iCourse · 教材

大学数学

工科数学分析

（第五版）

下 册

哈尔滨工业大学数学系分析教研室

高等教育出版社

大学数学

工科数学分析

Gongke Shuxue Fenxi

（第五版）

下 册

哈尔滨工业大学数学系分析教研室

内容简介

本书是哈尔滨工业大学编写的大学数学系列教材中的一本，系列教材包括《工科数学分析（第五版）(上、下)》《线性代数与空间解析几何（第四版）》《概率论与数理统计（第二版）》共4本。

《工科数学分析（第五版）》是在第四版的基础上修订而成的，分上、下两册。上册共七章，包括函数，极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，微分方程；下册共四章，包括多元函数微分学，多元函数积分学，第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场，无穷级数。每章后有供自学的综合性例题，并以附录形式开辟了一些新知识的窗口。

本书可作为工科大学本科一年级新生数学课教材，也可作为准备报考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学. 工科数学分析. 下册 / 哈尔滨工业大学数学系分析教研室编. -- 5版. -- 北京 : 高等教育出版社，2015.12
ISBN 978-7-04-044010-2

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①哈… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第247125号

策划编辑 张晓丽　责任编辑 李冬莉　封面设计 李树龙　版式设计 于 婕
插图绘制 黄建英　责任校对 吕红颖　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市白帆印务有限公司
开　　本 787 mm× 1092 mm 1/16
印　　张 14.75
字　　数 370千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2008年1月第1版
2015年12月第5版
印　　次 2015年12月第1次印刷
定　　价 26.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 44010-00

目　录

工科数学分析（三）

工科数学分析(四)

第八章
多元函数微分学

前几章研究了仅依赖一个自变量的函数——一元函数，由于客观上许多事情是受多方面因素制约的，所以在数量关系上必须研究依赖多个自变量的函数，即多元函数.多元函数微积分学的内容和方法都与一元函数的内容和方法紧密相关，但由于自变量的增加，问题更加复杂多样.在学习时，应注意与一元函数有关内容的对比，找出异同.这样不但有利于理解和掌握多元函数的知识，而且复习巩固了一元函数的知识.本章介绍多元函数的基本概念及其微分学.

8.1 多元函数的基本概念

8.1.1 预备知识

本段介绍 n 维空间及点集的术语和概念.

在空间引入坐标系 $Oxyz$ 后，空间的点 P 和三个实数构成的有序数组 (x,y,z) 一一对应，这样数组 (x,y,z) 就等同于点 P，所有的三元有序数组 (x,y,z) 就表示空间所有点的集合，即整个空间.推而广之，有下面的定义.

定义 8.1　称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(x_i\in\mathbf{R})$ 为一个 **n 维点**（或 **n 维向量**），所有 n 维点构成的集合叫做 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$.点 $(0,0,\cdots,0)$ 称为 n 维空间的**原点**.

MOOC
微视频
8.1.1 多元函数的基本概念

所有实数构成一维空间 $\mathbf{R}$，几何上就是数轴；所有实数偶 (x,y) 的集合为二维空间 $\mathbf{R}^2$，几何上是坐标平面；日常说的空间就是三维空间 $\mathbf{R}^3$.当 $n>3$ 时，空间 $\mathbf{R}^n$ 没有直观的几何形象，但它们客观上是存在的，比如，我们生活的“时—空”空间是四维空间.我们常常可以借助于二维、三维空间来想象三维以上的空间.

定义 8.2　$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $B(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 间的**距离** $\rho(A,B)$ 规定为

$$\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}.$$

这与 n 维向量的模(范数)的定义是一致的.线性代数已经证明,若 P_1,P_2,P_3 是三个 n 维点,则有“三角不等式”:

$$\rho(P_1,P_3)\leqslant\rho(P_1,P_2)+\rho(P_2,P_3).$$

定义 8.3　设 $P_0\in\mathbf{R}^n$,常数 $\delta>0$,则称 $\mathbf{R}^n$ 的子集

$$\{P\mid\rho(P,P_0)<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}$$

为**点 P_0 的 δ 邻域**,记为 $U_\delta(P_0)$.

$U_\delta(P_0)$ 是以 P_0 为中心,δ 为半径的“n 维球”内部所有点的集合.当我们不关心半径 δ 的大小时,就把它称为 **P_0 的邻域**,记为 $U(P_0)$[①].用 $\mathring{U}_\delta(P_0)$ 表示点 P_0 的去心 δ 邻域.

① 除这种“球”型邻域外,有时,还用到所谓的“长方”型邻域.设 $P_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$.常数 $\eta_i>0,i=1,2,\cdots,n$,称点集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid |x_i-a_i|<\eta_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 为点 P_0 的“长方”型邻域.显然在“球”型邻域内可以作出“长方”型邻域,在“长方”型邻域内也可作出“球”型邻域.

定义 8.4　设集合 $E\subseteq\mathbf{R}^n$,点 $P_0\in\mathbf{R}^n$,若 $\exists\delta>0$,使 $U_\delta(P_0)\subseteq E$,则称 P_0 为 E 的**内点**.若 P_0 的任何邻域内部有属于 E 的点,也有不属于 E 的点(P_0 可以属于 E,也可以不属于 E),则称 P_0 为 E 的**边界点**.E 的边界点的全体称为 E 的**边界**,记为∂E(图 8.1).

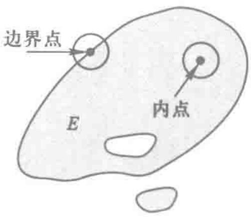

图 8.1

定义 8.5　若集合 E 的每个点都是它的内点,则说 E 是**开集**.若 E 中任何两点都有 E 中的曲线($\mathbf{R}^n$ 中的曲线是满足单参数 t 的连续函数 $x_i=x_i(t),i=1,2,\cdots,n$的点集)连接,则说 E 是**(线)连通集**.连通开集称为**区域**或**开区域**.区域和它的边界的并集叫做**闭区域**.

定义 8.6　若 $\exists\delta>0$,使集合 $E\subseteq U_\delta(O)$,其中 O 是 $\mathbf{R}^n$ 中的原点$(0,0,\cdots,0)$,则说 E **有界**,否则说 E **无界**.

例如,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中无界区域,而集合 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中有界闭区域.

8.1.2　多元函数

MOOC
微视频
8.1.2 多元函数

现实生活中,经常遇到依赖两个或两个以上变量的函数,举例如下.

例 1　一定量的某种理想气体的压强 p,体积 V 和绝对温度 T 之间有依赖关系,为

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数.

例 2　长方体的体积 V 由它的长 x,宽 y 和高 z 确定:

$$V=xyz\quad(x,y,z>0).$$

例 3　冷却过程中的铸件,温度 τ 与铸件内点的位置 x,y,z 和时间 t,以及外

界环境温度 τ_0，空气流动的速度 v 有关：

$$\tau=f(t,x,y,z,\tau_0,v).$$

定义 8.7　设 D 是 Oxy 平面的点集，若变量 z 与 D 中的变量 x,y 之间有一个依赖关系，使得在 D 内每取定一个点 $P(x,y)$ 时，按着这个关系有确定的 z 值与之对应，则说 z 是 x,y 的**二元（点）函数**，记为

$$z=f(x,y)\quad（或\ z=f(P)）.$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 就是 Oxy 平面点集 D 到 z 轴上的映射 $f:D\to\mathbf{R}$. 称 x,y 为**自变量**，称 z 为**因变量**，点集 D 称为该函数的**定义域**，数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地，可以定义 n 元函数. 二元及二元以上的函数统称**多元函数**.

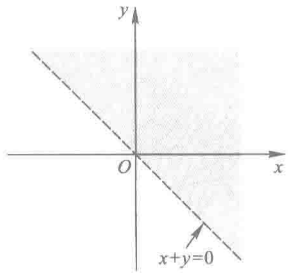

图 8.2

关于多元函数的定义域，实际问题中函数的定义域由实际意义确定，纯数学地研究函数时，定义域就是在实数范围内能够得到确定函数值的所有点所确定的点集.

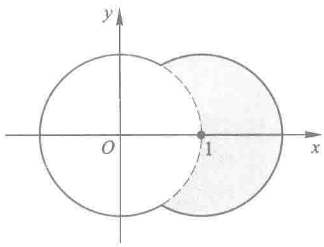

图 8.3

例 4　函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域是 $\{(x,y) \mid x+y>0\}$，在平面直角坐标系下是直线 $x+y=0$ 右上方的半平面（不含该直线），是无界开区域（图 8.2）.

例 5　函数 $z=\sqrt{2x-x^2-y^2}\Big/\sqrt{x^2+y^2-1}$ 的定义域是 $\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1$，且 $x^2+y^2>1\}$，图 8.3 中有阴影的月牙形有界点集.

例 6　函数 $u=\sqrt{z-x^2-y^2}+\arcsin(x^2+y^2+z^2)$ 的定义域是 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leqslant z$ 且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，在空间直角坐标系下是以原点为球心，1 为半径的球体内，旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方的部分，是有界闭区域（图 8.4）.

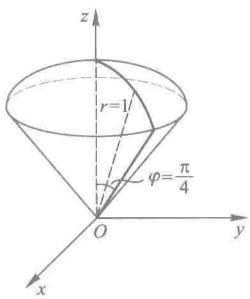

图 8.4

我们经常接触到的平面区域 D 上的二元函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

的图形是三维空间中的曲面（图 8.5）.

例如，由空间解析几何知，函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为球心，R 为半径的上半球面；函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面；函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是圆锥面；函数 $z=xy$ 的图形是双曲抛物面；二元隐函数 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形是平面.

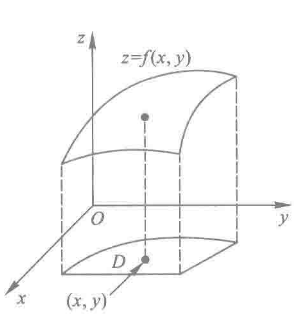

图 8.5

最后指出，从一元函数到二元函数，在内容和方法上都会出现一些实质性的差别，而多元函数之间差异不大，因此讨论多元函数时，将以二元函数为主.

8.1.3　多元函数的极限与连续

设集合 $E\subseteq\mathbf{R}^n$，点 $P_0\in\mathbf{R}^n$，如果 P_0 的任何邻域中都有无穷多个点属于 E，则

称 P_0 为集合 E 的一个**聚点**.聚点本身可能属于 E,也可能不属于 E.集合的内点必是聚点,边界点可能是聚点,也可能不是.

MOOC
微视频
8.1.3 二重极限

定义 8.8 设 $u=f(P)$,$P\in D$,P_0 是 D 的聚点,A 是常数.如果 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $P\in D$,且 $0<\rho(P,P_0)<\delta$ 时,恒有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则说 $P\to P_0$ 时,函数 $f(P)$ 以 A 为**极限**,记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

当 P 是二维点,D 为二维区域时,若 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,上述极限记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

多元函数极限的含义是:只要点 $P(P\in D)$ 到 P_0 的距离 $\rho(P,P_0)\to 0$,就有 $f(P)\to A$.

MOOC
微视频
8.1.4 二重极限计算

例 7 试证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=0$.

证明 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{xy}\right|\leqslant x^2+y^2=\rho^2,$$

所以,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<\rho<\delta(xy\neq 0)$ 时,恒有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0. \quad \square$$

务必注意,虽然多元函数的极限与一元函数的极限的定义相似,但它复杂得多.一元函数在某点处极限存在的充要条件是左右极限存在且相等,而多元函数必须是点 P 在定义域内以任何可能的方式和途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 都有极限,且相等.因此:

1. 如果点 P 以两种不同的方式或途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 趋于不同的值,则可断定 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在.

2. 已知点 P 以几种方式和途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 趋于同一个数,这时还不能断定 $f(P)$ 有极限.

3. 如果已知 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在,则可取一特殊途径来求极限值.

例 8 讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性.

解 当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0.$$

又当点(x,y)沿直线$x=0$趋于$(0,0)$时，也有

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=0.$$

这说明沿任何直线趋于原点时，$f(x,y)$都趋于零.尽管如此，还不能说$f(x,y)$以零为极限，因为点(x,y)趋于$(0,0)$的方式还有无穷多种.请看，当点(x,y)沿抛物线$x=y^2$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

故例 8 中的极限不存在.

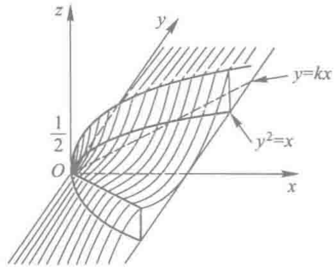

图 8.6

函数$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$是$x$的奇函数，关于$y$轴对称；又是$y$的偶函数，图形关于坐标面$y=0$对称，如图 8.6.

一元函数求极限的四则运算法则、夹挤准则都可以推广到多元函数极限运算上来，唯一性、极限点附近的保序性和有界性也都成立.

例 9 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} y\cdot\dfrac{\sin(xy)}{xy}=a\quad(a\neq 0).$

例 10 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2-y^4}$.

解 作变换令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $(x,y)\to(0,0)$ 化为 $\rho\to 0$，又$\left|\dfrac{2\rho\cos\theta\sin^2\theta}{1-\rho^2\sin^4\theta}\right|<\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}\quad(0<\rho<1)$，注意$\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}$与$\theta$无关，且$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}=0$，故由夹挤准则知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^2}{x^2+y^2-y^4}=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\cos\theta\sin^2\theta}{1-\rho^2\sin^4\theta}=0.$$

顺便指出：$(x,y)\to(x_0,y_0)$的过程中，x和y是作为点的坐标同时趋于x_0和y_0的，不能把它分开先后.如

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}0=0$$

与例 8 的极限不是一回事.

定义 8.9 设函数$f(P)$的定义域为D，P_0是D的聚点.如果$P_0\in D$，且

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则说函数$f(P)$在点P_0处**连续**，并称P_0是$f(P)$的**连续点**.否则称P_0是$f(P)$的**间断点**.

若记$\Delta u=f(P)-f(P_0)$，$\rho=\rho(P,P_0)$，函数$u=f(P)$在P_0处连续等价于

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta u=0.$$

如果函数 $f(P)$ 在区域 E 的每一点处都连续，则说函数 $f(P)$ 在区域 E 上连续，记为 $f(P)\in C(E)$.

微视频
8.2.1 连续与偏导的概念

例如，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 在 (x,y) 平面上处处连续，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 仅在原点 $(0,0)$ 处不连续，函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上处处间断.

在空间直角坐标系下，平面区域 E 上的二元连续函数 $z=f(x,y)$ 的图形是在 E 上张开的一张"无孔无缝"的连续曲面.

同一元函数一样，多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）及复合仍是连续的. 各个自变量的基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合，由一个式子表达的函数称为多元初等函数，多元初等函数在它们定义域的内点处均连续.

有界闭区域上的多元连续函数有如下重要性质：

1. ［**最大最小值存在性**］

在有界闭区域上连续的函数必有界，且有最大值和最小值.

2. ［**介值存在性**］

在有界闭区域上连续的函数必能取到介于最大值与最小值之间的任何值.

8.2 偏导数与高阶偏导数

8.2.1 偏导数

工作中，常常需要了解一个受多种因素制约的量，在其他因素固定不变的情况下，随一种因素变化的变化率问题. 这促使人们研究多元函数在其他自变量固定不变时，函数随一个自变量变化的变化率——偏导数问题.

定义 8.10　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，固定 $y=y_0$，给 x_0 以增量 Δx，称

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏增量**. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**关于 x 的偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f'_x(x_0,y_0)^{①}.$$

同样定义 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**关于 y 的偏导数**为

① 一元函数 $f(x)$ 的导数，可用"$'$"表示. 多元函数 $f(x,y)$ 的偏导数，可通过下标标明对哪个自变量求偏导，可以省略"$'$"，如 $f_x(x_0,y_0)$ 表示 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)].$$

如果在区域 E 内每一点(x,y)处函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数就是 E 内点(x,y)的函数,称之为 $z=f(x,y)$ **关于 x 的偏导函数**,简称**对 x 的偏导数**,记为

$$z'_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\quad 或\quad f'_x(x,y).$$

同样,$z=f(x,y)$ **对 y 的偏导(函)数**,记为

$$z'_y,\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\quad 或\quad f'_y(x,y).$$

偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的值,就是函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$.

对一般多元函数可以类似地定义偏导数.如函数 $u=f(x,y,z)$ 在点(x_0,y_0,z_0)处关于 x 的偏导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=f'_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)].$$

由偏导数的定义知,多元函数对某个自变量的偏导数,就是把其他自变量视为常量,考察函数对这个自变量变化的变化率.所以利用一元函数的导数公式与法则,就可计算偏导数了.

例 1　求 $z=x^2y+\sin y$ 在点$(1,0)$处的两个偏导数.

MOOC
微视频
8.2.3 偏导数的计算

解　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+\cos y,$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.2xy\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=0,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.(x^2+\cos y)\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=2.$$

例 2　求 $f(x,y,z)=(z-a^{xy})\sin\ln x^2$ 在点$(1,0,2)$处的三个偏导数.

解　求某一点的偏导数时,可以先将其他变量的值代入,变为一元函数,再求导,常常较简便.

$$f'_x(1,0,2)=(\sin\ln x^2)'\Big|_{x=1}=\frac{2}{x}\cos\ln x^2\Big|_{x=1}=2,$$

$$f'_y(1,0,2)=0'\Big|_{y=0}=0,\quad f'_z(1,0,2)=0'\Big|_{z=2}=0.$$

例 3　求 $z=x^y(x>0)$ 的偏导数.

解　$z'_x=yx^{y-1}, z'_y=x^y\ln x$.

例 4　已知电阻 R_1,R_2,R_3 并联的等效电阻为

$$R=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^{-1},$$

若 $R_1>R_2>R_3>0$,问改变三个电阻中的哪一个,对等效电阻 R 影响最大?

解　因为

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R^2}{R_1^2},\quad \frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R^2}{R_2^2},\quad \frac{\partial R}{\partial R_3}=\frac{R^2}{R_3^2},$$

R_3 最小,所以$\frac{\partial R}{\partial R_3}$最大.故改变 R_3 对 R 影响最大.

例 5　求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处的两个偏导数.

解　这里必须由偏导数定义计算:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

微视频
8.2.2 连续与偏导的关系

两个偏导数都存在,回顾 8.1 节例 8 知,当 $(x,y)\to(0,0)$ 时这个函数无极限,所以在点(0,0)处不连续.

一元函数可导必连续.但对多元函数,偏导数都存在,函数未必有极限,更保证不了连续性.

为了一般地说明这一问题,先介绍偏导数的几何意义.

因为偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数,所以几何上 $f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线 $z=f(x,y_0)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率.同样 $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线 $z=f(x_0,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率(见图 8.7).

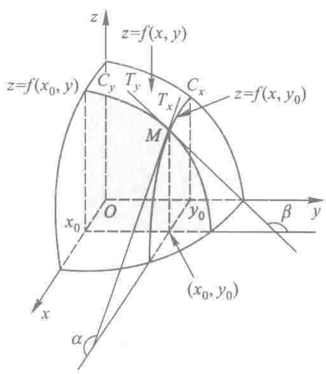

图 8.7

因为偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 仅与函数 $z=f(x,y)$ 在 $y=y_0$ 上的值有关,$f'_y(x_0,y_0)$ 仅与 $z=f(x,y)$ 在 $x=x_0$ 上的值有关,与 (x_0,y_0) 邻域内其他点上的函数值无关,所以偏导数的存在不能保证函数有极限.

例 6　由理想气体的状态方程 $pV=RT$,推证热力学中的公式

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证明　因为

$$p=\frac{RT}{V},\quad V=\frac{RT}{p},\quad T=\frac{pV}{R},$$

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.\quad □$$

例 6 说明偏导数符号$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$都是整体记号,不能像一元函数导数那样理解为商.

8.2.2 高阶偏导数

微视频
8.2.4 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 E 内有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y),$$

它们仍是 E 内 x,y 的函数.如果它们仍有偏导数,则称它们的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**,二元函数 $z=f(x,y)$ 可以有如下四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy},$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 称为**混合二阶偏导数**.

递推地可以定义各阶偏导数,二阶和二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例 7 已知 $z=\ln(x^2+y)$,求其四个二阶偏导数.

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y},$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y)-4x^2}{(x^2+y)^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2x}{(x^2+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{(x^2+y)^2}.$$

例 7 中两个混合二阶偏导数相等,一般情况下这虽不是必然的,但在一定条件下是成立的.

定理 8.1 如果在点 (x,y) 的邻域内函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x,z'_y 及 z''_{xy} 都存

在，且 z''_{xy} 在点 (x,y) 处连续，那么混合偏导数 z''_{yx} 在点 (x,y) 处也存在，且

$$z''_{yx}=z''_{xy}.$$

（证明略）

MOOC
测验
第一周测验

一般地，多元函数的混合偏导数如果连续，就与求导次序无关.

例 8　设 $u=\mathrm{e}^{xy}\sin z$，求 u'''_{xxz}，u'''_{xzx}.

解　$u'_x=y\mathrm{e}^{xy}\sin z$，$u''_{xx}=y^2\mathrm{e}^{xy}\sin z$，$u''_{xz}=y\mathrm{e}^{xy}\cos z$，$u'''_{xxz}=y^2\mathrm{e}^{xy}\cos z$. 因为 u''_{xx}，u''_{xz} 存在，且 u'''_{xxz} 连续，所以

$$u'''_{xxz}=u'''_{xzx}=y^2\mathrm{e}^{xy}\cos z.$$

最后指出，确有混合偏导数不相等的函数，比如

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 的两个混合二阶偏导数

$$f''_{xy}(0,0)=-1,\quad f''_{yx}(0,0)=1.$$

这只能说明 f''_{xy} 和 f''_{yx} 在点 $(0,0)$ 处都不连续.

8.3　全微分

对多元函数也有自变量的微小变化导致函数变化多少的问题.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为该邻域内任意一点，则称

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{1}$$

为函数在点 $P(x,y)$ 处的**全增量**.

二元函数在一点的全增量是 $\Delta x,\Delta y$ 的函数. 一般说来，Δz 是 $\Delta x,\Delta y$ 的较复杂的函数，当自变量的增量 $\Delta x,\Delta y$ 很小的情况下，自然希望能像可微的一元函数那样，用 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数来近似代替 Δz，即希望

$$\begin{aligned}\Delta z&=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\\&=(A\quad B)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o(\rho),\end{aligned} \tag{2}$$

MOOC
微视频
8.3.1 全微分的概念

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 这就产生了全微分的概念.

定义 8.11　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的全增量(1)能表示成(2)的形式，则说函数 $z=f(x,y)$ 在点 P 处**可微**，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数在点 P 处的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y=(A \quad B)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}. \tag{3}$$

在区域 E 内每一点都可微的函数,称为区域 E 内的**可微函数**,此时也说函数**在 E 内可微**.

由(2)式知,多元函数可微必连续.

可微与偏导数存在有何关系呢？微分系数 A,B 如何确定？由下面两个定理来回答.

定理 8.2　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微,则在点 P 处偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=B.$$

证明　因 $f(x,y)$ 可微,有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

特别取 $\Delta y=0$ 时,有

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right)=A.$$

同法可证,$\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在,且 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. □

由此可见,$z=f(x,y)$ 的全微分(3)可表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}.$$

因为自变量的微分等于它的增量,$\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$,所以函数 $z=f(x,y)$ 的全微分习惯上写为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们把 $\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 分别叫做函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处关于 x,y 的**偏微分**,它们分别是偏增量 $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ 的线性主部.所以,二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和——称为微分的**叠加原理**.这对一般多元函数也成立.比如,对三元可微函数 $u=f(x,y,z)$ 有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}.$$

对一元函数来说可导与可微是等价的.而对多元函数来说,偏导数都存在也保证不了可微性.这是因为偏导数仅仅是在特定的方向上函数的变化率,它对函数在一点附近变化情况的描述是极不完整的.前面讲过偏导数都存在也保证不了函数的连续性,而可微必连续,所以偏导数存在推不出可微性.

MOOC
微视频
8.3.2 可微的充分条件

定理 8.3 若在点 $P(x,y)$ 的某邻域内,函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在,且它们在点 P 处连续,则 $z=f(x,y)$ 在点 P 处可微.

证明 设 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 是 $P(x,y)$ 的邻域内的任一点,考察全增量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)],\end{aligned}$$

第一个方括号里,由于第二个自变量固定在 $y+\Delta y$ 处,可视为 x 的一元函数 $f(x,y+\Delta y)$ 的增量,第二个方括号里第一个自变量固定在 x 处,可视为 y 的一元函数 $f(x,y)$ 的增量,分别应用拉格朗日中值定理就得到

$$\Delta z=f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$,此式称为**二元函数中值公式**.

利用 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的连续性得到

$$\begin{aligned}\Delta z&=[f'_x(x,y)+\alpha]\Delta x+[f'_y(x,y)+\beta]\Delta y\\&=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\end{aligned}$$

其中 α,β 满足

$$\lim_{\rho\to 0}\alpha=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\beta=0.$$

下面只需证明 $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ 是 ρ 的高阶无穷小.因为当 $\rho\to 0$ 时,

$$\frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho}\leqslant|\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|+|\beta|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|\to 0,$$

故

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho),$$

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\rho),$$

所以 $z=f(x,y)$ 在点 P 处可微. □

注意,定理 8.3 的条件是可微的充分条件,函数在一点可微,在这点偏导数不一定连续.

例 1 试证函数