高等代数

◎ 左连翠　编著

科学出版社

高 等 代 数

左连翠　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是高等代数课程的教材，是作者在讲授近三十年高等代数课程的基础上编写而成的. 内容包括行列式、线性方程组、矩阵、多项式、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间等. 本书紧扣“矩阵”这条主线，详细讲解所有重要的知识点，在每一节中精心配备例题与习题，并使之前后呼应.

本书可以作为综合性大学、高等师范大学数学系、应用数学系、信息与计算科学系学生高等代数课程的教材或者教学参考书，也可作为青年教师、数学工作者的教学参考书或学习用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等代数/左连翠编著. —北京：科学出版社，2016.7

ISBN 978-7-03-049367-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①左… Ⅲ. ①高等代数 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 159998 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：白 洋 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张：25 1/2
字数：514 000

定价：59.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

高等代数是高等院校数学专业重要的基础课程之一, 在教学计划中属于关键性的课程, 与数学分析、解析几何、常微分方程、抽象代数、泛函分析、概率论与数理统计、运筹学、图论、组合数学等其他数学课程都有密切的联系. 编写一部符合现代科学发展的、合格的高等代数教材, 无疑是一项非常重要的工作.

高等代数作为传统的大学课程, 其内容是相对稳定的, 主要由多项式与线性代数两部分组成. 线性代数是讨论代数学中线性关系经典理论的课程, 它具有较强的抽象性与逻辑性. 它不但是高等代数的重要内容, 而且是高等学校工科类和经济类各专业的一门重要的基础理论课. 由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域, 而某些非线性问题在一定条件下, 可以转化为线性问题, 因此本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科. 尤其在计算机日益普及的今天, 该课程的地位与作用更显得重要. 本书主要讲授行列式、线性方程组、矩阵、多项式、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间等内容.

鉴于目前各高校专业课的课时相对较少, 我们建议在能够给出 156 左右课时的班级, 可给各章节（包括习题课）分配如下：第 1 章行列式 18 课时, 第 2 章线性方程组 18 课时, 第 3 章矩阵 18 课时, 第 4 章多项式 22 课时, 第 5 章二次型 12 课时, 第 6 章线性空间 20 课时, 第 7 章线性变换 22 课时, 第 8 章欧几里得空间 20 课时. 剩余的课时可用于期中考试和期末复习.

中科院院士、原中国科技大学校长朱清时教授曾经说过:“在我看来, 完美的教材首先应该连外行人都能够读下去.” 我们撰写本书的出发点就是希望将抽象的内容具体化，尽量做到“易读易教”. 鉴于高等代数这门课程比较抽象, 初学者掌握起来有一定的困难, 我们尽可能降低知识起点、讲解详细、推理完整, 并在引入概念及证明了定理之后, 安排相应的一些例题与后面的习题交相呼应，供大家学习、理解. 习题配备上也搭配基本练习题和思路拓宽题两部分, 前者一般着眼于对本节内容的理解、掌握, 而后者侧重于对整章内容的融会贯通以及与前面章节的联系. 有的章节后面习题比较多，可以适当布置一些习题作为作业，另一部分习题作为习题课内容为学生讲解，剩下的可以供学生课下练习.

为了更好地提高高等代数教学的课堂效果, 我们希望在每一章增加两次习题课. 习题课教案中, 第一部分是前几次课重要知识点的总结, 第二部分是相关的典型例题与范例分析, 特别强调与前面各章节联系的综合性题目. 值得注意的是, 高等代数作为数学专业的基础课, 由于其比较抽象并且非常重要, 课堂上需要详细讲

解、严格推理.

本书可以作为综合大学、高等师范大学数学系、应用数学系、信息与计算系大学生高等代数课程的教材或者教学参考书, 对于青年教师、数学工作者本书也是很好的教学参考书或学习用书.

感谢天津师范大学教务处的领导, 她们为本书的出版提供了强有力的支持. 也感谢我的同事王延新老师、王喜尧老师和胡志广老师, 他们为本书的编写提供了很多有益的建议. 最后, 感谢科学出版社的王静编辑, 她为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动.

限于编者水平, 书中不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正.

左连翠

2015 年 12 月于天津

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是从解线性方程组的过程中抽象出来的, 由于它在理论推导中占有非常重要的地位, 从而广泛应用于许多科学领域.

本章介绍 n 阶行列式的定义, 并讨论 n 阶行列式的性质和计算, 然后利用 n 阶行列式来讨论一类特殊的 n 元线性方程组的求解问题.

作为准备, 先给出集合、映射和数域的概念.

1.1 集合与映射

集合和映射在中学中已经学过，是数学中两个最基本的概念，本节来回顾一下这些概念及其简单性质. 熟悉这些基本概念不但对于高等代数的学习是必要的, 而且对于其他数学学科的学习也是不可缺少的.

1.1.1 集合

所谓集合就是指表示一定事物的集体. 给定一个集合，就要说清楚它究竟由哪些元素组成. 例如, 一班学生、一队解放军、一组自然数等. 在几何中, 把点看作基本的对象, 这样, 一条直线段就是一个由点组成的集合；一条曲线、一个平面也都是由一些点组成的集合. 一般地, $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集, 它们都是数的集合. 组成集合的事物称为集合的元素, 用 $a \in M$ 表示 a 是 M 中的元素, 读为: a 属于 M; 用 $a \notin M$ 表示 a 不是集合 M 的元素, 读为: a 不属于 M.

1. 集合的表示法

集合的表示法有两种, 一种是列举法, 即列举出它全部的元素, 例如, $M = \{1, 2, 3\}$ 就是由 $1, 2, 3$ 组成的集合; 另一种是给出集合中全体元素的特征性质, 如全体偶数组成的集合 $\{x|x = 2n, n \text{ 为任意整数}\}$, 此法称为描述法, 一般形式为 $\{x|p(x)\}$, 其中 x 表示集合中的元素, $p(x)$ 表示这些元素所具有的共同属性, 如 $\{n|n\text{为奇数}\}$ 表示所有奇数构成的集合. 含有无穷多个元素的集合不能用列举法, 而只能用描述法. 如在平面上取定直角坐标系 Oxy, 平面上的点和实数的二元有序数组 (x, y) 建立起一一对应关系，以 O 为圆心的单位圆上全体点所成的集合可用

$$S = \{(x, y)|x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

来表示. 不包含任何元素的集合称为空集 $\varnothing$, 如集合 $\{x \in \mathbf{R} | x^2 = -1\}$ 就是空集.

2. 子集

设 A, B 是两个集合, 如果 A 的每一个元素都是 B 的元素, 那么就说 A 是 B 的一个子集, 记作 $A \subseteq B$(读作 A 包含于 B), 或记作 $B \supseteq A$（读作 B 包含 A）. 显然 $A \subseteq B \Longleftrightarrow$“对于任意的 $x \in A \Longrightarrow x \in B$”. 一个集合总是它自己的子集, 而空集是任意集合的子集, 即 $A \subseteq A, \varnothing \subseteq A$.

真子集: 若 $A \subseteq B$, 且至少有一个元素 $x \in B$ 但 $x \notin A$, 则称 A 是 B 的一个真子集, 记作 $A \subsetneqq B$ 或 $A \subset B$.

显然 $A \subsetneqq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且存在 $x \in B, x \notin A$.

如果集合 A 与 B 是由完全相同的元素组成的, 即凡属于 A 的元素都属于 B, 同时凡属于 B 的元素也都属于 A, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

$A = B \Longleftrightarrow$“对于任意的 $x: x \in A \Longleftrightarrow x \in B$”$\Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

3. 集合的运算

由集合 A 与 B 的一切公共元素所组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

如 $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

显然 $A \cap B \subseteq A, B$.

由 A 中的一切元素和 B 中的一切元素所组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$.

如 $A = \{2n | n \in \mathbf{N}\}, B = \{2n+1 | n \in \mathbf{N}\}$, 则 $A \cup B = \mathbf{N}$.

显然 $A \cup B \supseteq A, B$.

例 1 证明 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

证明 易知, 对于任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$, 有 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 那么 $x \in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 之一. 若 $x \in B$, 则因为 $x \in A$, 所以 $x \in A \cap B$; 同样, 若 $x \in C$, 则 $x \in A \cap C$. 从而 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 故有

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1}$$

反之, 若 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$, 那么 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或 $x \in A$ 且 $x \in C$. 但 $B \subseteq B \cup C, C \subseteq B \cup C$, 故总有 $x \in A \cap (B \cup C)$, 即

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C). \tag{2}$$

由 (1), (2) 得 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

例 2 设 A 是含有 n 个元素的集合, 用 2^A 表示 A 的所有子集所组成的集合, 叫做 A 的幂集. 证明 2^A 含有 2^n 个不同的元素.

证明 空集 $\varnothing$ 是 A 的一个子集, A 中含 k 个元素的子集共有 C_n^k 个, $k=1,2,\cdots,n$, 所以 A 的一切子集的个数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

从集合 A 中去掉包含于集合 B 中的那些元素之后剩下的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A\setminus B$. 集合 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A\Delta B$.

例 3 设 $A=\{1,2,3,4,5\},B=\{4,5,6,7,8\}$, 则 $A\setminus B=\{1,2,3\}$, $A\Delta B=\{1,2,3,6,7,8\}$.

1.1.2 映射

1. 映射的概念

设 M 与 M' 是两个非空集合, 所谓集合 M 到集合 M' 的一个映射就是指一个法则, 对于 M 中每一个元素 a, 都有 M' 中一个确定的元素 a' 与之对应; 若映射 σ 使 $a'\in M'$ 与 $a\in M$ 对应, 就记为 $\sigma(a)=a'$, 并称 a' 为 a 在映射 σ 下的像, 而 a 称为 a' 在映射 σ 下的一个原像. M 到 M 自身的映射, 有时也称为 M 到自身的变换.

注 (1) 任何一个映射都是由定义域、值域与合乎要求的法则这三个要素构成, “三位一体, 缺一不可”.

(2) M 与 M' 可以是相同集合.

(3) M 中每一个元素 (缺一不可) 在 M' 中都有像.

(4) 每个 x 在 M' 中的像必须是唯一确定的.

(5) 一般地, M' 中的元素未必都是 M 中元素的像.

(6) M 中不同元素在 M' 中的像可能相同, 也可能不同.

(7) 集合 M 到集合 M' 的两个映射 σ 与 τ 称为相等的, 如果对于任意的 $a\in M$, 都有 $\sigma(a)=\tau(a)$.

例 4 $M=\mathbf{N},M'=\{2n|n\in\mathbf{N}\},\sigma:M\to M',n\to 2n$ 为一个映射.

例 5 设 $M=\mathbf{N},M'=[-1,1]$, 令

$$\sigma(a)=\begin{cases}\sin a, & a\text{是一个偶数},\\ \cos a, & a\text{是一个奇数},\end{cases}$$

则 σ 是一个映射.

例 6 设 M 为一个非空集合, $\sigma(a)=a,a\in M$, 称为集合 M 的恒等映射, 或单位映射, 记为 I_M 或 I.

例 7 任意一个定义在全体实数上的实函数 $y=f(x)$ 都是实数集到自身的映射, 所以函数可看作映射的一种特殊情形.

例 8　设 $A=[-\pi/2,\pi/2], B=\mathbf{R}$, 则 $f: x \to \tan(x)$ 不是 A 到 B 的映射, 因为 $f(-\pi/2)$, $f(\pi/2)$ 都无意义.

2. 映射的合成(乘法)

设 σ, τ 分别是集合 M 到 M', M' 到 M'' 的映射, 乘积 $\tau\sigma$ 定义为 $\tau\sigma(a)=\tau(\sigma(a)), a \in M$, 即相继施行 σ 和 τ 的结果, $\tau\sigma$ 是 M 到 M'' 的一个映射.

例 9　设 $\sigma: \mathbf{R} \to [-1,1], x \mapsto \sin x$, $\tau: [-1,1] \to [0,1], y \mapsto y^2$, 则 σ 与 τ 的合成映射是 $\tau\sigma: \mathbf{R} \to [0,1], x \mapsto \sin^2 x$.

对于 M 到 M' 的任一映射 σ, 显然有 $I_{M'}\sigma=\sigma I_M=\sigma$.

映射的乘法适合结合律: 设 σ, τ, φ 分别是集合 M 到 M', M' 到 M'', M'' 到 M''' 的映射, 则 $(\varphi\tau)\sigma=\varphi(\tau\sigma)$. 等式两端显然都是 M 到 M''' 的映射, 要证它们相等, 只需证明它们对于 M 中每个元素的作用都相同, 即证明 $[(\varphi\tau)\sigma](a)=[\varphi(\tau\sigma)](a)$. 对于任意的 $a \in M$, 由定义,

$$[(\varphi\tau)\sigma](a)=(\varphi\tau)(\sigma(a))=\varphi(\tau(\sigma(a))),$$

$$[\varphi(\tau\sigma)](a)=\varphi((\tau\sigma)(a))=\varphi(\tau(\sigma(a))),$$

从而 $(\varphi\tau)\sigma=\varphi(\tau\sigma)$.

3. 单射、满射、双射

设 σ 是集合 M 到 M' 的一个映射, 用 $\sigma(M)$ 表示 M 在映射 σ 之下像的全体, 称为 M 在映射下的像集合. 显然 $\sigma(M) \subseteq M'$. 如果 $\sigma(M)=M'$, 则称 σ 为满射, 或映上的.

如例 4 中的 σ、例 6 中的 σ 及例 9 中的 $\sigma,\tau,\tau\sigma$ 均为满射.

如果在 σ 之下, M 中不同元素的像也不同, 即由 $a_1 \neq a_2$ 能够推出 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$, 则映射 σ 称为单射或 1-1 的.

如例 4 中的映射、例 5 中的 σ 和例 6 中的映射都是单射. 例 9 中的 σ,τ 均非单射.

既是单射，又是满射的映射称为双射，也叫一一对应.

如例 4 和例 6 中的映射均为双射.

对于有限集合 (含有限个元素的集合) 来说, 两个集合之间存在双射当且仅当它们所含元素的个数相同. 于是对于有限集合 M 及其真子集 $M' \neq M$, M 与 M' 之间就不能建立双射; 对于无限集合就不一定, 如例 4 中的映射是一个双射, 但 M' 为 M 的一个真子集.

对于 M 到 M' 的一个双射 σ, 可定义它的逆映射, 记为 σ^{-1}. 因为 σ 是满射, 所以 M' 中每个元素都有原像; 又因为 σ 是单射, 所以 M' 中每个元素只有一个原

像. 若 $\sigma(a)=a'$, 则定义 $\sigma^{-1}(a')=a$. 显然 σ^{-1} 是 M' 到 M 的一个双射, 并且 $\sigma^{-1}\sigma=I_M, \sigma\sigma^{-1}=I_{M'}$.

不难证明, 若 σ,τ 分别是 M 到 M', M' 到 M'' 的双射, 则 $\tau\sigma$ 是 M 到 M'' 的一个双射.

习　题　1.1

1. 设 $M=\{a+b\sqrt[3]{5}|a,b$ 为任意整数 $\}$. 证明: $\sqrt[3]{25}$ 不属于 M, $\sqrt[3]{40}$ 属于 M.

2. 设 $M=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a,b \text{ 为给定的正实数}\right\}$.

证明: (1)$(a+b,0)$ 不属于 M; (2)$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 属于 M.

3. 求集合 M 与 M' 的交与并: M={全体有理数}, M'={全体无理数}.

4. 设 A,B 是两个集合, 证明 $A=B \Longleftrightarrow A\cap B=A\cup B \Longleftrightarrow A\Delta B=\varnothing$.

5. 证明: 若对于三个集合 A,B,C, 有

$$A\cup B=A\cup C,\quad A\cap B=A\cap C,$$

则必有 $B=C$.

6. 设 A,B,C 是三个集合, 证明

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

7. 设 M 为有理数集, M' 为整数集, 问下列各法则是否为 M 到 M' 的映射? 是否为单射或满射?

(1) φ_1: 分数 $\dfrac{b}{a}\longrightarrow a+b$;

(2) φ_2: 既约分数 $\dfrac{b}{a}\longrightarrow a+b$, 其中 $a>0$.

8. 试在闭区间 $[0,1]$ 与 $[a,b](a<b)$ 间建立一个双射.

9. 设 φ 是集合 A 到 B 的一个双射, $a\in A, b\in B$, 问: $\varphi^{-1}[\varphi(a)]=$? $\varphi[\varphi^{-1}(b)]=$?

1.2　数　域

代数中数占有非常重要的地位, 特别是满足某些条件的数集将贯穿于这门课的始终. 先给出几个重要的概念.

1.2.1　数环

由数构成的集合, 称为数集. 本节遇到的集合都是数集.

定义 1　设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集, 如果对于 S 中任意两个数 a,b, 都有 $a+b, a-b, ab\in S$, 则称 S 是一个数环.

若数集 S 中的任二数作某一运算的结果仍在 S 中, 则称 S 对此运算封闭.

注　(1) 对加、减、乘都封闭的非空复数集称为一个数环.

(2) 任一数环均包含数 0.

例如, 整数集是一个数环, 称为整数环, 并用 $\mathbf{Z}$ 来表示. 又如全体偶数（包括正、负及 0）也构成一个数环.

同样, 容易证明有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 都是数环.

例 1　取定 $a \in \mathbf{Z}$, 令 $S = \{na|n \in \mathbf{Z}\}$, 则 S 为一个数环.

证明　对于任意的 $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}, n_1a \pm n_2a = (n_1 \pm n_2)a \in S, (n_1a)(n_2a) = (n_1n_2a)a \in S$. 故 S 为一个数环.

特别地, $a = 2$ 时, $S = 2\mathbf{Z}$ 为偶数环. $a = 0$ 时, $S = \{0\}$ 为最小的数环.

所有奇数构成的集合不是数环 (因为它对加、减不封闭).

1.2.2　数域

定义 2　设 F 是一个数环, 如果

(1) F 内含有一个不等于零的数,

(2) 对于任意的 $a, b \in F$, 且 $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} \in F$,

则F 称为一个数域.

注　(1) 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 都封闭的、包含非零元素的数集称为一个数域.

(2) 任何数域均包含 0, 1 这两个数.

例 2　有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 均构成数域, 而整数集 $\mathbf{Z}$、自然数集 $\mathbf{N}$ 都不是数域.

例 3　令 $F = \{a + b\sqrt{2}|a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则 F 是一个数域.

证明　首先, 容易证明 F 构成一个数环 (对加、减、乘封闭).

其次, 这个数集中显然有不等于零的数, 因为 $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in F$, 即 (1) 成立.

又设 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$, 则 $a_2 - b_2\sqrt{2} \neq 0$; 否则, 即 $a_2 - b_2\sqrt{2} = 0$, 若 $b_2 = 0$, 则 $a_2 = 0$, 与 $a_2 + b_2\sqrt{2} \neq 0$ 矛盾; 若 $b_2 \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = \dfrac{a_2}{b_2} \notin \mathbf{Q}$, 矛盾. 故 $a_2 - b_2\sqrt{2} \neq 0$. 从而

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})}{(a_2 + b_2\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2})} = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2} \in F,$$

即 (2) 成立. 所以 F 构成一个数域.

与例 3 的证明完全类似, 可以得出, 对于任意素数 p, 数集 $\{a + b\sqrt{p}|a, b \in \mathbf{Q}\}$ 都构成数域. 由此可见, 数域有无穷多个.

在验证一个数集是否构成数域时, 还可以再简化一些.

定理 1　设 F 是一个含有非零数的数集, 则 F 构成一个数域的充要条件是: F 中任意两个数的差与商（除数不为零）仍属于 F.

证明 必要性显然, 下证充分性.

在 F 中任取两个数 a,b, 则由 F 中任意两个数的差与商（除数不为零）仍属于 F, 故得

$$a-a=0\in F,\quad 0-b=-b\in F.$$

于是 $a+b=a-(-b)\in F$. 又当 $b\neq 0$ 时, $\dfrac{b}{b}=1\in F, \dfrac{1}{b}\in F$, 从而

$$ab=\frac{a}{\dfrac{1}{b}}\in F,$$

即 F 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍属于 F. 因此, F 是一个数域. ■

例 4 $\sqrt{2}$ 的整数倍的全体所构成的数集对于加法、减法都封闭, 但对于乘法、除法都不封闭. 故它既非数域也非数环.

数域具有下面重要的定理.

定理 2 任何数域都包含有理数域.

证明 设 F 为任一数域, 则 $0,1\in F$, 那么对于任意的 $n\in N$, 有 $n=\overbrace{1+\cdots+1}^{n}\in F$, 从而 $0-n=-n\in F$, 即 $\mathbf{Z}\subseteq F$. 又对于任意的 $0\neq m,n\in\mathbf{Z}$, 有 $\dfrac{m}{n}\in F$, 即 $\mathbf{Q}\subseteq F$. 从而 F 包含有理数域, 故 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域. ■

习 题 1.2

1. 令 $S=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbf{Q},\mathrm{i}^2=-1\}$, 证明 S 是一个数环, 也是一个数域.
2. 全体自然数集 $\mathbf{N}$ 不是数环.
3. $S=\left\{\dfrac{a}{2^m}\middle|a,m\in\mathbf{Z}\right\}$ 是数环但不是数域.
4. 设数域 F 包含 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, 证明 F 包含 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$.
5. 证明数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\mathrm{i}|a,b\in\mathbf{Q},\mathrm{i}^2=-1\}$ 构成一个数域. 又问: 这个数域是否包含 $\sqrt{2}$?
6. 证明在实数域 $\mathbf{R}$ 与复数域 $\mathbf{C}$ 之间没有别的数域.

1.3 n 级排列

作为定义 n 阶行列式的准备, 先来讨论 n 级排列的概念.

1.3.1 排列的概念

定义 3 由 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个数码所组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 记为 $j_1j_2\cdots j_n$.

如 2431 是一个 4 级排列, 132 是一个 3 级排列, 243 不是排列.

2 级排列有 2! 个：12, 21.

3 级排列有 3! 个：123, 132, 321, 213, 231, 312.

由 $1,2,\cdots,n$ 所组成的 n 级排列共有 $n!$ 个：因为第一个数码 j_1 有 n 种取法; 第一个数码确定后, 第二个数码有 $n-1$ 种取法; 前两个数码确定后, 第三个数码有 $n-2$ 种取法; $\cdots$, 第 $n-1$ 个数码有 2 种取法; 前 $n-1$ 个数码确定后, 第 n 个数码有 1 种取法. 故共有 $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 种取法.

在 n 级排列中, 除 $123\cdots n$ 为自然序列外, 其余排列或多或少都要破坏此自然顺序.

1.3.2　排列的逆序数 (反序数)

定义 4　在一个排列中, 若一个较大的数码排在某个较小的数码的前面, 就称这两数码构成一个逆序 (反序).

一个排列中所出现的逆序的总和称为此排列的逆序数 (也叫做反序数), 记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

如 4123 中, 4 与 1, 4 与 2, 4 与 3 均构成逆序, 故 $\tau(4123)=3$.

求法: 在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中, 考察有几个数码排在 1 之前, 设为 m_1 个, 划去 1, 再观察有几个数码排在 2 之前, 设为 m_2 个, 把 2 划去, $\cdots$, 再看有几个数码排在 $n-1$ 前, 设为 m_{n-1} 个, 则 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}m_i$.

例 1　求排列 451362, $n(n-1)\cdots 21$ 和 $2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

解　在排列 451362 中, $m_1=2, m_2=4, m_3=2, m_4=0, m_5=0$, 故 $\tau(451362)=m_1+m_2+m_3=8$. 同理可得

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=n-1+n-2+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\tau(2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n)=n\cdot n+n-1+n-2+\cdots+1$$

$$=n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

定义 5　逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

4321 为一个偶排列, 643521 是一个奇排列.

1.3.3　排列之间的转化关系

定义 6　如果把一个排列中某两个数码 i,j 交换位置, 而其他数码保持不动, 这样就得到一个新的排列, 称为对原排列作了一个对换, 记作 (i,j).

显然, 如果对一个排列连续实行两次相同的对换, 那么排列就还原了. 从而一个对换把全部 n 级排列两两配对, 使每两个配成对的 n 级排列在此对换之下互变.

定理 3 对换改变排列的奇偶性.

证明 (1) 参加对换的数码位于相邻的位置.

设排列

$$\overset{A}{\cdots}\, ij \,\overset{B}{\cdots} \tag{1}$$

经过对换 (i,j) 变为

$$\overset{A}{\cdots}\, ji \,\overset{B}{\cdots}, \tag{2}$$

其中 A,B 表示不动的数码. 由排列 (1) 变为排列 (2), A,B 这些数码的逆序数没有改变, i,j 与 A,B 这些数码的逆序数也没有改变, 不同的是 i 与 j 的次序. 若 $i>j$, 则 (1) 中 i,j 构成逆序, (1) 中逆序比 (2) 多一个; 若 $i<j$, 则 (2) 中 i,j 构成逆序, (2) 中逆序比 (1) 多一个. 无论哪种情况, 排列的奇偶性总要改变.

(2) 参加对换的数码不相邻.

设排列

$$\cdots ik_1\cdots k_sj\cdots \tag{3}$$

经过对换 (i,j) 变为

$$\cdots jk_1\cdots k_si\cdots. \tag{4}$$

这样的对换可通过一系列相邻数码的对换来实现: 先将 i 向右移动, 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 交换位置, 经过 s 次相邻数码的对换后, (3) 变为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots, \tag*{(3)$'$}$$

再将 j 向左移动, 依次与 $i,k_s,\cdots,k_2,k_1$ 交换位置, 经过 $s+1$ 次相邻数码的对换, (3)$'$ 变为 (4). 故对换 (i,j) 将 (3) 变为 (4) 相当于施行了 $2s+1$ 次相邻数码的对换. 由 (1) 的证明得知, 每经过一次相邻数码的对换, 排列的奇偶性就要改变, 而 $2s+1$ 为奇数, 经过奇数次这样的对换, 排列的奇偶性必定改变, 所以 (3) 与 (4) 的奇偶性相反. ■

推论 当 $n\geqslant 2$ 时, 所有 n 级排列中奇排列与偶排列的个数相等, 各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证明 设 n 个数码的奇排列共有 p 个, 而偶排列共有 q 个. 对这 p 个不同的奇排列施行同一个对换 $(1,2)$, 由定理 3, 得到 p 个互不相同的偶排列. 因偶排列共有 q 个, 故 $p\leqslant q$. 同理 $q\leqslant p$. 从而 $p=q$.

由于 n 级排列共有 $n!$ 个, 所以奇、偶排列各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个. ■

定理 4 任意一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与排列 $12\cdots n$ 可通过一系列对换互变, 且对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

证明 对排列的级数 n 用数学归纳法.

1 级排列只有一个, 成立. 2 级排列只有两个:12, 21, 且两者经过对换 $(1,2)$ 互换.

假设对于 $n-1$ 级的排列结论成立, 现证对于 n 级排列亦然: 若 $j_n=n$, 由归纳假设, 可以对排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 作一系列对换变为 $12\cdots(n-1)$, 那么这一系列对换将 $j_1j_2\cdots j_{n-1}n$ 变为 $12\cdots(n-1)n$.

若 $j_n\neq n$, 对排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 作对换 (j_n,n), 此时 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为 $j_1'\cdots j_{n-1}'n$, 又归结为 $j_n'=n$ 的情况, 结论成立.

由数学归纳法原理, 结论得证.

同理, $12\cdots n$ 也可以经过一系列恰当的对换变为任意一个取定的 n 级排列.

下证第二部分. 因为 $12\cdots n$ 为偶排列, 若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列, 则由 $j_1j_2\cdots j_n$ 必经过奇数次对换化为 $12\cdots n$; 若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列, 则由 $j_1j_2\cdots j_n$ 必经过偶数次对换化为 $12\cdots n$. 从而对换次数与 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同.

由 $12\cdots n$ 转化为 $j_1j_2\cdots j_n$ 的情况类似地可证. ■

推论　任意两个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 可通过一系列对换互化.

例 2　选择怎样的对换可将 34567812 化为 67812345?

选择 i 与 k 使得 $137k45i8$ 为一个偶排列 (或者为一个奇排列).

习　题　1.3

1. 决定以下 9 级排列的逆序数, 从而决定它们的奇偶性.

(1) 134782695;　(2) 217986354;　(3) 987654321.

2. 决定排列 $n(n-1)\cdots21(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$ 的逆序数, 并讨论它的奇偶性.

3. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数是 k, 排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

4. 当 i,j 取何值时, 排列 $213i587j9$ 是一个奇排列?

5. 写出把排列 24315 转化为排列 12543 的那些对换.

1.4　n 阶行列式

1.4.1　2,3 阶行列式

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

有 2! 项, 每一项是 2 个元素的乘积, 各元素既位于不同的行, 又位于不同的列, 一般项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$, 其中 j_1j_2 是一个 2 级排列.

当 2 阶行列式每一项的行标按自然顺序排列时, 列标取尽了 1,2 这两个数码的所有排列, 且该项的符号由列标排列的奇偶性所决定: 奇排列对应负项, 偶排列对应正项. 2 阶行列式可以写成