

数学模型与建模算法

SHUXUE MOXING YU JIANMO SUANFA

主 编 刘红良 副主编 李成福



科学出版社

湘潭大学教材建设基金出版资助

数学模型与建模算法

主 编 刘红良

副主编 李成福

编 者 周光明 文志武

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以高等数学和工程数学为基础,在传授数学建模知识的同时,注重应用能力的培养,架起了数学与实际应用问题之间的桥梁.全书包括数学建模的基本理论与方法,内容涉及初等模型、规划模型、随机性模型、多元统计模型、微分方程模型、评价模型、图论及软件的使用等.

本书可以作为高等学校各专业学生数学建模课程的教材和参加数学建模竞赛的辅导书,还可以作为科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型与建模算法/刘红良主编. —北京:科学出版社,2016.7

ISBN 978-7-03-049365-1

I. ①数… II. ①刘… III. ① 数学模型-算法 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 159997 号

责任编辑:王 静/责任校对:张凤琴
责任印制:白 洋/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016年8月第一次印刷 印张:25 3/4

字数:519 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

随着计算机技术的迅速发展, 数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用, 而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等领域渗透, 数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分. 应用数学去解决各类实际问题时, 建立数学模型是关键的一步, 同时也是困难的一步. 建立数学模型的过程, 是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程. 要通过调查、收集数据资料, 观察和研究实际对象的固有特征和内在规律, 抓住问题的主要矛盾, 建立起反映实际问题的数量关系, 然后利用数学的理论和方去分析和解决问题. 这就需要深厚扎实的数学基础、敏锐的洞察力和想象力、对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面. 数学建模是联系数学与实际问题的桥梁, 是数学科学技术转化的主要途径, 数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视, 它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一. 为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才, 数学建模已经在大学教育中广泛开展, 国内外越来越多的大学正在进行数学建模课程的教学和参加开放性的数学建模竞赛, 将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次科技人才的一个重要方面, 许多院校正在将数学建模与教学改革相结合, 努力探索更有效的数学建模教学法和培养创新人才的新思路.

与我国高校的其他数学类课程相比, 数学建模具有难度大、涉及面广、形式灵活等特点, 为适应新形势要求, 湘潭大学数学建模指导小组根据竞赛过程中积累的教学经验编写了该书. 兼顾夯实数学建模理论, 强化数学建模方法应用, 注重写作能力培养, 该书编排涉及最优化、随机过程、多元统计分析、图论、微分方程、计算方法、层次分析法、模糊数学及数学软件包等内容. 相信该书的出版将对数学建模的教学和研究起到促进作用.

刘建州

2016 年 3 月

前 言

近几十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济管理等领域发挥越来越明显的作用,数学在自然和社会各个方面中的重要性已日益为人们所认识.要将数学方法应用到实际问题中去,首先要将所考察的实际问题归结为一个数学问题,即把这个问题的内在规律用数学符号、数学公式表示出来,然后利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究,得到定量的结果,以供人们作分析、预报、决策或者控制.这个过程就是通常所说的建立数学模型.

数学模型是连接数学理论和实际问题的桥梁,数学建模是应用数学解决实际问题的的重要手段和途径.不同的实际问题,往往有不同的数学模型,同一实际问题,也可能从不同的角度,采用不同的数学方法,得到完全不同的数学模型,这一特点决定了数学模型是一门实践性很强的课程.本书的几位作者,都从事过数学模型课程教学和担任过大学生数学建模竞赛的指导教师,在多年的教学实践中,积累了一些心得体会和经验,参考我校前期编写的教材及国内优秀的数学建模教材、教学辅导材料,在此基础上编写了本书,希望能对数学建模兴趣者提供帮助.

全书内容在阐述数学方法的同时,注重应用过程,强化创新意识,锻炼写作能力.因此,本书有利于训练学生的科学思维方法,培养学生的创新能力、应用能力及论文写作能力.

本书以我校多年前编写的实用数学建模教程为参考资料,编写过程中同时参阅了许多专家和学者的论文论著及大量网上相关资源,在此一并向他们致以诚挚的谢意!

感谢湘潭大学参加数学建模竞赛学生对出版本书的付出与贡献.在本书的出版过程中,得到了湘潭大学教务处、数学与计算科学学院和科学出版社许多同志的大力支持和帮助,在此一并表示感谢.

感谢湘潭大学教材建设基金对本书出版的资助.

由于作者的经验及时间有限,书中难免有错误和不妥之处,我们热切希望专家读者批评指正.

作 者

2016年3月

于湘潭大学数学与计算科学学院

目 录

序

前言

第一章 绪论	1
第一节 数学建模简介	1
第二节 数学建模的方法及步骤	2
一、数学建模的方法	2
二、数学建模步骤	4
第二章 初等模型	6
第一节 椅子问题	6
第二节 房屋隔热性能问题	7
第三节 雨中行走问题	9
第四节 状态转移模型	10
第五节 传送系统问题	13
第六节 包扎管道问题	14
第七节 人员疏散问题	16
第三章 规划模型	19
第一节 线性规划模型	19
一、问题的提出及标准形	19
二、线性规划模型的建立	21
第二节 运输问题	26
一、平衡运输问题的数学模型	26
二、不平衡运输问题	31
三、有转运的情形	31
第三节 指派问题	32
一、指派问题的数学模型	32
二、指派问题的匈牙利算法	33
三、一般指派问题	36
第四节 动态规划	36
一、基本概念和基本原理	36
二、动态规划的应用	37

三、建模实例	42
第五节 非线性规划	47
一、无约束非线性规划的求解	48
二、约束非线性规划的求解	51
三、几种特殊的非线性规划	53
四、建模实例	54
第六节 多目标规划模型	57
一、约束法	57
二、分层序列法	58
三、功效系数法	58
四、评价函数法	59
五、权系数的确定方法	60
六、建模实例	62
第四章 随机性模型	73
第一节 马氏链模型	73
一、马氏链简介	73
二、马氏链模型	81
第二节 排队论模型	88
一、排队论的基本概念	88
二、电话总机的设置	90
第三节 随机性存贮策略	97
一、需求是离散型随机变量	97
二、需求是连续型随机变量	101
三、 (s, S) 型随机存贮策略	103
第五章 时间序列分析	110
第一节 平稳时间序列分析	110
一、平稳时间序列定义	110
二、ARMA 模型的基本形式	111
三、ARMA 模型的平稳性与可逆性	113
四、ARMA 模型识别与定阶方法	113
五、模型的参数确定	115
六、模型的检验及优化	116
第二节 非平稳序列建模	119
一、ARIMA 模型的结构	119
二、ARIMA 建模	120

第六章 多元统计分析	128
第一节 主成分分析	128
一、主成分分析的原理及用途	128
二、主成分分析法的基本步骤	128
三、主成分分析的优点和缺点	130
第二节 因子分析	133
一、因子分析的原理及用途	133
二、因子分析的模型及基本步骤	133
三、因子分析与主成分分析的异同	137
四、运用 SPSS 实现因子分析	137
第三节 聚类分析	139
一、聚类分析的原理及用途	139
二、常见的聚类分析法	139
三、K-means 工具箱	143
第四节 相关性分析	148
一、相关性分析的原理及用途	148
二、主要相关性分析方法的介绍	149
三、相关系数数值的解释	151
第五节 回归分析	155
一、回归分析的原理及用途	155
二、一元线性回归模型	155
三、多元线性回归模型	160
四、非线性回归分析	161
五、回归分析与相关性分析的联系与区别	167
六、利用 MATLAB 程序实现最小二乘法的应用	167
第七章 灰色预测与数值插值	169
第一节 灰色预测	169
一、GM(1,1) 模型	169
二、GM(1,N) 模型	173
三、灰色 Verhulst 模型	174
四、灰色波形预测	175
五、灰色模型的检验	179
第二节 数值插值	181
一、Lagrange 插值	182
二、Hermite 插值	183

三、三次样条插值·····	184
第八章 微分方程建模 ·····	188
第一节 微分方程简介·····	188
第二节 物理原理建模·····	188
一、例 1: 红绿灯系统中, 如何合理设置黄灯时间? ·····	189
二、例 2: 弹簧振动的线性微分方程模型·····	190
第三节 人口模型·····	192
一、Malthus 模型·····	193
二、Logistic 模型·····	194
三、分龄人口模型·····	195
第四节 传染病模型·····	202
一、指数增长模型·····	203
二、SI 模型·····	204
三、SIS 模型·····	205
四、SIR 模型·····	207
五、传染病模型拓展·····	210
第五节 平衡点理论及建模·····	214
一、一阶微分方程的平衡点及稳定性·····	215
二、二阶微分方程的平衡点及稳定性·····	215
三、可再生资源的管理模型——以捕鱼模型为例·····	217
第六节 差分方程模型·····	221
一、差分方程简介·····	221
二、差分方程平衡点理论·····	222
三、人口预测模型·····	223
第九章 层次分析法 ·····	226
第一节 层次分析模型·····	226
一、层次分析法的基本步骤·····	226
二、层次分析法的优缺点·····	235
三、层次分析法特征向量 W 计算方法总结·····	235
四、例 1992 年美国大学生数模竞赛 B 题·····	236
第二节 层次分析法的改进·····	240
一、引言·····	240
二、改进的 AHP·····	240
三、实例·····	242
四、结论·····	244

第三节 残缺判断与群组决策	244
一、残缺判断处理方法	244
二、群组决策	247
第十章 模糊数学简介	250
第一节 模糊知识简介	250
一、基本概念	250
二、模糊集合的扎德表示法	251
三、模糊集的运算及性质	252
四、 λ 截集	253
五、模糊关系和模糊矩阵	254
六、模糊变换	256
第二节 隶属函数的确定方法	257
一、凸模糊子集的定义及性质	258
二、确定隶属函数的一般步骤	258
三、隶属度的模糊统计方法	259
四、常用的模糊分布	262
第三节 模糊聚类分析	264
第四节 模糊综合评判	270
一、模糊综合评判的数学原理 (一级模糊评判)	271
二、综合评判的五种具体模型	272
三、二级指标评判法	274
四、多级综合评判	275
第十一章 图论模型	279
第一节 图的基本概念	279
一、图的基本定义	279
二、图的矩阵表示	280
三、模拟图	282
第二节 树	282
第三节 最短路问题	284
一、Dijkstra 标号算法	285
二、Warshall-Floyd 方法	286
第四节 中国邮路问题	287
一、欧拉回路	287
二、中国邮路问题	288
第五节 旅行商问题	293
一、基本概念	293

二、旅行商问题的数学模型	295
三、旅行商问题的算法	295
四、多旅行商回路问题	303
第六节 匹配与覆盖	304
一、基本概念	304
二、偶图中的完全匹配	306
三、偶图的最大权匹配	308
第十二章 常用的 MATLAB 建模工具箱	311
第一节 MATLAB 基本命令	311
一、基本操作	311
二、MATLAB 绘图功能	313
三、M 文件	322
四、文件存取及数据读写	323
五、图像处理	325
第二节 MATLAB 优化工具箱简介	332
一、线性规划问题	332
二、foptions 函数	334
三、非线性规划问题	335
四、“半无限”有约束的多元函数最优解	342
五、极小化极大 (Minmax) 问题	346
六、多目标规划问题	348
七、最小二乘最优问题	351
八、非线性方程 (组) 求解	357
第三节 统计工具箱简介	359
一、概率分布	360
二、参数估计	363
三、描述统计	364
四、回归分析工具箱	374
五、假设检验	382
六、统计绘图	385
第四节 求解微分方程的命令	389
一、显式常微分方程	389
二、延迟微分方程	392
三、常微分方程的边界问题	394
参考文献	397

第一章 绪 论

第一节 数学建模简介

随着科学技术的进步,特别是计算机的广泛普及,数学的应用已不再局限于物理学等传统领域,生态学、环境科学、医学、经济学、信息科学及一些交叉科学都提出了大量有待解决的实际研究课题.解决这些实际问题,十分关键而又困难的一步就是要建立恰当的数学模型.建立数学模型的过程需要把错综复杂的实际问题抽象为简单合理的数学结构,要做到这一点,既要有创新能力,又要寻找合适的数学工具,从某种意义上讲,它是能力与知识的综合运用.在传统的大学教育中,往往比较重视知识的传授,而能力的培养则常常被忽略.为了使大学教学更加适应社会的需求,传统的教学内容与模式必须有所改革,在这方面各级领导和许多教育工作者都作了大量的努力和尝试,数学实验课程的开设和数学建模竞赛活动的举办就是其中之一.

近年来,数学建模竞赛题型相比几年前有许多创新和改进之处,更多来源于与人们密切相关的实际问题,复杂性和新颖性明显增加,比如涉及日常生活问题,如折叠桌椅的设计、烤箱托盘的优化和拔河比赛的最优安排等,同时涉及大量有关国民经济的问题,如医疗保险、城市规划、药物分析、卫星定位和人口预测等,甚至涉及科技热点问题,如输电阻塞管理、风电功率预测和制动器试验控制平台等.这类建模问题在教科书中找不到固定成熟的方法,对参赛者的计算机算法(包括统计方法、优化算法、数值分析、微分方程数值解及智能算法等)功底和数学软件应用能力提出了更高的要求.因此,指导小组成员有效地选择数学建模教学内容和方式及以培养学生创新能力为目标的培训模式改革和实践研究具有重要理论意义和实用价值.

20 世纪 80 年代初,数学建模开始进入我国大学课堂后,促成了数学建模竞赛的三大盛宴:全国大学生数学建模竞赛、美国大学生数学建模竞赛及“电工杯”数学建模竞赛.具体情况如下.

(1) 1992 年全国大学生数学建模竞赛开始举办,每年举办一次.多年来,数学建模教学和竞赛活动相互促进、健康发展.2013 年全国大学生数学建模竞赛参赛规模已达到 1326 所院校,共 23339 支队伍.

(2) 美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM), 是唯一的国际性数学建模竞赛,也是世界范围内最具影响力的数学建模竞赛,乃当今各类数学建模竞赛之鼻祖. MCM

始于 1985 年, ICM 始于 2000 年, 由 COMAP(the Consortium for Mathematics and Its Application, 美国数学及其应用联合会) 主办, 得到了 SIAM, NSA, INFORMS 等多个组织的赞助. 2014 年, 有来自美国、中国、加拿大、芬兰、英国、澳大利亚等 19 个国家和地区共 7783 支队伍参加此项赛事角逐, 其中包括来自哈佛大学、普林斯顿大学、西点军校、麻省理工学院、清华大学、北京大学、北京航空航天大学、浙江大学、南开大学、上海交通大学、华中科技大学、南京大学等国际知名高校的学生, 且 85% 以上的队伍来自中国学生.

(3) “中国电机工程学会杯” 全国大学生电工数学建模竞赛自 2003 年在中国电机工程学会的指导下开始举办, 每两年举办一次, 在 2013 年举办的第七届竞赛中有 198 所高校共 2417 支队伍参加.

此外, 还有中国统计教育学会主办的全国大学生统计建模大赛、中国自动化学会主办的 MathorCup & CAA 世界大学生数学建模竞赛、中国数学建模网络挑战赛及亚太杯数学建模竞赛 (APMCM) 等各级赛事, 此外还有计算机仿真大赛和物流仿真大赛等一系列竞赛.

目前开设各种类型数学建模课程的学校已超过千所. 在我国甚至世界范围内, 尚没有哪一门数学课程、哪一项学科性竞赛能取得如此迅猛的发展. 中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育改革实践” 给予评价.

第二节 数学建模的方法及步骤

一、数学建模的方法

一般说来建立数学模型的方法大体上可分为两大类: 一类是机理分析方法, 另一类是测试分析方法.

机理分析是根据对现实对象特性的认识, 分析其因果关系, 找出反映内部机理的规律, 建立的模型常具有明确的物理或现实意义. 具体包括:

- (1) 比例分析法——建立变量之间函数关系的最基本、最常用的方法;
- (2) 代数方法——求解离散问题 (离散的数据、符号、图形) 的主要方法;
- (3) 逻辑方法——数学理论研究的重要方法, 在决策等学科中以及社会学和经济学等领域的实际问题上都得到了广泛应用;
- (4) 常微分方程——解决两个变量之间的变化规律, 关键是建立瞬时变化率的表达式;
- (5) 偏微分方程——解决因变量与两个以上自变量之间的变化规律.

测试分析方法将研究对象视为一个“黑箱”系统, 内部机理无法直接寻求, 可以测量系统的输入输出数据, 并以此为基础运用统计分析方法, 按照事先确定的准

则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型。这种方法亦称为系统辨识(System Identification)。系统辨识是一门专门学科, 需要一定的控制理论和随机过程方面的知识。常用经典方法: 阶跃响应法、脉冲响应法、频率响应法、相关分析法、谱分析法、回归分析法和极大似然法、时间序列法、灰色预测法等。现代系统辨识方法主要包括如下五点。

1. 集员系统辨识法

集员系统辨识是假设在噪声或噪声功率未知但有界的情况下, 利用数据提供的信息给参数或传递函数确定一个总是包含真参数或传递函数的成员集(例如椭球体、多面体、平行六面体等)。不同的实际应用对象, 集员成员集的定义也不同。集员辨识理论已广泛应用到多传感器信息融合处理、软测量技术、通信、信号处理、鲁棒控制及故障检测等方面。

2. 多层递阶系统辨识法

多层递阶系统辨识方法的主要思想为: 以时变参数模型的辨识方法作为基础, 在输入输出等价的意义下, 把一大类非线性模型化为多层线性模型, 为非线性系统的建模提供了一个十分有效的途径。

3. 神经网络系统辨识法

由于人工神经网络具有良好的非线性映射能力、自学习适应能力和并行信息处理能力, 为解决未知不确定非线性系统的辨识问题提供了一条新的思路。

与传统的基于算法的辨识方法相比较, 人工神经网络用于系统辨识具有以下优点: ① 不要求建立实际系统的辨识格式, 可以省去对系统建模这一步骤; ② 可以对本质非线性系统进行辨识; ③ 辨识的收敛速度仅与神经网络的本身及所采用的学习算法有关; ④ 通过调节神经元之间的连接权即可使网络的输出来逼近系统的输出; ⑤ 神经网络也是系统的一个物理实现, 可以用在线控制。

4. 模糊逻辑系统辨识法

模糊逻辑理论用模糊集合理论, 从系统输入和输出的量测值来辨识系统的模糊模型, 也是系统辨识的一个新的和有效的方法, 在非线性系统辨识领域中有十分广泛的应用。模糊逻辑辨识具有独特的优越性: 能够有效地辨识复杂和病态结构的系统; 能够有效地辨识具有大时延、时变、多输入单输出的非线性复杂系统; 可以辨识性能优越的人类控制器; 可以得到被控对象的定性定量相结合的模型。模糊逻辑建模方法的主要内容可分为两个层次: 一是模型结构的辨识, 二是模型参数的估计。典型的模糊结构的辨识方法有: 模糊网格法、自适应模糊网格法、模糊聚类法及模糊搜索树法等。

5. 小波网络系统辨识法

小波网络是在小波分解的基础上提出的一种前馈神经网络口,使用小波网络进行动态系统辨识,成为神经网络辨识的一种新的方法.小波分析在理论上保证了小波网络在非线性函数逼近中所具有的快速性、准确性和全局收敛性等优点.小波理论在系统辨识中,尤其在非线性系统辨识中的应用潜力越来越大,为不确定的复杂的非线性系统辨识提供了一种新的有效途径,其具有良好的应用前景.

将这两种方法结合起来也是常用的建模方法,即用机理分析建立模型的结构,用系统辨识确定模型的参数.

二、数学建模步骤

由于实际问题的背景、性质及建模的目的等方面不同,因此,建模要经过哪些步骤并没有固定的模式和标准.一般来说数学建模的基本步骤包括以下几个主要部分(图 1.1).

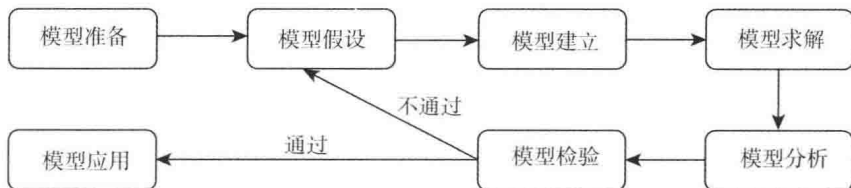


图 1.1 数学建模步骤图

1. 模型准备

首先需要对问题进行剖析,抓住问题本质和主要因素,确定问题的关键词,查阅相关资料和文献,了解问题的实际背景、原始数据及相关研究进展情况,获得关键资料,并初步确定研究问题的类型.所以,要明确问题中所给的信息点,把握好解决问题的方向 and 目的,仔细分析问题关键词和数据信息,同时可适当补充一些相关信息和数据.为接下来的模型建立研究基础.

2. 模型假设

根据问题对象的特征和建模的目的,对问题进行合理的简化,用精确的语言作出假设是建模的关键步骤.一般来说,一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题,即使可能,也很难求解.不同的简化假设会得到不同的模型.假设作得不合理或者过于简单,会导致模型失败或部分失败,于是应该修改和补充假设;假设作得过分详细,试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去,会使你很难甚至无法继续下一步的工作.通常作假设的依据,一是出于对问题内在规律的认识;二是来自对数据或现象的分析,亦可为二者之综合.作假设时既要运用与问题相关的物理、

化学、生物、经济等方面的知识,又要充分发挥想象力、洞察力和判断力,善于辨别问题的主次,果断地抓住主要因素,舍弃次要因素,尽量将问题清晰化和科学化。

3. 模型建立

基于所作的分析和假设,根据所提供的要求和信息,结合相关的数学基本原理和理论知识,建立一个关于问题中主要变量与主要因素间的数学规律模型,可用数学语言、符号进行描述和表示问题的内在现象和规律。但在建模过程中应注重创新,不要一味效仿,可以将多个知识点进行穿插和结合并进行改进和优化,体现模型的创新性。

4. 模型求解

在模型求解过程,会用到传统的数学方法,如微积分、微分方程、优化方法、统计分析等,同时也需要现代算法,如智能算法、复杂网络等,但目前,最广泛使用的是数学软件和计算机技术,如 MATLAB、Lingo、SPSS 等。有时还需要掌握一门编程语言或新的软件,所以需要具备针对实际问题学习新知识的能力,能够灵活应用新知识并将其与实际问题结合以对所建模型进行求解。

5. 模型分析

对所求的结果,针对问题的实际情况和意义进行分析。可以通过误差分析、灵敏度分析来确定模型解决实际问题的效果及实际应用的范围。通过误差分析,可以适当地调整模型,或提出误差产生的可能原因以及解决的方案;通过灵敏度分析,可以确定模型中主要变量和参数的误差允许范围,从而分析模型的健壮性与鲁棒性。

6. 模型检验

将数学上分析的结果转回到实际问题中,并用实际的现象、数据与之比较,检验模型的合理性和适用性。这一步对于建模的成败至关重要。模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际,问题通常出在模型假设上,应修改、补充假设,重新建模。有些模型要经过几次反复,不断完善,直到检验结果获得某种程度上的满意。

7. 模型应用

将实际问题转化为数学模型进行求解并证明,在进行大量研究和演绎后,最终还需将其回归到实际,看其是否具有合理性和可行性。这需要用实际信息或数据进行验证。

应当指出,并不是所有建模过程都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明。建模时可采取灵活的表述方式。

第二章 初等模型

第一节 椅子问题

四条腿长度相等的椅子放在高度连续变化的不平整地面上, 四条腿能否同时着地?

假设椅子中心不动, 每条腿的尖端点为几何学上的点, 用 A, B, C, D 表示, AC, BD 分别看作坐标系中的 x 轴、 y 轴. θ 表示 AC 转动后与初始位置 x 轴的夹角, $g(\theta)$ 表示 A, C 两腿与地面距离之和, $f(\theta)$ 表示 B, D 两腿与地面距离之和, 当地面光滑时 $f(\theta), g(\theta)$ 皆为连续函数. 如图 2.1 所示.

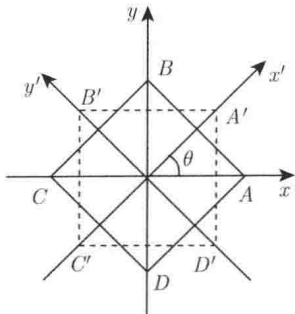


图 2.1 椅脚的坐标图

模型分析 由于三条腿总能着地, 所以 $f(\theta)g(\theta) = 0$. 不妨设 $\theta = 0$ 时, $g(0) = 0, f(0) > 0$, 这样椅子问题抽象成: 已知 $f(\theta), g(\theta)$ 为连续函数, $g(0) = 0, f(0) > 0$, 且对任意 θ 都有 $g(\theta) \cdot f(\theta) = 0$. 求证存在 θ_0 , 使

$$g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

证明 令 $h(\theta) = g(\theta) - f(\theta)$, 显然 $h(0) = g(0) - f(0) < 0$.

将椅子转动 $\frac{\pi}{2}$, 则有 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 从而

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

又由于 $h(\theta)$ 连续, 由连续函数零点存在定理, 必定存在 $\theta_0, 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 使 $h(\theta_0) = 0$, 即 $g(\theta_0) = f(\theta_0)$, 由 $g(\theta_0) \cdot f(\theta_0) = 0$ 可得

$$g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0.$$