向量在空间角度量中的应用 ..... 240
4. 空间向量在线面位置关系证明中的应用 ..... 248
5. 立体几何中的共点、共线、共面问题 ..... 255
6. 球面距离和“旗帜三角形” ..... 260

### 五、综合

1. 三类存在性问题 ..... 266
2. 由  $a^2 + b^2 = 1$  联想到的 ..... 279

# 一、代 数



## 1. 闭区间上二次函数的最值问题<sup>①</sup>

在高中阶段,函数的最值问题是一类常见问题,其中许多函数的最值问题都能化归为闭区间上二次函数的最值问题,因此有必要单独进行研究.

**例 1** (1) 求函数  $f(x)=x^2-4x-1, x \in [1,4]$  的最值;

(2) 求函数  $f(x)=x^2-4x-1, x \in [4,5]$  的最值;

(3) 求函数  $f(x)=x^2-4x-1, x \in [-1,1]$  的最值.

**解** (1) 因为二次项系数等于 1(大于 0),所以抛物线开口向上.

因为对称轴为直线  $x=2$ ,所以  $f(x)$  在  $[1,2]$  上单调递减,在  $[2,4]$  上单调递增(如图 1-1-1).

所以  $f(x)_{\min}=f(2)=-5$ ,

$f(x)_{\max}=\max\{f(1), f(4)\}=-1$ .

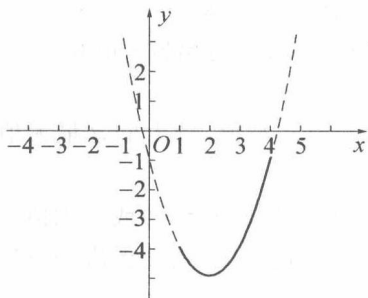


图 1-1-1

有人认为: 因为  $f(1)=-4$ ,  $f(4)=-1$ , 而  $f(1) < f(4)$ , 所以  $f(x)_{\min}=f(1)=-4$ ,  $f(x)_{\max}=f(4)=-1$ . 其实只比较两 endpoints 是不够的, 还须考虑顶点.

(2) 因为二次项系数等于 1(大于 0),所以抛物线开口向上.

<sup>①</sup> 本文执笔:徐迪斐



因为对称轴为直线  $x=2$ , 所以  $f(x)$  在  $[4, 5]$  上单调递增(如图 1-1-2).

所以

$$f(x)_{\min} = f(4) = -1,$$

$$f(x)_{\max} = f(5) = 4.$$

(3) 因为二次项系数等于 1(大于 0), 所以抛物线开口向上.

因为对称轴为直线  $x=2$ , 所以  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调递减(如图 1-1-3).

所以

$$f(x)_{\min} = f(1) = -4,$$

$$f(x)_{\max} = f(-1) = 4.$$

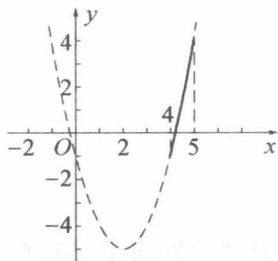


图 1-1-2

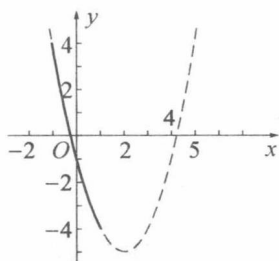


图 1-1-3

**讲评** 这是闭区间上二次函数最值问题中最简单的一类——已知具体的二次函数解析式及定义域<sup>①</sup>, 求二次函数最值, 也是其他衍生问题的基础. 解此类题的基本方法是利用函数图像, 即数形结合思想.

二次函数在闭区间  $[p, q]$  上的最值只有两种可能: (1) 端点函数值; (2) 顶点函数值. 何时取到最值仅受两个因素的制约: (1) 开口方向; (2) 对称轴与闭区间的位置关系. 数形结合的目的就是根据闭区间上二次函数的图像从端点和顶点中找到最值.

第一类问题  $\xrightarrow{\text{数形结合}}$  找到最值

在解这类问题时, 可以遵循以下步骤完成:

第一步: 根据开口方向、对称轴, 画出闭区间上二次函数图像.

第二步: 根据闭区间上二次函数图像, 从顶点和两个端点中选出最大值和最小值.

这里有两类情况:

(1) 对称轴在闭区间外, 此时端点函数值较小的为最小值, 较大的是最大值(如图 1-1-2 和 1-1-3).

(2) 对称轴在闭区间上, 此时顶点函数值为最小值(开口向上时)或最大值(开口向下时), 距离对称轴较远的端点函数值为最大值(开口向上时)或最小值(开口向下时)(如图 1-1-1).

第三步: 当对称轴经过闭区间两端时, 使用第二步中的(1)、(2)两法均可.

<sup>①</sup> 本文所有定义域如无特别说明均为闭区间.

**例 2** 求函数  $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \in [1, a]$  的最值.

**分析** 本题和例 1 的区别在于闭区间是含参数的. 尽管二次函数解析式是确定的, 但闭区间右端点的变化, 将会导致上述步骤的第二步中的两类情况均可能出现, 因此需要分类讨论. 我们需要讨论右端点  $a$  的取值与对称轴  $x=2$  的关系, 因为它决定了二次函数的最小值在顶点取到还是在端点取到; 我们还要讨论  $a$  与左端点关于对称轴的对称点  $x=3$  之间的关系, 因为它决定了二次函数的最大值是在左端点取到还是在右端点取到.

**解** 因为二次项系数等于 1 (大于 0), 所以抛物线开口向上.

因为图像的对称轴为直线  $x=2$ , 所以左端点 1 关于对称轴的对称点是 3.

对  $a$  (隐含  $a > 1$ ) 的取值进行分类讨论:

(1) 当  $1 < a \leq 2$  时,  $f(x)$  在  $[1, a]$  上单调递减 (如图 1-1-4),

所以

$$f(x)_{\min} = f(a) = a^2 - 4a - 1,$$

$$f(x)_{\max} = f(1) = -4;$$

(2) 当  $2 < a \leq 3$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 在  $[2, a]$  上单调递增, 左端点距离对称轴较远 (如图 1-1-5),

所以

$$f(x)_{\min} = f(2) = -5,$$

$$f(x)_{\max} = \max(f(1), f(a)) = f(1) = -4;$$

(3) 当  $a > 3$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 在  $[2, a]$  上单调递增, 右端点距离对称轴较远 (如图 1-1-6),

所以

$$f(x)_{\min} = f(2) = -5,$$

$$f(x)_{\max} = \max(f(a), f(1)) = f(a) = a^2 - 4a - 1.$$

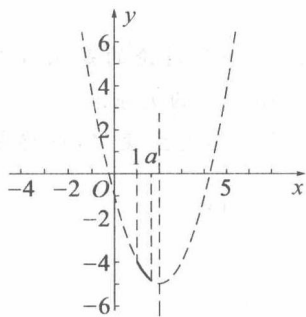


图 1-1-4

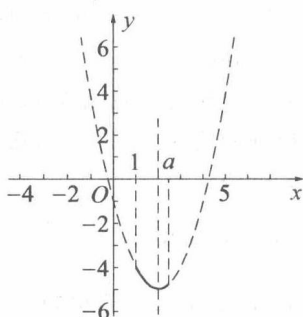


图 1-1-5

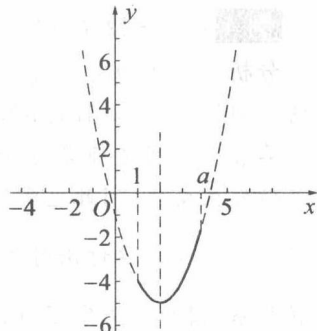


图 1-1-6

### 拓展

有人这样解: 当  $1 < a \leq 2$  时,

$$f(x)_{\min} = f(a) = a^2 - 4a - 1, f(x)_{\max} = f(1) = -4;$$

当  $a > 2$  时,

$$f(x)_{\min} = f(2) = -5, f(x)_{\max} = f(a) = a^2 - 4a + 1.$$

对吗?

从图 1-1-5, 1-1-6 可知,  $a < 3$  和  $a > 3$  时, 函数的最大值是不同的, 所以这个解法不正确. 由此可见, 左端点 1 关于图像对称轴的对称点 3, 是分类讨论时重要的关键点.



**例 3** 若函数  $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \in [1, a]$  的最小(或大)值为  $f(a)$ , 求  $a$  的取值范围.

**分析** 变式是例 2 的逆向应用, 根据例 2 的结果易获得解答, 但需注意讨论的节点处是否符合条件.

**解** 由例 2 解答过程可知:

$$f(x)_{\min} = \begin{cases} f(a) = a^2 - 4a - 1, & 1 < a \leq 2, \\ f(2) = -5, & a > 2; \end{cases}$$

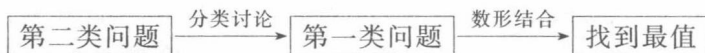
$$f(x)_{\max} = \begin{cases} f(1) = -4, & 1 < a < 3, \\ f(a) = a^2 - 4a - 1, & a \geq 3, \end{cases}$$

所以当最小值为  $f(a)$  时,  $1 < a \leq 2$  (如图 1-1-4);

当最大值为  $f(a)$  时,  $a \geq 3$  (如图 1-1-6).

**讲评** 这是闭区间上二次函数最值问题中的第二类——已知具体的二次函数解析式及含参定义域, 求二次函数最值. 解此类题的数学思想是分类讨论和数形结合.

分类讨论的目的是将第二类问题分割化归为若干个第一类问题.



分类讨论的要点是, 首先考虑“对称轴横坐标在闭区间内还是外”; 如果对称轴横坐标在闭区间内, 那么还要考虑“闭区间的两个端点到对称轴距离的大小关系”.

**例 4** 求函数  $f(x) = x^2 - ax - 1, x \in [1, 4]$  的最值.

**分析** 本题和例 1 的区别在于函数解析式中含有参数, 因此要分类讨论的是函数图像的不同情况. 而这种讨论的本质是讨论可变的对称轴和固定的闭区间的关系.

尽管闭区间是确定的, 但对称轴的变化, 也会使闭区间内图像形态发生变化, 最终导致最值发生变化, 因此也需要分类讨论.

我们不仅需要讨论对称轴  $x = \frac{a}{2}$  与闭区间  $[1, 4]$  的位置关系, 因为它决定了顶点函数值能否成为最小值; 也要讨论对称轴  $x = \frac{a}{2}$  与闭区间  $[1, 4]$  中点  $x = \frac{5}{2}$  的关系, 因为它决定了二次函数的最大值是在左端点取到还是右端点取到.

**解** 由已知可知二次函数图像开口向上, 对称轴为直线  $x = \frac{a}{2}$ . 闭区间  $[1, 4]$  的中点是  $x = \frac{5}{2}$ .

(1) 当  $\frac{a}{2} \leq 1$  即  $a \leq 2$  时,  $f(x)$  在  $[1, 4]$  上单调递增 (如图 1-1-7),

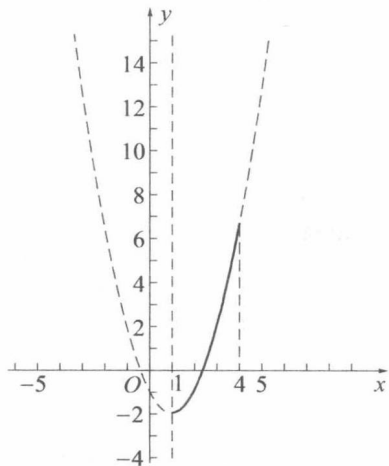


图 1-1-7

所以

$$f(x)_{\min} = f(1) = -a,$$

$$f(x)_{\max} = f(4) = 15 - 4a.$$

(2) 当  $1 < \frac{a}{2} \leq \frac{5}{2}$  即  $2 < a \leq 5$  时,  $f(x)$  在  $[1, \frac{a}{2}]$  上单调递减, 在  $[\frac{a}{2}, 4]$  上单调递增,

且右端点距离对称轴较远(如图 1-1-8),

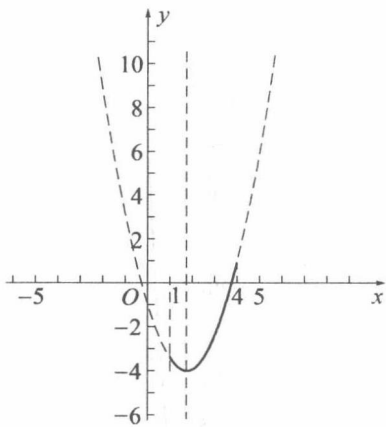


图 1-1-8

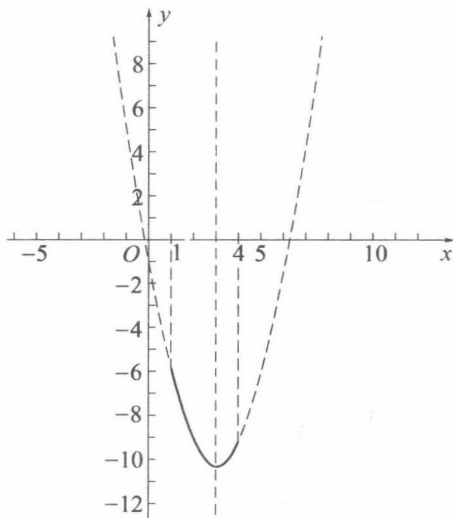


图 1-1-9

所以  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - 1,$

$$f(x)_{\max} = \max(f(1), f(4)) = f(4) = 15 - 4a.$$

(3) 当  $\frac{5}{2} < \frac{a}{2} \leq 4$  即  $5 < a \leq 8$  时,  $f(x)$  在  $[1, \frac{a}{2}]$  上单调递减, 在  $[\frac{a}{2}, 4]$  上单调递增, 且左端点距离对称轴较远(如图 1-1-9),

所以  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - 1,$

$$f(x)_{\max} = \max(f(1), f(4)) = f(1) = -a.$$

(4) 当  $\frac{a}{2} > 4$  即  $a > 8$  时,  $f(x)$  在  $[1, 4]$  单调递减(如图 1-1-10),

所以  $f(x)_{\min} = f(4) = 15 - 4a,$

$$f(x)_{\max} = f(1) = -a.$$

**例 5** 求函数  $f(x) = ax^2 - 4x - 1, x \in [1, 4]$

的最值.

**解** 1. 当  $a=0$  时, 一次函数  $f(x)$  在  $[1, 4]$  上单调递减(如图 1-1-11),

所以  $f(x)_{\min} = f(4) = 16a - 17 = -17,$

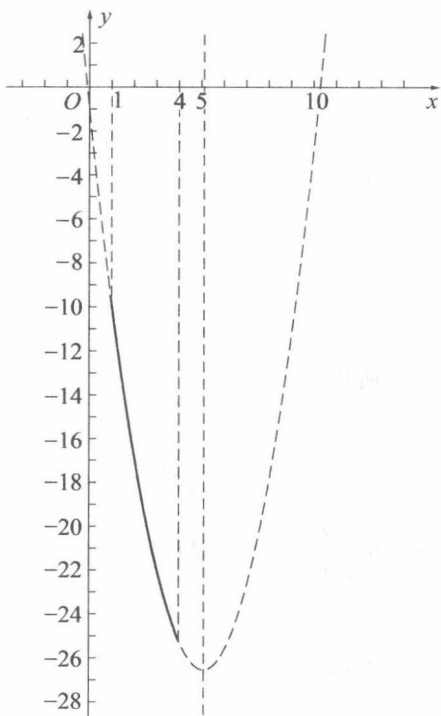


图 1-1-10



$$f(x)_{\max} = f(1) = a - 5 = -5.$$

2. 当  $a \neq 0$  时, 二次函数  $f(x)$  开口方向未知, 对称轴为直线  $x = \frac{2}{a}$ .

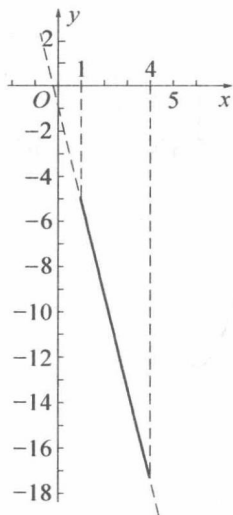


图 1-1-11

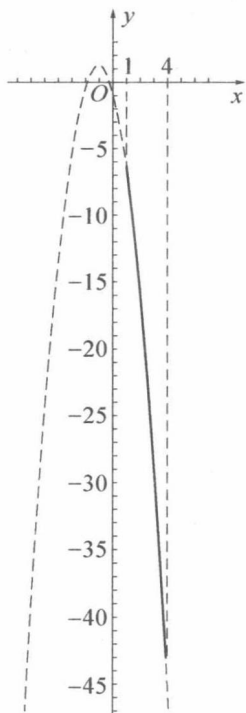


图 1-1-12

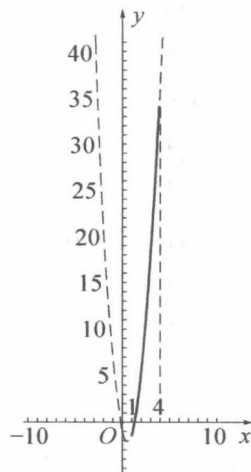


图 1-1-13

(1) 当  $a < 0$  时,  $\frac{2}{a} < 1$ ,  $f(x)$  在  $[1, 4]$  上单调递减 (如图 1-1-12),

所以

$$f(x)_{\min} = f(4) = 16a - 17,$$

$$f(x)_{\max} = f(1) = a - 5.$$

(2) 当  $a > 0$  时,

① 当  $\frac{2}{a} < 1$  即  $a > 2$  时,  $f(x)$  在  $[1, 4]$  上单调递增 (如图 1-1-13),

所以

$$f(x)_{\min} = f(1) = a - 5,$$

$$f(x)_{\max} = f(4) = 16a - 17.$$

② 当  $1 < \frac{2}{a} < \frac{5}{2}$  即  $\frac{4}{5} < a < 2$  时,  $f(x)$  在  $[1, \frac{2}{a}]$  上单调递减, 在  $[\frac{2}{a}, 4]$  上单调递增, 且右端点距离对称轴较远 (如图 1-1-14),

所以

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{4}{a} - 1,$$

$$f(x)_{\max} = f(4) = 16a - 17.$$

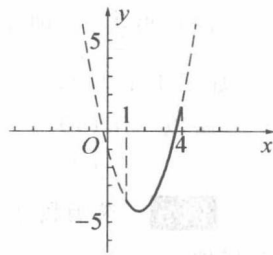


图 1-1-14

③ 当  $\frac{5}{2} < \frac{2}{a} < 4$  即  $\frac{1}{2} < a < \frac{4}{5}$  时,  $f(x)$  在  $[1, \frac{2}{a}]$  上单调递减, 在  $[\frac{2}{a}, 4]$  上单调递增,



且左端点距离对称轴较远(如图 1-1-15),

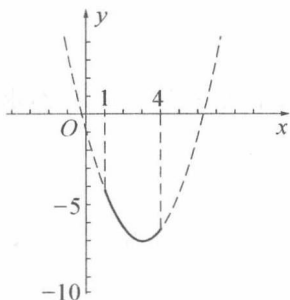


图 1-1-15

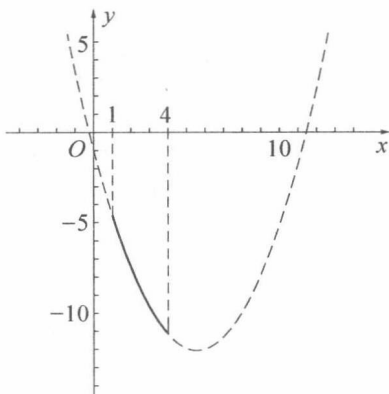


图 1-1-16

所以

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{4}{a} - 1,$$

$$f(x)_{\max} = f(1) = a - 5.$$

④ 当  $\frac{2}{a} > 4$  即  $0 < a < \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  在  $[1, 4]$  上单调递减(如图 1-1-16),

所以

$$f(x)_{\min} = f(4) = 16a - 17,$$

$$f(x)_{\max} = f(1) = a - 5.$$

**讲评** 这是闭区间上二次函数最值问题中的第三类——已知含参二次函数解析式及具体定义域,求二次函数最值.解此类题的数学思想仍然是分类讨论和数形结合.

分类讨论的目的,仍是将问题化归为若干个第一类问题.与第二类不同的是,此类函数解析式含参数,因此图像也在发生变化,当参数位于二次项系数时,除了讨论对称轴之外,还需对开口方向甚至函数类型进行讨论.



分类讨论可以遵循以下思考顺序:

第一步:讨论开口方向;

第二步:在明确的开口情况下,讨论对称轴横坐标与闭区间端点的关系;

第三步:在对称轴横坐标在闭区间内的情况下,讨论对称轴横坐标与闭区间中点的关系.

除此之外,二次函数的最值问题还可能变化出以下两类问题,不过解决方法类似,读者可继续探索.如“已知含参二次函数解析式及含参定义域,求二次函数最值”、“非闭区间上二次函数的最值问题”等.





..... 练 习 .....

1. 求函数  $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$  的最值.
2. 已知  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  在区间  $[0, a]$  上的最大值为 3, 最小值为 2, 求  $a$  的取值范围.
3. 已知  $|x| \leq 1$ , 求  $f(x) = x^2 - 2ax + a$  的最小值  $g(a)$ .
4. 已知  $f(x) = x^2 - ax + \frac{a}{2}$  ( $a > 0$ ) 在区间  $[0, 1]$  上的最小值为  $g(a)$ , 求  $g(a)$  的最大值.
5. 根据下列条件, 求参数  $a$  的值:
  - (1) 函数  $f(x) = -x^2 + 2ax + 1 - a$  在区间  $[0, 1]$  上有最大值 2;
  - (2) 函数  $f(x) = ax^2 + 4ax + 3$  在区间  $[-4, 2]$  上有最大值 7.



..... 答 案 .....

1. 当  $x = -1$  时,  $f(x)_{\max} = 2$ ; 当  $x = -3$  或  $1$  时,  $f(x)_{\min} = 0$
2.  $a \in [1, 2]$
3. 当  $a \in (-\infty, -1]$  时,  $g(a) = f(-1) = 1 + 3a$ ; 当  $a \in (-1, 1)$  时,  $g(a) = f(a) = -a^2 + a$ ; 当  $a \in [1, +\infty)$  时,  $g(a) = f(1) = 1 - a$
4.  $g(a)_{\max} = \frac{1}{4}$
5. (1)  $a = -1$  或  $2$  (2)  $a = -1$  或  $\frac{1}{3}$