绪 论

在金融市场和保险实务中面临很多相依风险，如中国的 A 股市场，有利空或利好消息时每次涨跌基本都能同步，尤其是板块之间，一般龙头股开始涨或跌，其他股一般都同时跟着涨或跌，也就是说同一板块的各股之间的涨跌有一定的相依关系。类似的，同一起交通事故中的乘客之间的受伤程度；面对同一起暴乱，无辜受伤市民之间的受伤程度；同一起意外，如地震、海啸等巨灾发生时，在同一区域损失的财产和死亡人员是正相依的。据报道，夫妻双方之间的寿命也有一定相关性，根据夫妻感情深浅有可能正相依，也有可能负相依。我们把这种在整个过程中风险之间保持一定关联的关系称为相依关系。

保险是化解风险的一种有效手段之一，在众多的保险实物问题中，如何确定相依风险的序关系，如何确定相依风险保单之间的保单限额和保单豁免额，如何确定相依风险下的破产概率以及如何确定由静态到动态风险之间的风险度量等等问题都是近年来保险界研究的热点。本书根据笔者在相关领域的研究成果，将上述相依性风险在保险中的应用方面做一个全面的阐述。

1.1 随机序理论在相依风险领域的研究现状

近年来，随着随机序和随机不等式在经济、金融、保险等各个领域的广泛运用，越来越多的专家学者对其产生了兴趣，特别是在管理学、统计学、可靠性系统、排队论以及精算度量等方面更是取得了丰硕的成果，Kaas et al.（2001），Muller & Stoyan（2002），Shaked & Shanthikumar（2007）的专著对这些领域的巨大成果都做了详细的论述和总结。但运用随机序理论研究相依风险的文章非常少，早期的文献 Shanthikumar & Yao（1991）和 Kijima & Ohnishi（1996）定义联合随机序考虑相依风险之间的关系，用于区分独立风险之间的随机序关系，此后，绝大部分学者主要集中在运用 copula 理论来研究相依风险之间的关系，Li & You（2012，2014）利用 copula 刻画了大量风险之间的相依关系，并研究了这种风险结构下的保险应用问题。2012 年，Cai & Wei（2012a，b）用随机序关系刻画了一种随机正相依风险之间的关系，并研究了它的性质及在保险中的应用。

我们在《The High Degree Stochastic Order of Real Valued Random Variables》这篇文章中建立了实值随机变量的高阶随机序关系，这种高阶序关系可以准确地刻画投资者对复杂风险的偏好关系，并且得到了很好的经济效用解释，这种高阶随机序关系可以用来刻画复杂的随机相依风险。

1.2　相依风险下保单最优分配研究现状

在保险实务中存在这样一类基本的实务问题，假设某投保人面临有 n 个随机风险，我们分别记为 $X_1,\ldots,X_n$，按照保险协议，投保人通过支付保费，可以从保险人那里获得部分承保。

第一种保险方式（**保单限额方式**）：通过保险公司的承保，假设保单持有人现在可以享有总数 $ $l>0$ 的权限作为保单限额任意分配给 n 个风险，记 $l_1,\ldots,l_n$，其中 $l_i(l_i\geqslant 0)$是分配给这 n 个风险的每个限额，即 $l_i(l_i\geqslant 0)$表示第 i 个风险 X_i 的保单限额。我们把满足$l_1+...+l_n=l$这样条件的 n–元数组称为一个可允许的保单限额分配策略，用$A(l)$表示所有这种 n–元数组组成的集合。如果选定了某组 $\vec{l}=(l_1,\ldots,l_n)\in A(l)$，那么保险公司承保的风险为：

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\wedge l_i)$$

则投保人残留的总损失为：

$$\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}(X_i\wedge l_i)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-l_i)_+$$

考虑投保人在某种风险度量方式下财富的最大化问题：

$$\max_{\vec{l}=(l_1,\ldots,l_n)}\rho\left[\omega-\sum_{i=1}^{n}(X_i-l_i)_+\right]$$

其中，ρ 表示某种风险度量方式，ω 表示保单持有人的初始财富。

第二种保险方式（**保单豁免方式**）：通过保险公司的承保，假设将保单持有人现在可以享有总数 $ $d>0$的豁免额分配到这些风险中，我们用$(d_1,\ldots,d_n)$表示分配给每个风险的豁免额，同样的，对所有的 i，$d_i\geqslant 0$ 且满足 $d_1+\ldots+d_n=d$ 这样条件的 n–元数组，我们称之为可允许的

保单豁免额分配策略，以 $A(d)$ 表示所有这种 n-元数组组成的集合。如果选定某组 $\vec{d}=(d_1,\ldots,d_n)\in A(d)$,那么保险公司承保的风险为

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-d_i)_+$$

则投保人残留的总损失为

$$\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}(X_i-d_i)_+=\sum_{i=1}^{n}(X_i\wedge d_i)$$

同样的考虑投保人在某种风险度量方式下财富的最大化问题：

$$\max_{\vec{d}=(d_1,\ldots,d_n)}\rho\left[\omega-\sum_{i=1}^{n}(X_i\wedge d_i)\right]$$

其中 ρ 表示某种风险度量方式，ω 表示投保人的初始财富。

最近几年，精算界有许多国内外的专家学者对保险业务中基本的两种保险方式，保单限额和保单豁免额的最优分配问题做了相关的研究：

（1）Cheung（2007），Hua & Cheung（2008b）在期望效用理论下得到如下结果：

如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是相互独立的，ρ 是增凹期望效用函数下的风险度量方式，则对每对 (i,j) ,有：

$$X_i\leqslant_{hr}X_j\Rightarrow l_i\leqslant l_j,\ d_i\geqslant d_j$$

如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是共同单调的（表示风险之间的一种极其糟糕的结构关系），则对每对 (i,j) ,有：

$$X_i\leqslant_{st}X_j\Rightarrow l_i\leqslant l_j,\ d_i\geqslant d_j$$

可见，Cheung（2007），Hua & Cheung（2008）分别从投保人角度和保险人角度考虑了保单限额和保单豁免额的随机比较问题。

（2）Zhuang，et al（2009）在失真风险度量下得到：

如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是相互独立的，则对每对 (i,j) ，

当失真函数是增凹函数时，$X_i\leqslant_{st}X_j\Rightarrow l_i\leqslant l_j$；

当失真函数是增凸函数时，$X_i \leq_{st} X_j \Rightarrow d_i \geq d_j$。

（3）Xu & Hu（2012）提出，如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是相互独立的，当失真函数是一般的增函数时，对每对 (i,j)，有：

$$X_i \leq_{rh} X_j \Rightarrow l_i \leq l_j$$

$$X_i \leq_{hr} X_j \Rightarrow d_i \geq d_j$$

可见，Zhuang，et al（2009），Xu & Hu（2012）在失真风险度量框架下，考虑了独立风险模型保单限额和保单豁免额的随机比较问题，并分析了共同单调风险（表示风险之间的一种极端的结构关系）下的保险分配问题，得到了一些随机比较的结果。

（4）Lu & Meng（2011）考虑了在期望效用理论下，当效用函数是一般的增函数时，如果 $X_1,\ldots,X_n$ 是相互独立的，则对每对(i,j)，有：

$$X_i \leq_{lr} X_j \Rightarrow l_i \leq l_j，\ d_i \geq d_j$$

Lu & Meng（2011）在独立风险模型下弱化了序关系，并在特殊分布族下求得了保单分配的最优显示解。

（5）Hua & Cheung（2008a），Zhuang，et al（2009），Hu & Wang（2010）等人的研究还考虑了混合风险带贴现情形下保单持有人对保单限额和保单豁免额的最优分配问题。

我们在《Stochastic Comparisons and Optimal Allocation for Policy Limits and Deductibles》这篇文章中已经考虑过弱化风险相依条件的保单限额和保单豁免额的最优分配问题，我们运用随机序作为工具，在期望效用理论下，从保单持有人的角度和从保险人的角度考虑如何分配保单限额和保单豁免额，使得其期望效用最优，在风险是独立的条件下得到解析解。我们的研究弱化了对风险随机比较的条件，丰富了保单研究成果。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.3 相依风险下破产概率研究现状

破产论研究是风险论的核心内容之一。概率界对破产论的研究也有近百年的历史了。破产论的研究溯源于瑞典精算师 Filip Lundberg 于 1903 年发表的博士论文。经典的风险理论中，早期的工作主要集中在对于破产概率 Ψ 的研究。由于保险公司在运作中可能遇到各种各样问题，所以往往需要通过对概率或统计模型进行修改以及附加条件，使得模型更接保险公司的实际运作，这使得对于破产概率的研究更加富有挑战性，所以破产概率的研究一直以来都是人们关注的焦点。例如 Beekman（1969）给出了著名的 Beekman 卷积公式，它在风险理论的研究中具有举足轻重的作用，也是后人做破产概率估计的基础性工具。由于 Lundberg 早期的工作没有严谨的数学推导，不符合现代数学的严格标准，以 Harald Cramèr 为首的瑞典学派将 Lundberg 的工作与数学相结合，使得破产概率的研究奠立在坚实的数学基础之上。Cramer 之后破产论研究中最令人瞩目的是方法论的改进，Feller 和 Gerber 引入的更新论证技巧和鞅证明技巧已成为研究经典破产论的主要数学工具。近期大量研究文献所研究的模型虽较经典的破产模型有不同程度的推广，但所使用的方法却基本上不外乎这两种方法。至今这两种方法已成为研究经典破产论的主要数学工具。

在经典的 Cramèr–Lundberg 模型中，保费过程是时间的线性函数，大量的研究文献对这个模型中保费收取和理赔过程进行了推广。早在 1991 年，Grandell 就提出了随机保费模型。近年来又有大量的业界人士对这种随机保费模型进行研究，如 A. V. BOIKO（2002），Temnove

(2004)，张志德（2007）及林静强（2008）等人的研究，但这些研究者给的模型跟实际情况还是存在很大差距。

近年来，大量随机保费的研究文献中为了数学上的处理方便或者为了得到破产概率的显示解，往往都是假定索赔次数与所收到的保单数互相独立或者有某种简单的相依关系，但在实际背景中，在某个固定时间段内，索赔次数与所收到的保单数并不独立，更多情形下索赔次数是所收到的保单数的一个疏化过程。基于此点考虑，我们主要研究了一类更一般的相依风险关系下的随机保费风险模型——稀疏赔付过程下的破产概率问题。在经典的 Cramèr-Lundberg 模型中，保费过程是时间的线性函数，本书对随机保费模型考虑稀疏赔付过程下的破产概率问题进行研究，我们假定保单到达为 Poisson 过程，而描述索赔发生的计数过程为保单到达过程的 p-稀疏过程。首先我们得到生存概率所满足的积分-微分方程，用鞅方法得到终极破产概率的上界。特别地，当保费收取额与理赔量服从特殊分布时，我们得到了显式表达式。

1.4 相依风险下风险度量研究现状

关于风险度量的研究除了前面提到的期望效用理论外，我们把风险度量分两大类，一类是静态风险度量，一类是动态风险度量。

静态风险度量最早是 Duffie & Pan（1997）提出的 VaR 风险度量，后来成为公司度量风险的基本方式，考虑到 VaR 不容易识别出资产组合的集中风险，Jaschke（2001）用 CTE 和 TVaR 对 VaR 度量方法进行修改。1997 年 Artzner et al. 提出了 Coherent 风险度量，Artzner et al.（1997、1999）研究的还是在有限空间考虑，意味着风险是有界的，Delbaen（2002）将风险空间扩充到了无限维。Coherent 这种广为认可的风险度量公理体系能更好的反映人们对各类风险的态度。Frittelli（2000）、Heath（2000）、Frittelli & Gianin（2002，2004）分别在有限和无限维空间上将 Coherent 风险度量弱化，在 Coherent 风险度量基础上拓展出 Convex 风险度量，它更一般化了人们的理性风险态度，实际上人并不是纯粹的理性人，决策还受到人的复杂的心理机制的影响。Wang（1998）将主观概率反转，提出 Distorted 风险度量刻画个体非理性的行为。

对于动态情形，Coquet et al（2002）首先提出动态 Coherent 风险度量，Rosazza（2004）利用 g-期望（Peng 1997）给出了一些动态风险度量的例子，Detlefsen & Scandolo（2005）提出动态 Convex 风险度量。

笔者曾建立了一种由静态到动态风险度量的平滑方式，通过一个动态平滑性将静态风险度量方式过渡到动态风险度量，建立了 Coherent、Convex、Distorted 三种静态与动态风险度量之间的关系，简化了由静态到动态的转化。

随机序理论在相依风险领域研究

2.1 随机序理论介绍

近五十年来，随机序理论得到了飞速的发展，随着随机序和随机不等式在经济、金融、保险等各个领域的的广泛运用，越来越多的人对其产生了兴趣，特别是在统计学、可靠系统、排队论以及精算学等方面更是取得了丰硕的成果。

2.1.1 随机序的发展及其在保险领域的贡献

现代经济学领域，用随机变量来表示不确定性（或叫风险），通过 Von Neumann & Morgenstern（1947）的效用函数理论来定量地描述这种不确定性是一种比较流行的做法。效用理论在现代经济学理论中占有非常重要的地位，这套理论通过五条公理确定了一种由效用函数描述的风险秩序，为决策者建立了风险偏好关系（也就是对随机变量建立了一种不等式关系）。证明如下：

设随机变量 X 和 Y 代表决策者面临的两个随机的风险，$\preccurlyeq$ 表示对风险的偏好，即 $X \preccurlyeq Y$ 表示在风险 X 与 Y 中 X 优于 Y。

偏好应满足的基本公理条件如下：

EU1 完备性：对于两个随机风险 X 和 Y，

$$X \preccurlyeq Y, Y \preccurlyeq X, X \sim Y$$

中总有有一种关系成立。

完备性假定保证了消者具备选别判断的能力。

EU2 $\preccurlyeq$ 满足反身性，传递性与连通性。

EU3 $\preccurlyeq$ 在弱收敛的拓扑下是连续的。

EU4 若$S_X(x) \preccurlyeq S_Y(x)$则 $X>Y$,其中$S_X(x)=P\{X>x\}$表示 X 的生存函数或叫做反向累积分布函数。

EU5 对概率混合的保序性：设 $X \preccurlyeq Y, Z$ 任意一个风险，对任意的 $p \in [0,1]$,X_1和Y_1是两个新的风险，它们的生存函数分别是

$$S_{X_1}(x) = p\, S_X(x) + (1-p)\, S_Z(x)$$

和

$$S_{Y_1}(x) = p\, S_Y(x) + (1-p)\, S_Z(x)$$

则 $X_1 \preccurlyeq Y_1$

根据这五条公理，Von Neumann & Morgenstern（1947）证明了存在效用函数 u，使得 $X \preccurlyeq Y$ 的充要条件是期望效用满足：

$$E[u(-Y)] \leqslant E[u(-X)]\text{。}$$

Gooverts et a1（1982），Kass et al（1994）等都论述了使用效用函数排序的有关理论问题。Yarri（1987）修改了 Von Neumann & Morgenstern 的公理体系，将 EU1 到 EU5 中的生存函数换成其相应的广义反函数（分位数函数），得到了五条对偶公理，这时公理 1 到公理 3 的意义保持不变，公理 5 的对偶公理为：

DU5. 对结果混合的保序性：设 $X \preccurlyeq Y$，Z 是任一随机风险，对任意的 $p \in [0,1]$，X_1 和 Y_1 是两个新的风险，其生存函数的广义反函数分别是

$$S_{X_1}^{-1}(x) = p\,S_X^{-1}(x) + (1-p)\,S_Z^{-1}(x)$$

和

$$S_{Y_1}^{-1}(x) = p\,S_Y^{-1}(x) + (1-p)\,S_Z^{-1}(x)$$

则 $X_1 \preccurlyeq Y_1$

Yarri（1987）证明了对偶公理 DU5 等价于下面的公理：

DU5* 对结果混合的保序性：如果 X，Y 和 Z 是共同单调的随机变量，且 $X \preccurlyeq Y$，则对任意的 $p \in [0,1]$，

$$pX + (1-p)Z \preccurlyeq pY + (1-p)Z$$

根据修改后的五条对偶公理，Yarri 证明了在对偶公理意义下，存在一种由失真（distortion）函数 g(从[0,1]到[0,1]上的非减函数）确定的失真风险测度

$$H_g[X] = \int_0^{\infty} g[S_X(t)]dt$$

在这种风险测度描述的风险秩序下 $X \preccurlyeq Y$ 成立的充要条件是

$$H_g[X] \leqslant H_g[Y]$$

由于在本章 2.4 节要用到实值随机变量的失真风险度量知识，加上在后续章节中多次涉及到这个概念，在此，我们对这些相关知识和概念做一个简单的介绍和几个必要的注解。

定义 2.1.1 记 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 是概率空间 (Ω,F,P) 上的两个随机变量，我们称它们是共同单调的（comonotonic），如果

$$[X(\omega_1) - X(\omega_2)][Y(\omega_1) - Y(\omega_2)] \geqslant 0,\ \text{a. s.}$$

记 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ 是概率空间 (Ω,F,P) 上一列可数的随机变量序列，如果对每对 (X_i, X_j) 是共同单调的，则称 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ 是共同单调的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

注 2.1.1 如果（X_1 ,…, X_n）是共同单调的，并且实值函数 g_1 ,…, g_n 全部是增的或者全部是减的，则（$g_1(X_1)$,…, $g_n(X_n)$）也是共同单调的。

定义 2.1.2（Denneberg（1994））容度是指满足以下两个条件的集函数 $\nu:2^{\Omega} \to R^{+}$：

(*i*) $\nu(\Phi)= 0, \nu(\Omega)= 1$ 和

(*ii*) $\nu(A) \leqslant \nu(B)$ 对任意的 $A,B \subseteq \Omega$ 且 $A \subseteq B$。

一个容度称为是下模的，如果对任意给定的 $A,B \subseteq \Omega$，有 $\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) \leqslant . \nu(A) + \nu(B)$ 成立，

令 ν 表示一个容度 $\nu:2^{\Omega} \to R^{+}$，X 是可测空间 (Ω,F) 上的一个可测函数，则 X 关于容度 ν 的 Choquet 积分定义如下

$$\int_{\Omega} X d\nu = \int_{0}^{+\infty} \nu\{\omega:X(\omega) > x\} dx + \int_{-\infty}^{0} [\nu\{\omega:X(\omega) > x\} - \nu(\Omega)] dx$$

定义 2.1.3 失真函数 $g:[0,1] \to [0,1]$ 是指满足 $g(0)= 0$，$g(1)=1$ 的一个非减函数 $g(1)= 1$。对非负随机损失 X，它的生存函数记为 $S(x)$，关于失真函数 g 的失真风险度量我们是这样定义的：

$$H_g(X)= \int_{0}^{+\infty} g(S(x))dx \tag{2.1.2}$$

如果我们令 $\nu = g^{\circ}P$，则 $H_g(X)=\int_{\Omega} X d\nu$ 就是一个 Choquet 积分，ν 称为失真概率。

假定 (Ω,F,P) 是一个标准的无原子的概率空间，我们记集合 L 是具有以下两条性质的所有金融头寸组合：

(*i*) 对所有的 $X \in L, X \wedge a_2 - X \wedge a_1 \in L$，其中 a_1 和 a_2 可以取实数或无穷；

(*ii*) 对任意的实数 $a \in R, aX$ 和 $X + a \in L$。

定理 2.1.1（Wu & Zhou（2006））令 L 表示具有性质 (*i*),(*ii*) 的随机

变量集合，对保费原理 $H:L \to -R$ 来说，存在一个 P -确定的单调集函数 $\nu: 2^{\Omega} \to R^{+}$，使得对所有的 $X \in L$，有：

$$H(X) = \int_{\Omega} X d\nu = \int^{+\infty 0} \nu\{\omega: X(\omega) > x\} dx + \int^{0-\infty} [\nu\{\omega: X(\omega) > x\} - v(\Omega)] dx \tag{2.1.3}$$

当且仅当 H 满足如下三条性质：.

（1）有限性：$H[I_{\Omega}] < \infty I_{\Omega} \in L$，其中 I_{Ω} 是 Ω 的示性函数。

（2）单调性：如果对所有 $\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ 成立，则 $H(X) \leqslant H(Y)$。

（3）共同单调可加性：一个保费原理 H 称为共同单调可加的，对 L 中任意可数个共同单调风险 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 且满足 $|\sum_{n=1}^{\infty} X_n| < \infty$，下式成立：

$$H[\sum^{\infty n=1} X_n] = \sum^{\infty n=1} H[X_n] \tag{2.1.4}$$

注：定义 2.1.2 根据 Wang（1997）的研究文章，我们知道对任意一个 Choquet 积分，存在唯一一个失真函数 g，使得：

$$\nu = H[I_{\Omega}](g^{\circ}P) \tag{2.1.5}$$

注：定义 2.1.3 根据不同的失真函数，我们可以得到几种常用的风险测度，如 $g_V(t)$ 产生传统的 VaR 测度，$g_c(t)$ 产生条件尾期望（CTE）或者在连续分布下产生 Tail-VaR，如下所示：

（1）

$$g_V(t) = \begin{cases} 1, 1-\alpha < t \leqslant 1 \\ 0, 0 < t \leqslant 1-\alpha \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$H_V(X) = \int_0^{+\infty} g_V(S(x)) dx = \int_0^{V_\alpha} dx = V_\alpha$，其中 V_α is $F_X^{-1}(\alpha)$

(2)

$$g_c(t)=\begin{cases}1,1-\alpha<t\leqslant 1\\ \dfrac{t}{1-\alpha},0<t\leqslant 1-\alpha\end{cases}$$

$$H_c(X)=CTE_\alpha=E[X\mid X>F_X^{-1}(\alpha)]$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\int^{1\alpha}F_X^{-1}(t)dt$$

接下来我们用一个简单的方法可以证明以下一个常用的结论：

定理 2.1.2 失真风险测度 $H_g(X)=\int_0^{+\infty}g(S(x))dx$ 是次可加的，当且仅当 g 是一个凹失真函数。

证明：

由于 $$H_g(X)=\int_0^{+\infty}g(S(x))dx\triangleq\int_\Omega Xd\nu$$

其中 $\nu=g^\circ P$ 是一个容度，则 $H_g(X)$ 是次可加的，当且仅当 ν 是下模的（See，Denneberg，(1994) Theorem 6.3)，则我们只要证明

$$g(P(A\cup B))+g(P(A\cap B))\leqslant g(P(A))+g(P(B))\qquad(2.10)$$

成立。

由此可知： $$P(A\cap B)\leqslant P(A),P(B)\leqslant P(A\cup B)\qquad(2.1.1)$$

且

$$\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}=\frac{P(A)+P(B)}{2}\qquad(0.6)$$

成立。

又由于 (Ω,F,P) 是一个标准的无原子的概率空间，所以等价于 g 是一个凹函数。

注：2.1.3. 如果 g 是一个凹的失真函数，则 $H_g(X)=\int_0^{+\infty}g(S(x))dx$ 是

一个一致风险测度。

关于一致风险测度的相关研究可以参考 Artzner et al.（1999）和 Delbaen（2002）等人的相关研究文献。

Wang & Young（1998）论述了非负随机风险在 Yarri（1987）对偶理论框架（即失真风险测度）下的排序问题。

随机变量之间的这种不等式关系反映的是随机变量之间的一种序关系。1952 年，Hardy，Littlewood & Po´ lya 发表的相关专著，是对随机序最早的研究，他们研究了两个非负随机变量的一阶停止—损失序关系。

综合以上研究成果，概括地说，只要满足相应的公理，在风险集合上定义的每一个全序都能找到一个效用函数（或失真函数）使得风险之间的比较等价于相应的期望效用值（或失真风险测度）的比较；反过来，把一批对某些风险的危险程度具有相同看法的决策者放在一起，用它们所代表的一类效用函数（或失真函数）可以在风险集合上定义出一种偏序，这种偏序能反映它们在风险集上的共同偏好。

令 F 表示 R 上一族函数集，我们称一个序关系 $X \leqslant Y$ 是由函数族 F 生成的，如果满足对所有的 $f \in F$,有：

$$E[f(X)] \leqslant E[f(Y)]$$

成立（我们假设所有的期望都是存在的），则我们把这种依赖函数族 F 的序关系记为：

$$X \leqslant_F Y$$

注意到这种序关系 $X \leqslant_F Y$ 只跟随机变量 X 和 Y 的边际分布有关，而没有考虑它们之间的联合分布，从经济角度来看，序关系 $X \leqslant_F Y$ 考虑的是一个投资者具有的 Von Neumann- Morgenstern 效用函数 u，则 $X \leqslant_F Y$ 表示效用函数属于 F 的投资者相比于对风险 X 来说，更偏好风

险 Y。根据效用函数的不同，可得到以下几种常见序如下所示。（在以下章节我们用增表示非减，用减表示非增）

由 $F_{FSD}=\{f:f(x)$ 是关于 x 的增函数$\}$ 生成的随机序称为一阶随机控制；

由 $F_{MPC}=\{f:f(x)$ 于 x 的凹函数$\}$ 生成的随机序称为 mean- preserving contraction（或称为凹序）；

由 $F_{SSD}=\{f:f(x)$ 于 x 的增凹函数$\}$ 生成的随机序称为二阶随机控制；

由 $F_n=\{f:(-1)^{k+1}f^{(k)}(x)\geq 0, k=1,\ldots,n\}$，（其中 $f^{(k)}$ 表示函数 f 的 k 阶导数）生成的随机序称为 n 阶随机控制（$n=1,2,\ldots$）。

近年来，随着随机序和随机不等式在经济、金融、保险等各个领域的的广泛运用，越来越多的人对其产生了兴趣，特别是在统计学、可靠系统、排队论以及精算度量等方面更是取得了丰硕的成果，如 Marshall & Proschan（1965）、Proschan（1965）、Arnold & Villaseflor（1986）、Bock et al.（1987）、Ma（1998，2000）、Korwar（2002）；Mi et al.（2008）、Zhao & Balakrishnan（2009）和 Mao et al.（2010）等等文献，Kaas et al.（1994，2001）、Müller & Stoyan（2002）、Shaked & Shanthikumar（1994，2007）等人的专著对这些领域取得的巨大成果做的详细的论述和总结。

随机序作为一种重要的研究方法，在保险领域，受到了越来越多的重视，也成为精算界一个不可或缺的决策手段，他为决策者提供了一种判断优劣的行之有的效方法。如 Cheng & Pai（2003），Tsai（2006）等用随机序对破产概率比较的研究；Hürlimann（1998），Myers & Read（2001），Laeven & Goovaerts（2004），Furman & Zitikis（2008），Dhaene et al.（2011）等运用随机序处理资本分配问题；Van Heerwaarden et al.（1989）Denuit & Vermandele（1998，1999），Cai et al.（2011），Cai & Wei（2012b）等运用随机序处理再保险策略选择问题，Cheung（2007）和 Hua & Cheung（2008a，b）Zhuang，et al（2009）Hu & Wang（2010）Lu & Meng（2011）等运用随机序处理保单限额和豁免额的最优分配问题等，我们在此不一一赘述了。

2.1.2　相关问题及研究现状

在大量的随机序中，由于停止—损失序在精算领域的广泛运用，使得保险界对其尤为关注，1977 年，Bühlmann 等人首次基于停止—损失保费原理研究了风险之间的停止—损失序。之后，Goovaerts 等人针对实际，提出在随机变量高阶矩相等的情形下对高阶停止—损失序进行研究的必要，这一研究陆续推广了一阶停止—损失序的理论，相关的文献可以参考 Goovaerts et al.（1990），Kaas & Hesselager（1995），Hürlimann（1995），Cheng & Pai（1999，2003）等等。

Cheng & Pai 1999 年扩展了一阶停止—损失变换，引入 n 阶停止—损失变换的概念，通过这种变换，对 n 阶停止—损失序的性质做了一个系统的研究。

定义 2.1.4（Cheng & Pai（1999））假定非负随机变量 X 分布函数为 $F(x)$，生存函数 $S(x)=1-F(x)$，并且假设 $E(X^n)<\infty$，

令

$$\Pi^{(n)}(u)=E[\{(X-u)_+\}^n],u\geqslant 0,n=1,2,\dots,$$

其中

$$(x-u)_+=\begin{cases}0, & x\leqslant u\\ x-u, & x>u\end{cases}$$

特别的 $\Pi^{(0)}(u)=S(u)=1-F(u)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com