高等数学

习题集解答

上

（一）

一九七九年一月

高等数学

习题集解答

上

(一)

一九七九年一月

說　明

此习题解答是根据同济大学数学教研室编的“高等数学习题集”（1965年修订本）作的，分上、中、下三册。由于水平有限，难免有不妥之处或错误，希望同志们批评指正。

后工训练部第一教研室

一九七八年十月

目　录

第一编　解析几何

第二编　数学分析

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲綫及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.1—1.5　解略.

1.6　一正方形的边长为2单位，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标等于什么？

解：将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上，它必有一个顶点在原点，两个顶点在坐标轴上，另一个顶点分别在第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限，则正方形各顶点的坐标分别为：

(i)　(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)；

(ii)　(0, 0), (−2, 0), (0, 2), (−2, 2)；

(iii)　(0, 0), (0, −2), (−2, 0), (−2, −2)；

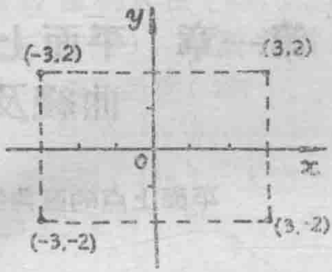
(iv)　(0, 0), (2, 0), (0, −2), (2, −2).

1.7　菱形的每边长为5单位，它有一条对角线长为6单位，如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上．求它各个顶点的坐标．

解：因为菱形的对角线互相垂直平分，已知一对角线长

为6单位，它的一半即为3单位．又知菱形边长为5单位，由勾股定理可求得另一对角线的一半长是4单位．如果把菱形的两对角线放在两坐标轴上，它的各个顶点的坐标为：(4，0)，(－4，0)，(0，3)，(0，－3)或(3，0)，(－3，0)，(0，4)，(0，－4)．

1.8 已知点M(3，2)，作它关于横轴，纵轴，原点的对称点．求这些点的坐标．



1.8题

解：由图可知：

点(3，2)与点(3，－2)关于x轴对称；

点(3，2)与点(－3，2)关于y轴对称；

点(3，2)与点(－3，－2)关于原点相对称．

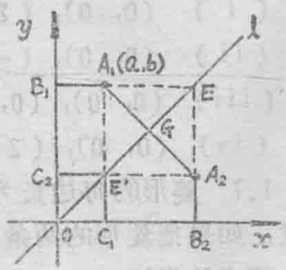
1.9 证明点$A_1(a, b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点A_2必有坐标(b, a)．

已知：直线l为第Ⅰ，Ⅲ象限的角平分线，A_1，A_2以直线l为轴的对称点．

点A_1的坐标为(a, b)．

求证：A_2必有坐标(b, a)．

证明：延长B_1A_1交对称轴l于E，连EA_2并延长交x轴于B_2．



1.9题

在直角$\triangle A_1GE$与直角$\triangle A_2GE$中，$A_1G=A_2G$，EG公用.

则直角$\triangle A_1GE\cong$直角$\triangle A_2GE$.

$\angle A_2EG=\angle A_1EG=45^\circ$.

又在直角$\triangle EB_1O$与$\triangle EB_2O$中，

$\angle B_1EO=\angle B_2EO$，$\angle EOB_1=\angle EOB_2$，OE公用.

$\therefore$ 直角$\triangle EB_1O\cong$直角$\triangle EB_2O$.

$\therefore$ $EB_2\perp OX$轴，$OB_2=OB_1=b$.

同理可证 $OC_2=OC_1=a$.

故 A_2点的坐标为(b, a).

1.10 解略.

1.11 一点在某一坐标系下的坐标为$x=2$，$y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点:

(a)(4, 5); (b)(4, -5); (c)(-4, 5); (d)(-4, -5). 该点在新系下的坐标等于什么?

解: 已知旧系坐标为$x=2$，$y=-1$，设所求各点关于新系的坐标为x'，y'，则

$x'=x-a$， $y'=y-b$

将各点代入坐标公式有:

(a) $x'=2-4=-2$， $y'=-1-5=-6$;

(b) $x'=2-4=-2$， $y'=-1-(-5)=4$;

(c) $x'=2-(-4)=6$， $y'=-1-5=-6$;

(d) $x'=2-(-4)=6$， $y'=-1-(-5)=4$.

1.12 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为(12, -7)和(0, 15)，各系的原点在他系下的坐标等于什么?

解: 由轴的平移公式得 $a=x-x'$，$b=y-y'$

代入上述公式：$a=12-0=12$，　$b=-7-15=-22$；

或　$a=0-12=-12$，$b=15-(-7)=22$.

所以各系的原点在他系下的坐标为(12，-22)，(-12，22).

1.13　如果将坐标轴依逆时针方向旋转60°，点M(1，$\sqrt{3}$)在新系下的坐标等于什么？

解：已知点M关于旧系的坐标是$x=1$，$y=\sqrt{3}$，且$\alpha=60°$，点M关于新系的坐标为

$$x'=1\cdot\cos60°+\sqrt{3}\sin60°=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2;$$

$$y'=-1\cdot\sin60°+\sqrt{3}\cos60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

1.14　如果将坐标轴依逆时针方向旋转45°，点M(1，$\sqrt{3}$)在新系下的坐标等于什么？

解：已知点M关于旧系的坐标：$x=1$，$y=\sqrt{3}$，且$\alpha=45°$，点M关于新系的坐标为

$$x'=1\cdot\cos45°+\sqrt{3}\sin45°=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6});$$

$$y'=-1\cdot\sin45°+\sqrt{3}\cos45°=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

1.15　坐标轴应该旋转多少角度，方能使点M(2，0)在新系下的横标和纵标变成相等？(我们把角度限制在$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$之间.)

解：已知点M关于旧系的坐标：$x=2$，$y=0$．点M

关于新系的坐标为

$$x'=2\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha,\quad y'=-2\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha,$$

由 $x'=y'$， 得 $2\cos\alpha=-2\sin\alpha$，

即 $\mathrm{tg}\alpha=-1$， $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

∴坐标轴应旋转$-\dfrac{\pi}{4}$，方能使点M（2，0）的横标和纵标相等.

两点間的距离，綫段的定比分点

1.16—1.17 解略.

1.18 试证顶点为A(0, 0), B(3, 1)及C(1, 7)的三角形是直角三角形.

证明：由两点间的距离公式，分别求得三角形三边的长为：

$$|AB|=\sqrt{(0-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10},$$

$$|AC|=\sqrt{(0-1)^2+(0-7)^2}=\sqrt{50},$$

$$|BC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-7)^2}=\sqrt{40}.$$

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$,

即△ABC为直角三角形.

1.19 解略.

1.20 证明点（7，2）和点(1，－6)在以点（4，－2）为园心的园周上，并求这个园的半径.

证明：用两点间的距离公式，可分别求得点（4，－2）到点（7，2）和点（1，－6）的距离：

$$d_2=\sqrt{(7-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{9+16}=5,$$

$$d_2=\sqrt{(1-4)^2+(-6+2)^2}=\sqrt{9+16}=5;$$

即　$d_1=d_2$．根据园的定义可知（7，2）和（1，−6）在以（4，−2）为园心的园周上，这个园的半径是5．

1.21　在x轴上求与点A（5，12）的距离为13单位的点的坐标．

解：在x轴上的点的坐标为（x，0），与已知点A(5，12）的距离为13单位，

即　$13=\sqrt{(5-x)^2+(12-0)^2}$

化简得　$x^2-10x=0$，　$x_1=0$，　$x_2=10$．

∴　在x轴上与点A(5，12）的距离为13单位的点的坐标是(0，0），（10，0）．

1.22　在第Ⅰ象限角的平分线上求一点，使它与点A（0，2）的距离为$\sqrt{2}$单位．

解：设所求点为（x，y）．因角平分线上的点到两坐标轴的距离等远，即x＝y．

$$\therefore\ \sqrt{2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(x-2)^2}$$

化简得　$x^2-2x+1=0$；　$x_1=1$，　$x_2=1$．

∴　在角的平分线上所求点的坐标是（1，1）．

1.23　已知点M的横坐标等于7单位，而到点N(−1，5）的距离等于10单位，求点M的纵坐标．

解：已知点N(−1，5)，d＝10，设点M的坐标为(7，y）．

得　$10=\sqrt{(7+1)^2+(y-5)^2}$，

化简得　$y^2-10y-11=0$，　　$(y+1)(y-11)=0$.

∴　$y_1=11$，　　$y_2=-1$.

∴　求得M点的坐标为（7，11），（7，－1）.

1.24　已知点M到两坐标轴和点（3，6）都有相等的距离，求点M的坐标。

解：设所求点M的坐标为（x，y）.

因（x，y）点到两坐标轴的距离相等，即有：$x=y$.

（x，y）点到x轴的距离为 $|y|$.

（x，y）点到（3，6）点的距离为

$d=\sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2}$，

又∵（x，y）点到两坐标轴和点（3，6）距离都相等.

即　$|y|=\sqrt{(3-y)^2+(6-y)^2}$

化简得　$y^2-18y+45=0$.

$y_1=15$，　　$y_2=3$.

∴ 所求点为（15，15），（3，3）.

1.25　求与已知三点A（2，2），B（－5，1）和C（3，－5）等距离的点.

解：设所求点为（x，y），与三已知点的距离分别为d_1，d_2，d_3.

$d_1=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$，

$d_2=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$，

$d_3=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}$，

已知$d_1=d_2=d_3$，可得方程组：

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}, \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}.\end{cases}$$

化简上述方程组得$\begin{cases}14x+2y+18=0, \\ 2x-14y-26=0.\end{cases}$

解方程得所求的点是$(-1, -2)$.

1.26 试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

已知：$\triangle ABC$ 为任意三角形，DE 为 AB，AC 中点连线.

求证：$|DE|=\frac{1}{2}|BC|$.

证明：设三角形之三顶点为 $A(x, y)$，$B(x_1, y_1)$，$C(x_2, y_2)$，则AB，AC之中点D、E的坐标为

$$\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right), \quad \left(\frac{x+x_2}{2}, \frac{y+y_2}{2}\right);$$

$$\because \quad |BC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

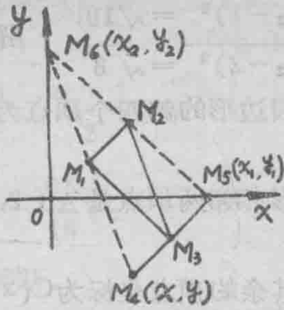
$$|DE|=\sqrt{\left(\frac{x+x_1}{2}-\frac{x+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y+y_1}{2}-\frac{y+y_2}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

$$\therefore \quad |DE|=\frac{1}{2}|BC|.$$

1.27 设点 $M_1(1, 1)$，$M_2(2, 2)$，$M_3(3, -1)$是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点.

解：从图中看出，给定平行四边的三个顶点，可作出三个平行四边形. 设所求的第四个顶点分别为M_4、M_5、M_6.



1.27题

由两点间的距离公式可得:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$|M_1M_3| = \sqrt{(1-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8};$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(2-3)^2+(2+1)^2} = \sqrt{10};$$

在以M_1M_2，M_2M_3为邻边的平 行 四 边形$M_1M_2M_3M_4$中，可得方程组:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{10}, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$ 解得$x=2$，$y=-2$.

在以M_1M_2，M_1M_3为邻边的平 行 四 边形$M_1M_3M_5M_2$中，可得方程组:

$$\begin{cases} \sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-2)^2} = \sqrt{8}, \\ \sqrt{(x_1-3)^2+(y_1+1)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$ 解得$x_1=4$，$y_1=0$.

在以M_1M_3，M_3M_2为邻边的平行四边形$M_1M_3M_2M_6$中，可得方程组:

$$\begin{cases}\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{10},\\ \sqrt{(x_2-2)^2+(y_2-2)^2}=\sqrt{8}\end{cases}$$ 解得$x_2=0$, $y_2=4$.

∴ 求得平行四边形的第四个顶点为(2, −2)或(4, 0)或(0, 4).

1.28 设正方形相邻两顶点是A(2, 3)和B(6, 6). 求其余的顶点.

解: 设正方形其余的顶点坐标为$C(x、y)$, $D(x_1, y_1)$. A, B是正方形相邻两点, $|AB|=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}=5$.

正方形的对角线长$=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

由已知条件得C点坐标方程为:

$$(1)\quad\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=5,\\ \sqrt{(x-6)^2+(y-6)^2}=5\sqrt{2}.\end{cases}$$

由已知条件得D点的坐标方程为:

$$(2)\quad\begin{cases}\sqrt{(x_1-6)^2+(y_1-6)^2}=5,\\ \sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-3)^2}=5\sqrt{2}.\end{cases}$$

解方程组(1)求得C点坐标为(5, −1), (−1, 7).

解方程组(2)求得D点坐标为(9, 2), (3, 10).

∴所求顶点的坐标为(5, −1), (9, 2)或(3, 10), (−1, 7).

1.29 下列各对坐标表示一线段的两端点, 试求它们的中点:

(a) (7, 4), (3, 2); (b) (6, −4), (2, 2);

(c) (a, 1), (1, a); (d) (0, 0), $(0, \frac{2}{3})$;

(e) $(-3\frac{3}{8}, -7\frac{5}{8})$, $(2\frac{3}{4}, -4\frac{1}{2})$.

解：由中点坐标公式，得

(a) $(5, 3)$； (b) $(4, -1)$；

(c) $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$； (d) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$；

(e) $\left(-\frac{5}{16}, -\frac{97}{16}\right)$.

1.30—1.33 解略.

1.34 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点.

(a) $(-1, 2)$，$(-10, -1)$；

(b) $(11, 6)$，$(2, 3)$.

解：(a) $x_1=-1$，$y_1=2$，$x_2=-10$，$y_2=-1$，

$\lambda_1=1/2$，$\lambda_2=2$.

M_1： $$x=\frac{-1+1/2\times(-10)}{1+1/2}=-4,$$

$$y=\frac{2+1/2\times(-1)}{1+1/2}=1;$$

M_2： $$x=\frac{-1+2\cdot(-10)}{1+2}=-7,$$

$$y=\frac{2+2\cdot(-1)}{1+2}=0;$$

(b) $x_1=11$，$y_1=6$，$x_2=2$，$y_2=3$，$\lambda_1=\frac{1}{2}$，

$\lambda_2=2$.

M_1： $$x=\frac{11+1/2\times 2}{1+1/2}=8,$$

$$y=\frac{6+1/2\times3}{1+1/2}=5.$$

M_2: $\quad x=\frac{11+2\times2}{1+2} \qquad y=\frac{6+2\cdot3}{1+2}=4.$

1.35 点C(2, 3)将线段$\overline{AB}$分为1:2. 如已知点A的坐标为(1, 2), 求点B的坐标.

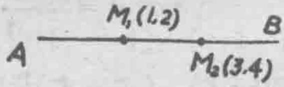
解: $x=2$, $y=3$, $x_1=1$, $y_1=2$, $\qquad \lambda=\frac{1}{2}$.

$$2=\frac{1+1/2\times x_2}{1+1/2}, \qquad x_2=4;$$

$$3=\frac{2+1/2\times y_2}{1+1/2}, \qquad y_2=5.$$

∴所求点B的坐标为(4, 5).

1.36 线段$\overline{AB}$被点M_1(1, 2)和M_2(3, 4)分成相等的三部分. 求点A和B的坐标.



1.36题

解: 在线段$\overline{AM_2}$部分求A点的坐标:

$x=1$, $y=2$, $x_2=3$,

$y_2=4$, $\lambda=1$.

$$1=\frac{x_1-1\cdot3}{1+1}, \quad x_1=-1; \qquad 2=\frac{y_1+1\cdot4}{1+1}, \quad y_1=0;$$

在线段$\overline{BM_1}$部分求B点的坐标:

$x=3$, $\quad y=4$, $\quad x_2=1$, $y_2=2$, $\quad \lambda=1$.

$$3=\frac{x_1+1\cdot1}{1+1}, \quad x_1=5; \qquad 4=\frac{y_1+1\cdot2}{1+1}, \qquad y_1=6.$$