全国初中数学竞赛辅导

（讲座精选及模拟测试）

1999年全国初中数学竞赛命题组 编

上海科学技术出版社

全国初中数学竞赛辅导

（讲座精选及模拟测试）

1999年全国初中数学竞赛命题组 编

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

全国初中数学竞赛辅导

（讲座精选及模拟测试）

1999年全国初中数学竞赛命题组编
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号　邮政编码 200020）
新华书店上海发行所经销　上海出版印刷有限公司印刷
开本 787 × 1092　1/16　印张 20　字数 476 000
2000年11月第1版　2001年7月第2次印刷
印数：5 201－9 200
ISBN 7-5323-5594-2/G · 1274
定价:23.00元

目录

第一部分 讲座精选

第二部分　模拟测试

第一部分　讲座精选

一、代　数　篇

第一讲　代数式的化简与求值

代数式的求值涉及的范围很广泛，代数式的恒等变形与其关系密切．一般说来，代数式的化简是为求值而服务的，对于某些代数式来说，先化简再求值，就显得十分简洁．因此，代数式的化简与求值是不可分割的．有的代数式，经过恒等变形以后，挖掘出代数式中的隐含条件，推导出有用的结果，进而求出代数式的值．而对已知条件、所求结论的特征仔细观察与分析，选择合理的方法，是求代数式值的关键．在数学竞赛中出现的代数式的求值，其灵活性是较高的．下面结合例题初步介绍求代数式值的常用方法和技巧，以求起到抛砖引玉的作用．

例 1　当 $x=3$ 时，计算代数式 $9x^5-24x^4-14x^3+34x^2-50x-10$ 的值．

分析　本题可直接代入求值，但由于代数式的次数太高而很麻烦．由于 $x=3 \Leftrightarrow x-3=0$．因此，我们可采取先降低次数，再求值，这样计算可大大简化．

解　由已知条件知，$x-3=0$．

$$
\begin{aligned}
&9x^5-24x^4-14x^3+34x^2-50x-10\\
&=(9x^5-27x^4)+(3x^4-9x^3)-(5x^3-15x^2)+(19x^2-57x)+(7x-21)+11\\
&=9x^4(x-3)+3x^3(x-3)-5x^2(x-3)+19x(x-3)+7(x-3)+11\\
&=11.
\end{aligned}
$$

例 2　设 $\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{5}$，求 $\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$ 的值．

解法一　$\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}$，

由 $\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{5}$，得　$a=\sqrt[3]{5}\,b$，代入上式，

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}&=1+\frac{b^2}{(\sqrt[3]{5}\,b)^2+\sqrt[3]{5}\,b^2+b^2}=1+\frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}+1}\\
&=1+\frac{\sqrt[3]{5}-1}{(\sqrt[3]{5})^3-1^3}=\frac{\sqrt[3]{5}+3}{4}.
\end{aligned}
$$

解法二　$\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}+1}$

$$
=1+\frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}+1}=\frac{\sqrt[3]{5}+3}{4}.
$$

说明 (1) 对于假分式求值的问题,一般将它化为一个整式和一个真分式和的形式,这样有利于简化计算.

(2) 式子$\frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$是一个齐次分式,即分子、分母各项的次数都是2.一般地,对于齐次分式函数$f(x,y)$,总可以化为$f\left(\frac{y}{x}\right)$的形式.

例3 已知 $x+\frac{1}{x}=4$,求$x^5+\frac{1}{x^5}$的值.

解 由$x+\frac{1}{x}=4$,得

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=16,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=14.$$

$$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=14\times4-4=52.\\x^5+\frac{1}{x^5}&=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=52\times14-4=724.\end{aligned}$$

说明 我们常遇到已知$x+\frac{1}{x}=a$,求$x^n+\frac{1}{x^n}$的值的问题.这类问题可借助恒等式$x^k+\frac{1}{x^k}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)-\left(x^{k-2}+\frac{1}{x^{k-2}}\right)$逐次计算而得到解决.

例4 若x、y为实数,且$y=\sqrt{8x-1}+\sqrt{1-8x}+\frac{1}{2}$,求$\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$的值.

解 由$1-8x\geqslant0,8x-1\geqslant0$知,$x=\frac{1}{8}$,从而$y=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}&=\sqrt{\frac{1}{4}+4+2}-\sqrt{\frac{1}{4}+4-2}\\&=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1.\end{aligned}$$

例5 设a、b、c、d均为实数,且 $ad-bc=1,a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$,求$abcd$的值.

解 由$ad-bc=1$,有

$$2ad-2bc=2. \qquad ①$$

由$a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$,有

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab+2cd=2. \qquad ②$$

②-①式,得

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab+2bc+2cd-2ad=0.$$

即 $(a-b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d-a)^2=0.$

$\therefore\ a-b=b+c=c+d=d-a=0.$

即 $a=b=-c=d$,代入 $ad-bc=1$,得

$$a^2+a^2=1, \therefore \quad a^2=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad abcd=-a^4=-\frac{1}{4}.$$

说明 例4及例5都是利用非负数的性质求代数式的值.我们知道,算术平方根、绝对值、实数的偶次方等都是非负数.有限个非负数之和为零,则每个非负数均为零.另外,若 $a\geqslant 0$,$-a\geqslant 0$,则 $a=0$.利用这些性质可解决一些求值问题.

例6 设 $4x+y+10z=169$,$3x+y+7z=126$,求 $x+y+z$ 的值.

解法一 由 $\begin{cases}4x+y=169-10z,\\ 3x+y=126-7z.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=43-3z,\\ y=2z-3.\end{cases}$

$\therefore \quad x+y+z=43-3z+2z-3+z=40.$

解法二
$$\begin{aligned}x+y+z&=-2(4x+y+10z)+3(3x+y+7z)\\&=-2\times 169+3\times 126=40.\end{aligned}$$

例7 已知:a、b、c 满足 $a+b+c=1$,$a^2+b^2+c^2=2$,$a^3+b^3+c^3=3$,求 abc,$a^4+b^4+c^4$ 的值.

解 由 $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$,得

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}.$$

由恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,得

$$abc=\frac{1}{6}.$$

而 $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+bc+ca)^2-2abc\,(a+b+c)]=2^2-2\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{6}$.

说明 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 是一个重要的恒等式,它在因式分解或化简求值时用得较多.

例8 已知:$\frac{x+y-z}{z}=\frac{x-y+z}{y}=\frac{-x+y+z}{x}$,且 $x+y+z\neq 0$,求分式 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ 的值.

解 由合比性质知

$$\frac{x+y-z}{z}=\frac{(x+y-z)+(x-y+z)+(-x+y+z)}{z+y+x}.$$

即 $$\frac{x+y-z}{z}=1.$$

$\therefore \quad x+y=2z.$

同理,$y+z=2x$,$z+x=2y$.

$$\therefore \quad \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{2z\cdot 2x\cdot 2y}{xyz}=8.$$

说明 如果所给已知条件是比例形式,恰当运用比例性质,如合分比等等,常常会起到意料不到的效果.

例 9 若 $a^2+3a+1=0$，求代数式 $a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2$ 的值.

分析与解 若根据已知条件解出 a，是不明智的，也是相当麻烦的. 由于 $a^2+3a+1=0$，于是 $f(a)\cdot(a^2+3a+1)=0$. 因此，我们可作如下变形：

$$a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2$$

$$=a^2(a^2+3a+1)-2(a^2+3a+1)+\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}.$$

$\because\ a^2+1=-3a,\quad \therefore\ \frac{a^2+1}{a}=-3.$

即
$$a^4+3a^3-a^2-5a+\frac{1}{a}-2=-3.$$

例 10 设 $b^2=ac$，求 $\frac{a^2b^2c^2}{a^3+b^3+c^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$ 的值.

解 由条件 $b^2=ac$，可设 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=k$，即 $b=ak,c=bk=ak^2$.

$\therefore\ \frac{a^2b^2c^2}{a^3+b^3+c^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$=\frac{a^2(ak)^2(ak^2)^2}{a^3+(ak)^3+(ak^2)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(ak)^3}+\frac{1}{(ak^2)^3}\right)$

$=\frac{a^6k^6}{a^3(1+k^3+k^6)}\cdot\frac{k^6+k^3+1}{a^3k^6}=1.$

例 11 设 a、b、c、d 都是正整数，且 $a^5=b^4,c^3=d^2,c-a=19$，求 $d-b$ 的值.

解 由于 $\left(\frac{b}{a}\right)^4=a$ 是正整数，可令 $\frac{b}{a}=m$.（m 是正整数）

$\therefore\ a=m^4,b=m^5.$

同理，可设 $c=n^2,d=n^3$，（n 为正整数）

$\because\ c-a=19.\quad \therefore\ n^2-m^4=19.$

即
$$(n+m^2)(n-m^2)=19.$$

由于 19 是质数，且 $n+m^2>n-m^2$.

故由 $\begin{cases}n+m^2=19,\\ n-m^2=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=10.\end{cases}$

$\therefore\ d-b=n^3-m^5=757.$

说明 以上两例都是引入变量，这种变量能使各个量与它建立联系，往往能起到桥梁的作用. 恰当地引入变量，常常起到非常良好的效果.

例 12 若 a 和 b 是方程 $x^2+2px+3=0$ 的两个实根，c 和 d 是方程 $x^2+2qx+3=0$ 的两个实根，e 和 f 是方程 $x^2+2(p^2-q^2)x+3=0$ 的两个实根，求 $\frac{(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)}{e+f}$ 的值.

解 由韦达定理知，

$$a+b=-2p,ab=3.$$

$\therefore\ (a-c)(b-c)=c^2-(a+b)c+ab=c^2+2pc+3.$

又因 c 是方程 $x^2+2qx+3=0$ 的根,即 $c^2+2qc+3=0, c^2+3=-2qc.$

故 $(a-c)(b-c)=2pc-2qc=2c(p-q).$

同理, $(a+d)(b+d)=d^2+(a+b)d+ab$

$$=d^2-2pd+3=-2qd-2pd=-2d(p+q).$$

则 $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=-4cd(p^2-q^2)=-12(p^2-q^2).$

又 $\because\ e+f=-2(p^2-q^2).$

$$\therefore\ \frac{(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)}{e+f}=\frac{-12(p^2-q^2)}{-2(p^2-q^2)}=6.$$

例 13 若在实数范围内,多项式 $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2$ 能分解为两个一次因式的乘积,求 $k^2+5k+\frac{1}{4}$ 的值.

解 $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2=kx^2+(3-2y)x+(3y^2-5y+2)$,原多项式能分解为两个一次因式的乘积,必须使 $kx^2+(3-2y)x+(3y^2-5y+2)$ 的判别式为完全平方式,即

$\Delta_x=(3-2y)^2-4k(3y^2-5y+2)=4(1-3k)y^2+4(-3+5k)y+(9-8k)$ 为完全平方式,

则
$$\begin{cases}1-3k>0,\\ [4(-3+5k)]^2-4\times4(1-3k)(9-8k)=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}k<\frac{1}{3},\\ k^2+5k=0.\end{cases}$$

$$\therefore\ k^2+5k+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

说明 (1) 这里用到了一个重要结论:实系数二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 完全平方式的充要条件是 $a>0$,且 $\Delta=0$.

(2) 本题也可整理成 y 的二次三项式 $3y^2-(5+2x)y+kx^2+3x+2$,由 Δ_y 为完全平方式去解.

例 14 设 $(x^2-2x+3)^n=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,求 $a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_2+a_0$ 的值.

解 令 $x=1$,则

$$(1-2+3)^n=a_{2n}+a_{2n-1}+\cdots+a_1+a_0,$$

即
$$2^n=a_{2n}+a_{2n-1}+\cdots+a_1+a_0. \quad ①$$

令 $x=-1$,则

$$(1+2+3)^n=a_{2n}-a_{2n-1}+\cdots-a_1+a_0,$$

即
$$6^n=a_{2n}-a_{2n-1}+\cdots-a_1+a_0. \quad ②$$

①+②式,得

$$a_{2n}+a_{2n-2}+\cdots+a_2+a_0=\frac{1}{2}(2^n+6^n).$$

说明 本题采取的是特殊值法.对于某些条件等式,在等式两边中的字母巧妙地取特殊值,从而求出代数式的值.

例 15 若 k 为正整数，一元二次方程 $(k-1)x^2-px+k=0$ 有两个正整数根，求 $k^{kp}(p^p+k^k)$ 的值.

解 设方程的两根为 x_1、x_2，则由韦达定理可知

$$x_1x_2=\frac{k}{k-1}=1+\frac{1}{k-1},$$

由于 x_1,x_2 为正整数，所以 $\frac{1}{k-1}$ 为正整数，故只有 $k-1=1$，即 $k=2$.

此时 $x_1x_2=2$，从而得

$$x_1=1,x_2=2 \text{ 或 } x_1=2,x_2=1.$$

再由韦达定理有 $x_1+x_2=\frac{p}{k-1}$，求得 $p=3$.

$\therefore\quad k^{kp}(p^p+k^k)=2^{2\times3}(3^3+2^2)=1984.$

例 16 如图 1-1 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=1$，点 $P_1,P_2,\cdots,P_{1999}$ 为 BC 边上任意的点. 令 $m_i=AP_i^2+P_iB\cdot P_iC(i=1,2,\cdots,1999)$. 试计算 $m_1+m_2+\cdots+m_{1999}$ 的值.

解 设 P_i 是 BC 边上任一点，作 BC 边上的高 AD，则

$$\begin{aligned}m_i&=AP_i^2+P_iB\cdot P_iC\\&=AP_i^2+(BD-P_iD)(CD+P_iD)\\&=AP_i^2+BD^2-P_iD^2\\&=BD^2+AD^2=AB^2\\&=1\quad(i=1,2,\cdots,1999).\end{aligned}$$

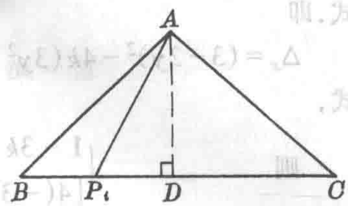


图 1-1

$\therefore\quad m_1+m_2+\cdots+m_{1999}=1999.$

例 17 已知 a、b、c 为实数，且满足关系：$a+b+c=2$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$，求 $(a-2)(b-2)(c-2)$ 的值.

分析与解 由于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{2}$，

联想到韦达定理，如果令 $ab+bc+ca=m$，则 $abc=2m$. 且 a、b、c 是三次方程 $x^3-2x^2+mx-2m=0$ 的三个实根.

又 $\because\quad x^3-2x^2+mx-2m=(x-2)(x^2+m)$，

于是 a、b、c 中至少有一个为 2，

$\therefore\quad (a-2)(b-2)(c-2)=0.$

例 18 已知：x、y、$z>0$，$x^2+y^2+xy=1$，$y^2+z^2+yz=3$，$z^2+x^2+zx=4$，求 $xy+yz+zx$ 的值.

分析与解 式子 x^2+y^2+xy，y^2+z^2+yz 及 z^2+x^2+zx 同余弦定理很类似.

联想到余弦定理：于是可构造如下的三角形(图 1-2).

其中，$AB=\sqrt{x^2+z^2+zx}=2$，

$AC=\sqrt{x^2+y^2+xy}=1$，

$BC=\sqrt{y^2+z^2+yz}=\sqrt{3}$.

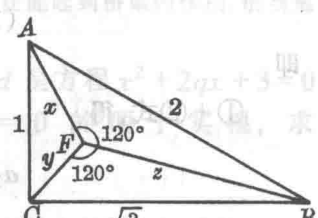


图 1-2

由 $AB^2=AC^2+BC^2$ 知，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

根据 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CAF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 知

$$\frac{1}{2}xz\sin120^\circ+\frac{1}{2}yz\sin120^\circ+\frac{1}{2}xy\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore\quad xy+yz+zx=2.$

说明 以上两例都是用构造法思想来求值.其实，在利用构造法求值时，用得较多的是求根公式、韦达定理等.

例 19 若某整数 x 的平方等于四个连续奇数的积，求这种整数 x 的所有可能值之积.

解 设四个连续奇数为 $2k-3,2k-1,2k+1,2k+3$，则有

$$\begin{aligned}x^2&=(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)\\&=(4k^2-1)(4k^2-9)\\&=(4k^2)^2-10(4k^2)+9.\end{aligned}$$

当 $k=0$ 时，$x^2=9$，$\therefore\quad x=\pm3$；

当 $|k|=1$ 时，$x^2=-15<0$；

当 $|k|\geqslant2$ 时，

$$\begin{aligned}(4k^2-6)^2&=(4k^2)^2-48k^2+36\\&=(4k^2)^2-10\cdot4k^2+9-8k^2+27\\&=x^2-(8k^2-27)<x^2,\end{aligned}$$

$$(4k^2-5)^2=(4k^2)^2-10\cdot(4k)+25=x^2+16>x^2,$$

$\therefore\quad (4k^2-6)^2<x^2<(4k^2-5)^2.$

而 $(4k^2-6)^2$ 与 $(4k^2-5)^2$ 是两个相邻整数的完全平方数，故 x^2 不存在.因此，满足题意的整数只有两个，即 ±3，它们的乘积是 -9.

例 20 若正整数 k、n 满足 $k\leqslant n$，且 $\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}=35\frac{7}{17}$，求 $n+k$ 的值.

解 $\because\quad 1\leqslant k\leqslant n$，

$\therefore\quad \frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}\geqslant\frac{1+2+\cdots+n-n}{n-1}=\frac{n}{2}$，

$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n-1}{n-1}=\frac{n+2}{2}.$

由题意，得

$$\begin{cases}35\frac{7}{17}\geqslant\frac{n}{2},\\35\frac{7}{17}\leqslant\frac{n+2}{2}.\end{cases}$$

解不等式组，得 $68\frac{14}{17}\leqslant n\leqslant70\frac{14}{17}$.

由于 n 是自然数，且 $17\mid n-1$，故 n 只能为 69，再由 $\frac{1+2+\cdots+69-k}{68}=35\frac{7}{17}$，解得 $k=7$，从而 $n+k=76$.

说明 例 19、例 20 都是利用不等式的方法求值.当直接求代数式的值困难时，可以考虑它的反面，用不等式分析，或许能开辟新的思路.

习题一

1．已知 $a-b=\sqrt{3}-1, b-c=\sqrt{3}+1$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值．

2．设实数 x、y 满足：$4x^2+y^2-12x-4y+13=0$，求 $y^x+x\sqrt{y}$ 的值．

3．已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$，求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(999)$ 的值．

4．若 $a^2=a+1, b^2=b+1$，且 $a\neq b$，求 a^5+b^5 的值．

5．设 a、b、c 均为非零实数，且 $ab=2(a+b), bc=3(b+c), ca=4(c+a)$，求 $a+b+c$ 的值．

6．若 $x=\dfrac{\sqrt{1999}-1}{2}$，求 $2x^4-999x^2+1003x-998$ 的值．

7．如果 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$ 的值．

8．已知：a, b 为正整数，且 $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}=\dfrac{13}{89}$，求 $a+b$ 的值．

9．若 $x^2+xy-6y^2=0$，且 $xy\neq 0$，求 $\dfrac{2x^2-3xy+y^2}{5x^2-7xy+2y^2}$ 的值．

10．已知：p、q、r 都是 3 的倍数，$r>q>p$，且 $r=p+6$，试求 $\dfrac{(p-q)(p-r)}{q-r}$ 的值．

11．已知：

$$\frac{x+9y}{9x+7y}=\frac{m}{n}, \quad ①$$

$$\frac{x+9y}{9x+8y}=\frac{m+an}{bm+cn}. \quad ②$$

如果满足①式的一切实数 x, y, m, n 也满足②式，求 $a+b+c$ 的值．

12．已知：a、b 为正整数，且满足 $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{4}{49}$，求 $a+b$ 的值．

第二讲　不等式（组）的解法及其应用

不等式和方程一样，也是代数里的一种重要内容．在初中竞赛中碰到的不等式主要是：一次不等式（组）、二次不等式、分式不等式、无理不等式等．本讲中，我们主要介绍一次不等式（组）、二次不等式及其应用．

不等式有一系列基本性质：

(1) $a>b \Leftrightarrow b<a$；

(2) $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；

(3) $a>b, b>c \Rightarrow a>c$；

(4) $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

(5) $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$；

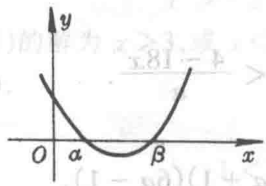
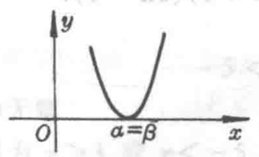
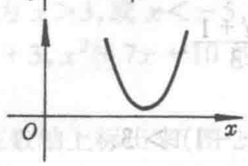
(6) $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$．

这里需提醒注意的是(6)，不等式两边同时乘以一个负数，不等号的方向要改变．

任何一个一次不等式经过移项、合并同类项、整理后，最后总可以化为两种标准型：

$ax>b$ 或 $ax<b$. 对于不等式组，我们只要先解出各不等式的解，再求出它们的公共部分的解，即为不等式组的解.

一元二次不等式的解的情况同一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式有密切关系. 任何一个一元二次不等式最后总可化为 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 $a>0$. 其解的情况见下表：

根 的 情 况	$f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象	$ax^2+bx+c>0$ 的解	$ax^2+bx+c<0$ 的解
有两不等实根 $\alpha<\beta$		$x<\alpha$ 或 $x>\beta$	$\alpha<x<\beta$
有两相等实根 $\alpha=\beta$		$x\neq\alpha$ 的一切实数	无解
无实根		一切实数	无解

任何一个分式方程都可化为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或 <0 的形式. 前者的解可化为两个方程组讨论如下：$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases}$ 至于后者，可同理去讨论.

解简单的无理不等式的思想主要是化无理不等式为有理不等式. 同时，还应考虑定义域.

例 1 解不等式：

$$\frac{1}{2}(x+7)+\frac{5-2x}{3}\leqslant 4.$$

解 两边同时乘以 6，得

$$3(x+7)+2(5-2x)\leqslant 24.$$

移项、整理，得

$$-x\leqslant -7,$$

$$\therefore \quad x\geqslant 7.$$

例 2 解不等式组：

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{4}\leqslant 1, & ① \\ \dfrac{1}{2}+x>3x-2, & ② \\ \dfrac{2x-7}{3}<3x. & ③ \end{cases}$$

解 不等式①的解是 $x\leqslant\frac{25}{8}$；

不等式②的解是 $x<\frac{5}{4}$；

不等式③的解是 $x>-1$.

$\therefore\ -1<x<\frac{5}{4}$.

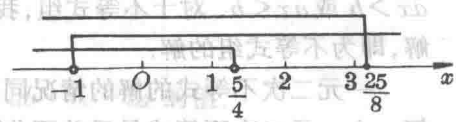


图 2-1

把它们的解表示在数轴上，如图 2-1 所示.

例 3 解关于 x 的不等式：

$$\frac{1-3x}{a^2}-12<\frac{4-18x}{a}.$$

解 由题设知 $a\neq0$，去分母后整理，得

$$3(6a-1)x<(2a+1)(6a-1).$$

当 $6a-1>0$，即 $a>\frac{1}{6}$ 时，$x<\frac{2a+1}{3}$；

当 $6a-1=0$，即 $a=\frac{1}{6}$ 时，无解；

当 $6a-1<0$，即 $a<\frac{1}{6}$ 且 $a\neq0$ 时，$x>\frac{2a+1}{3}$.

例 4 解不等式：

$$|x+6|-|x-1|>3.$$

解 $-6,1$ 分别是 $|x+6|$ 和 $|x-1|$ 的零点，于是，我们分三种情况讨论.

(1) $x<-6$ 时，原不等式可化为

$$-(x+6)+(x-1)>3，无解；$$

(2) $-6\leqslant x<1$ 时，原不等式可变为

$$(x+6)+(x-1)>3,$$

$$-1<x<1;$$

(3) $x\geqslant1$ 时，原不等式可化为

$$(x+6)-(x-1)>3,$$

$$7>3.$$

此式恒成立，所以 $x\geqslant1$ 恒为不等式的解.

综上，原不等式的解为 $x>-1$.

例 5 解不等式：$\frac{2x^2+3x+13}{x^2+7x+10}>1$.

解 原不等式可化为

$$\frac{2x^2+3x+13}{x^2+7x+10}-1>0,$$

即

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10}>0.$$

解法一 上面不等式可化为以下两个不等式组的并集：

(1) $\begin{cases}x^2-4x+3>0, & ①\\ x^2+7x+10>0; & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-4x+3<0, & ③ \\ x^2+7x+10<0. & ④ \end{cases}$

先解不等式组(1).

解不等式①,得

$$x>3 \text{ 或 } x<1,$$

解不等式②,得

$$x>-2 \text{ 或 } x<-5.$$

所以,不等式组(1)的解为 $x>3$,或 $x<-5$,或 $-2<x<1$.

再解不等式组(2).

解不等式③,得

$$1<x<3,$$

解不等式④,得

$$-5<x<-2.$$

因此不等式组(2)无解.

综上,原不等式解为 $x>3$,或 $x<-5$,或 $-2<x<1$.

解法二 x^2-4x+3, $x^2+7x+10$ 的零点分别为 1,3,−5,−2.

我们把它们分别在数轴上标出来(图 2−2).

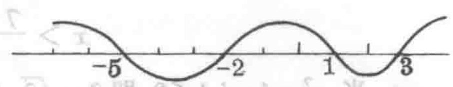


图 2−2

当 $x<-5$ 时,$x^2-4x+3>0$,$x^2+7x+10>0$.

即

$$(x^2-4x+3)(x^2+7x+10)>0;$$

当 $-5<x<-2$ 时,$x^2-4x+3>0$,$x^2+7x+10<0$,

即

$$(x^2-4x+3)(x^2+7x+10)<0;$$

同理,当 $-2<x<1$ 时,$(x^2-4x+3)(x^2+7x+10)>0$;

当 $1<x<3$ 时,$(x^2-4x+3)(x^2+7x+10)<0$;

当 $x>3$ 时,$(x^2-4x+3)(x^2+7x+10)>0$.

于是,我们可以在数轴上表示,如图 2−2 所示.

因此,原不等式的解为

$$x<-5, \text{或 } -2<x<1, \text{或 } x>3.$$

说明 解法二称为**"根轴法"**.

例 6 解不等式:$\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>1$.

解 因为根式必须有意义,先解不等式组:

$$\begin{cases} 3x-4\geqslant 0, \\ x-3\geqslant 0. \end{cases}$$

解不等式组,得 $x\geqslant 3$.

另一方面,原不等式可化为

$$\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}+1.$$

两边平方,整理,得

$$x-1>\sqrt{x-3}.$$

再次平方,整理,得

$$x^2-3x+4>0.$$

此不等式解为一切实数.

所以原不等式的解为 $x>3$.

例 7 解不等式：$2x^2-7x-10\leqslant 0$.

解 $\Delta=(-7)^2-4\times 2\times(-10)=129>0$.

所以，方程 $2x^2-7x-10=0$ 有两个不等实根

$$x_1=\frac{7+\sqrt{129}}{4},\ x_2=\frac{7-\sqrt{129}}{4}.$$

所以原不等式解为

$$\frac{7-\sqrt{129}}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7+\sqrt{129}}{4}.$$

例 8 解不等式：$|x^2-4x+1|>3x$.

解 当 $x^2-4x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2+\sqrt{3}$，或 $x\leqslant 2-\sqrt{3}$ 时，原不等式变形为

$$x^2-4x+1>3x.$$

即 $x^2-7x+1>0$. 解不等式组，得

$$x>\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\text{ 或 }x<\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x^2-4x+1<0$，即 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时，原不等式变形为

$$-(x^2-4x+1)>3x,$$

即 $x^2-x+1<0$，此不等式无解.

综上，原不等式的解为

$$x>\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\text{，或 }x<\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

例 9 如果不等式组 $\begin{cases}9x-9\geqslant 0,\\8x-6<0\end{cases}$ 的整数解仅为 1,2,3，那么适合这个不等式组的整数 a,b 的有序对 (a,b) 共有多少对？

解 由原不等式组可解得 $\frac{a}{9}\leqslant x<\frac{b}{8}$. 如图 2－3 所示，在数轴上画出这个不等式组解集的可能范围，可得 $\begin{cases}0<\frac{a}{9}\leqslant 1,\\3<\frac{b}{8}\leqslant 4.\end{cases}$

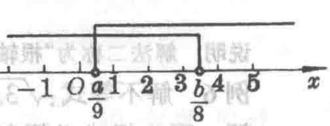


图 2－3

即 $\begin{cases}0<a\leqslant 9,\\24<b\leqslant 32.\end{cases}$

所以，$a=1,2,\cdots,9$，共 9 个，$b=25,26,\cdots,32$，共 8 个. 于是，有序对 (a,b) 共有 $9\times 8=72$ 对.

例 10 设 a、b 是正整数，求满足 $\frac{8}{9}<\frac{a}{b}<\frac{9}{10}$，且 b 最小的分数 $\frac{a}{b}$.

分析 欲求 b 的最小值，只需将 b 放入一个不等式，然后估计出 b 的下界. 这里要用到整数的离散性，即若整数 x,y 满足 $x>y$，则 $x\geqslant y+1$.

解 原不等式等价于