

全国初中

1999年全国初中数学竞赛命题组 编

数学

竞赛辅导

(讲座精选及模拟测试)



上海科学技术出版社

57/60

全国初中数学竞赛辅导

根据原国家教委的批示,中国教育学会中学数学教学专业委员会和1999年举办了全国初中数学竞赛。为了进一步提高初中学生的数学素质,促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施,激发学生学习数学的兴趣,培养“1999年全国初中数学竞赛命题组”编写的“数学竞赛的希望,发展他们的数学才能”的宗旨,赢得了广大师生的积极响应。

1998年竞赛结束后,孙瑞清、李清心、大李力、孙焱、王能和开展初中数学活动课程的要求,为喜迎第15届全国竞赛而撰写了《全国初中数学竞赛(讲座精选及模拟测试)》。由孙瑞清教授担任主编,北京大学出版社出版。该书充分反映了广大教师和学生提出的是否把初中数学的一些重要内容和方法整理出来介绍给大家的要求,由命题组的几位同志和几位在数学竞赛方面有造诣的教授、特级教师共同编写了这本《全国初中数学竞赛(讲座精选及模拟测试)》,这样既可以对前两一书有所帮助,又可以作为参加数学竞赛的学生考前的辅导材料,帮助学生掌握初中阶段的数学知识和方法,进而提高他们的数学能力和数学修养,增强应用的意识,培养他们的创造才能。

在本书的编写过程中,得到了中国教育学会中学数学教学专业委员会理事长孙瑞清先生和副理事长孙培清先生的指导和鼓励,上海科学技术出版社对本书的出版给予了许多帮助,在此我们深表谢意。

限于水平,尽管我们做了努力,但其中难免有疏漏和不妥之处,恳请广大读者和同行不吝指正。

编者
2000年春

上海科学技术出版社

$$\text{即 } m^2 - 5m + 2 = 0 \text{, 解得 } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{由于 } -1 \leq m \leq 1, \text{ 故 } m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(2) \frac{mx^2}{1-x_1} + \frac{mx^2}{1-x_2}$$

$\geq \frac{m}{(1-x_1)(1-x_2)} \left[x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \right] = \frac{m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$ 从 $\partial f(\xi)$ 式直小量, 小量伏意降不, 到是 $\partial f(\xi)$ 落落着脚由当站

$$= \frac{m(x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{m(2m^2 - 10m + 10) + (m^2 - 3m + 3)(2m - 1)}{(m^2 - 3m + 3)(2m - 1)}$$

$$= \frac{m(2m^2 - 8m^2 + 8m - 2)}{m(m-1)^2}$$

$$= 2(m^2 - 3m + 1).$$

设 $y = 2(m^2 - 3m + 1) = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$, $-1 \leq m \leq 1$ 因为 y 在 $-1 \leq m \leq 1$ 上是递减的, 所以当 $m = -1$ 时, y 的最大值为 10.

故 $\frac{mx^2}{1-x_1} + \frac{mx^2}{1-x_2}$ 的最大值为 10.

14. 由题设得 $AB^2 = 2AD^2 = AF \cdot AE$, 有 $\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AD}$.

又 $\angle EAB = \angle FAD$, $\triangle ABE \sim \triangle AFD$.

知 $AB = AD$.

责任编辑 周玉刚

如图, 连结 AO , 交 ED 于 H , 则

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

故 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle AED}$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot AH = \sqrt{3}.$$

又 E 是 AC 的中点, 则

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

全国初中数学竞赛辅导 上海发行所经销 上海出版印刷有限公司印刷

有 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$

开本 787 × 1092 1/16 印张 20 字数 476 000

2000 年 11 月第 1 版 2001 年 7 月第 2 次印刷

印数: 5 201-9 200

15. 显然, 这 32 个人的上楼方式有以下两种: 直接上楼和通过电梯上楼. 不懂的人, 他所化的楼梯一定不小于直接上楼的人所走的步数. 事实上, 通过电梯上楼的人直接上楼, 而不懂的是的人直接上楼, 也就是说两人的上楼方式, 其余的上楼步数都不相等. 为什么?

设电梯停在第 x 层, 有 x 个人没有通过电梯而直接上楼, 那么不懂的人分为

$S = 3[1 + 2 + \dots + (x-1)] + 3(1 + 2 + \dots + (x-1))$

$$= 3 \times (33 - x + \frac{x(x-1)}{2}) + 3x + \frac{x(x-1)}{2} = \frac{3}{2}(x^2 + 3x + 66 - 3x - x^2 + x - 1)$$

$$= 2x^2 - xy - 102x + 2y^2 + 3y + 1684$$

$$= 2x^2 - (y + 102)x + 2y^2 + 3y + 1684$$

第一部分 讲座精选

第一部分 讲座精选

一、代数篇	1
第一讲 代数式的化简与求值	1
第二讲 不等式(组)的解法及其应用	8
第三讲 二次根式	19
第四讲 一元二次方程的综合问题	29
第五讲 特殊方程(组)的解法	36
第六讲 函数问题	42
二、几何篇	52
第七讲 勾股定理	52
第八讲 全等形	64
第九讲 相似形	70
第十讲 与圆有关的综合问题	77
第十一讲 几何不等式初步	93
第十二讲 对称、平移、旋转	105
三、数学应用篇	112
第十三讲 解数学应用题的一般方法	112
第十四讲 有关不等式的应用问题	118
第十五讲 与函数有关的应用问题	124
第十六讲 几何中的应用问题	130
第十七讲 线性规划初步	137
四、解题方法篇	146
第十八讲 极端原理	146
第十九讲 反证法与反推法	150
第二十讲 逻辑推理问题	159
第二十一讲 构造法	168
第二十二讲 分类与讨论	175
五、数论、组合篇	184
第二十三讲 整数的整除性	184
第二十四讲 同余初步	192
第二十五讲 不定方程的解法	200

第二十六讲	用奇偶性解题	206
第二十七讲	计数	211
第二十八讲	抽屉原则	219

第二部分 模拟测试

模拟试题一		227
模拟试题二		229
模拟试题三		231
模拟试题四		233
模拟试题五		235
模拟试题六		237
参考答案		239
附录		301
1. 1998 年全国初中数学竞赛试题		301
2. 1999 年全国初中数学竞赛试题		306
3. 2000 年全国初中数学竞赛试题		310
25	310
26	310
27	310
28	310
29	310
30	310
31	310
32	310
33	310
34	310
35	310
36	310
37	310
38	310
39	310
40	310
41	310
42	310
43	310
44	310
45	310
46	310
47	310
48	310
49	310
50	310
51	310
52	310
53	310
54	310
55	310
56	310
57	310
58	310
59	310
60	310
61	310
62	310
63	310
64	310
65	310
66	310
67	310
68	310
69	310
70	310
71	310
72	310
73	310
74	310
75	310
76	310
77	310
78	310
79	310
80	310
81	310
82	310
83	310
84	310
85	310
86	310
87	310
88	310
89	310
90	310
91	310
92	310
93	310
94	310
95	310
96	310
97	310
98	310
99	310
100	310

第一部分 讲座精选

一、代数篇

第一讲 代数式的化简与求值

代数式的求值涉及的范围很广泛,代数式的恒等变形与其关系密切.一般说来,代数式的化简是为求值而服务的,对于某些代数式来说,先化简再求值,就显得十分简洁.因此,代数式的化简与求值是不可分割的.有的代数式,经过恒等变形以后,挖掘出代数式中的隐含条件,推导出有用的结果,进而求出代数式的值.而对已知条件、所求结论的特征仔细观察与分析,选择合理的方法,是求代数式值的关键.在数学竞赛中出现的代数式的求值,其灵活性是较高的.下面结合例题初步介绍求代数式值的常用方法和技巧,以求起到抛砖引玉的作用.

例 1 当 $x=3$ 时,计算代数式 $9x^5 - 24x^4 - 14x^3 + 34x^2 - 50x - 10$ 的值.

分析 本题可直接代入求值,但由于代数式的次数太高而很麻烦.由于 $x=3 \Leftrightarrow x-3=0$.因此,我们可采取先降低次数,再求值,这样计算可大大简化.

解 由已知条件知, $x-3=0$.

$$\begin{aligned} & 9x^5 - 24x^4 - 14x^3 + 34x^2 - 50x - 10 \\ &= (9x^5 - 27x^4) + (3x^4 - 9x^3) - (5x^3 - 15x^2) + (19x^2 - 57x) + (7x - 21) + 11 \\ &= 9x^4(x-3) + 3x^3(x-3) - 5x^2(x-3) + 19x(x-3) + 7(x-3) + 11 \\ &= 11. \end{aligned}$$

例 2 设 $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{5}$, 求 $\frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$ 的值.

$$\text{解法一 } \frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2+ab+b^2},$$

由 $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{5}$, 得 $a = \sqrt[3]{5} b$, 代入上式,

$$\begin{aligned} \frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2} &= 1 + \frac{b^2}{(\sqrt[3]{5}b)^2 + \sqrt[3]{5}b^2 + b^2} = 1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} + 1} \\ &= 1 + \frac{\sqrt[3]{5}-1}{(\sqrt[3]{5})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{5}+3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{解法二 } \frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2+ab+b^2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} + 1} = \frac{\sqrt[3]{5}+3}{4}$$

说明 (1) 对于假分式求值的问题,一般将它化为一个整式和一个真分式和的形式,这样有利于简化计算.

(2) 式子 $\frac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$ 是一个齐次分式,即分子、分母各项的次数都是 2. 一般地,对于齐次分式函数 $f(x,y)$,总可以化为 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式.

例 3 已知 $x + \frac{1}{x} = 4$, 求 $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 的值.

解 由 $x + \frac{1}{x} = 4$, 得

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 14.$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 14 \times 4 - 4 = 52.$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 52 \times 14 - 4 = 724.$$

说明 我们常遇到已知 $x + \frac{1}{x} = a$, 求 $x^n + \frac{1}{x^n}$ 的值的问题. 这类问题可借助恒等式 $x^k + \frac{1}{x^k} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - \left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right)$ 逐次计算而得到解决.

例 4 若 x, y 为实数, 且 $y = \sqrt{8x-1} + \sqrt{1-8x} + \frac{1}{2}$, 求 $\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} - \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$ 的值.

解 由 $1-8x \geq 0, 8x-1 \geq 0$ 知, $x = \frac{1}{8}$, 从而 $y = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2} - \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} &= \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + 2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 4 - 2} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1. \end{aligned}$$

例 5 设 a, b, c, d 均为实数, 且 $ad - bc = 1, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - cd = 1$, 求 $abcd$ 的值.

解 由 $ad - bc = 1$, 有

$$2ad - 2bc = 2. \quad ①$$

由 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - cd = 1$, 有

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2cd = 2. \quad ②$$

② - ①式, 得

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2ad = 0.$$

$$\text{即 } (a-b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d-a)^2 = 0.$$

$$\therefore a-b = b+c = c+d = d-a = 0.$$

$$\text{即 } a=b=-c=d, \text{ 代入 } ad-bc=1, \text{ 得}$$

$$\text{又因 } a^2 + a^2 = 1, \therefore a^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore abcd = -a^4 = -\frac{1}{4}.$$

说明 例4及例5都是利用非负数的性质求代数式的值.我们知道,算术平方根、绝对值、实数的偶次方等都是非负数.有限个非负数之和为零,则每个非负数均为零.另外,若 $a \geq 0, -a \geq 0$, 则 $a = 0$.利用这些性质可解决一些求值问题.

例6 设 $4x + y + 10z = 169, 3x + y + 7z = 126$, 求 $x + y + z$ 的值.

解法一 由 $\begin{cases} 4x + y = 169 - 10z, \\ 3x + y = 126 - 7z. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 43 - 3z, \\ y = 2z - 3. \end{cases}$

$$\therefore x + y + z = 43 - 3z + 2z - 3 + z = 40.$$

$$\begin{aligned} \text{解法二 } x + y + z &= -2(4x + y + 10z) + 3(3x + y + 7z) \\ &= -2 \times 169 + 3 \times 126 = 40. \end{aligned}$$

例7 已知: a, b, c 满足 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 2, a^3 + b^3 + c^3 = 3$, 求 $abc, a^4 + b^4 + c^4$ 的值.

解 由 $(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$, 得

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}.$$

由恒等式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, 得

$$abc = \frac{1}{6}.$$

而 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)] = 2^2 - 2\left(\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{6}.$

说明 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 是一个重要的恒等式, 它在因式分解或化简求值时用得较多.

例8 已知: $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{-x+y+z}{x}$, 且 $x + y + z \neq 0$, 求分式 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ 的值.

解 由合比性质知

$$\frac{x+y-z}{z} = \frac{(x+y-z) + (x-y+z) + (-x+y+z)}{z+y+x}.$$

即 $\frac{x+y-z}{z} = 1.$

$$\therefore x + y = 2z.$$

同理, $y + z = 2x, z + x = 2y$.

$$\therefore \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{2z \cdot 2x \cdot 2y}{xyz} = 8.$$

说明 如果所给已知条件是比例形式, 恰当运用比例性质, 如合分比等等, 常常会起到意料不到的效果.

例 9 若 $a^2 + 3a + 1 = 0$, 求代数式 $a^4 + 3a^3 - a^2 - 5a + \frac{1}{a} - 2$ 的值.

分析与解 若根据已知条件解出 a , 是不明智的, 也是相当麻烦的. 由于 $a^2 + 3a + 1 = 0$, 于是 $f(a) \cdot (a^2 + 3a + 1) = 0$. 因此, 我们可作如下变形:

$$a^4 + 3a^3 - a^2 - 5a + \frac{1}{a} - 2 = a^2(a^2 + 3a + 1) - 2(a^2 + 3a + 1) + \left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$$

例 3 已知

$$= a^2(a^2 + 3a + 1) - 2(a^2 + 3a + 1) + \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

解

$$= a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a}.$$

$$\therefore a^2 + 1 = -3a, \quad \therefore \frac{a^2 + 1}{a} = -3.$$

即

$$a^4 + 3a^3 - a^2 - 5a + \frac{1}{a} - 2 = -3.$$

例 10 设 $b^2 = ac$, 求 $\frac{a^2 b^2 c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$ 的值.

解 由条件 $b^2 = ac$, 可设 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k$, 即 $b = ak, c = bk = ak^2$.

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{a^2 b^2 c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \\ & = \frac{a^2 (ak)^2 (ak^2)^2}{a^3 + (ak)^3 + (ak^2)^3} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(ak)^3} + \frac{1}{(ak^2)^3} \right) \\ & = \frac{a^6 k^6}{a^3 (1 + k^3 + k^6)} \cdot \frac{k^6 + k^3 + 1}{a^3 k^6} = 1. \end{aligned}$$

例 11 设 a, b, c, d 都是正整数, 且 $a^5 = b^4, c^3 = d^2, c - a = 19$, 求 $d - b$ 的值.

解 由于 $\left(\frac{b}{a}\right)^4 = a$ 是正整数, 可令 $\frac{b}{a} = m$. (m 是正整数)

$$\therefore a = m^4, b = m^5.$$

同理, 可设 $c = n^2, d = n^3$, (n 为正整数)

$$\therefore c - a = 19. \quad \therefore n^2 - m^4 = 19.$$

即 $(n + m^2)(n - m^2) = 19$.

由于 19 是质数, 且 $n + m^2 > n - m^2$.

$$\text{故由 } \begin{cases} n + m^2 = 19, \\ n - m^2 = 1. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} m = 3, \\ n = 10. \end{cases}$$

$$\therefore d - b = n^3 - m^5 = 757.$$

说明 以上两例都是引入变量, 这种变量能使各个量与它建立联系, 往往能起到桥梁的作用. 恰当地引入变量, 常常起到非常好的效果.

例 12 若 a 和 b 是方程 $x^2 + 2px + 3 = 0$ 的两个实根, c 和 d 是方程 $x^2 + 2qx + 3 = 0$ 的两个实根, e 和 f 是方程 $x^2 + 2(p^2 - q^2)x + 3 = 0$ 的两个实根, 求 $\frac{(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)}{e+f}$ 的值.

解 由韦达定理知,

$$a+b=-2p, ab=3.$$

$$\therefore (a-c)(b-c) = c^2 - (a+b)c + ab = c^2 + 2pc + 3.$$

又因 c 是方程 $x^2 + 2qx + 3 = 0$ 的根, 即 $c^2 + 2qc + 3 = 0$, $c^2 + 3 = -2qc$.
 故 $(a-c)(b-c) = 2pc - 2qc = 2c(p+q)$.
 同理, $(a+d)(b+d) = d^2 + (a+b)d + ab$
 $= d^2 - 2pd + 3 = -2qd - 2pd = -2d(p+q)$.

则 $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = -4cd(p^2 - q^2) = -12(p^2 - q^2)$.
 又 $\because e+f = -2(p^2 - q^2)$.
 $\therefore \frac{(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)}{e+f} = \frac{-12(p^2 - q^2)}{-2(p^2 - q^2)} = 6$.

例 13 若在实数范围内, 多项式 $kx^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 5y + 2$ 能分解为两个一次因式的乘积, 求 $k^2 + 5k + \frac{1}{4}$ 的值.

解 $kx^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 5y + 2 = kx^2 + (3-2y)x + (3y^2 - 5y + 2)$, 原多项式能分解为两个一次因式的乘积, 必须使 $kx^2 + (3-2y)x + (3y^2 - 5y + 2)$ 的判别式为完全平方式, 即

$$\Delta_x = (3-2y)^2 - 4k(3y^2 - 5y + 2) = 4(1-3k)y^2 + 4(-3+5k)y + (9-8k) \text{ 为完全平方式},$$

则 $\begin{cases} 1-3k > 0, \\ [4(-3+5k)]^2 - 4 \times 4(1-3k)(9-8k) = 0, \end{cases}$
 即 $\begin{cases} k < \frac{1}{3}, \\ k^2 + 5k = 0. \end{cases}$
 $\therefore k^2 + 5k + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

说明 (1) 这里用到了一个重要结论: 实系数二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 完全平方式的充要条件是 $a > 0$, 且 $\Delta = 0$.

(2) 本题也可整理成 y 的二次三项式 $3y^2 - (5+2x)y + kx^2 + 3x + 2$, 由 Δ_y 为完全平方式去解.

例 14 设 $(x^2 - 2x + 3)^n = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$, 求 $a_{2n} + a_{2n-2} + \dots + a_2 + a_0$ 的值.

解 令 $x=1$, 则

$$(1-2+3)^n = a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_1 + a_0, \quad ①$$

即 $2^n = a_{2n} + a_{2n-1} + \dots + a_1 + a_0. \quad ②$

令 $x=-1$, 则

$$(1+2+3)^n = a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0, \quad ③$$

即 $6^n = a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0. \quad ④$

① + ② 式, 得

$$a_{2n} + a_{2n-2} + \dots + a_2 + a_0 = \frac{1}{2}(2^n + 6^n).$$

说明 本题采取的是特殊值法. 对于某些条件等式, 在等式两边中的字母巧妙地取特殊值, 从而求出代数式的值.

例 15 若 k 为正整数, 一元二次方程 $(k-1)x^2 - px + k = 0$ 有两个正整数根, 求 k^{kp} ($p^p + k^k$) 的值.

解 设方程的两根为 x_1, x_2 , 则由韦达定理可知

$$x_1 x_2 = \frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1},$$

由于 x_1, x_2 为正整数, 所以 $\frac{1}{k-1}$ 为正整数, 故只有 $k-1=1$, 即 $k=2$.

此时 $x_1 x_2=2$, 从而得

$$x_1=1, x_2=2 \text{ 或 } x_1=2, x_2=1.$$

再由韦达定理有 $x_1 + x_2 = \frac{p}{k-1}$, 求得 $p=3$.

$$\therefore k^{kp}(p^p + k^k) = 2^{2 \times 3}(3^3 + 2^2) = 1984.$$

例 16 如图 1-1 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=1$, 点 $P_1, P_2, \dots, P_{1999}$ 为 BC 边上任意的点. 令 $m_i = AP_i^2 + P_iB \cdot P_iC$ ($i=1, 2, \dots, 1999$). 试计算 $m_1 + m_2 + \dots + m_{1999}$ 的值.

解 设 P_i 是 BC 边上任一点, 作 BC 边上的高 AD , 则

$$\begin{aligned} m_i &= AP_i^2 + P_iB \cdot P_iC \\ &= AP_i^2 + (BD - P_iD)(CD + P_iD) \\ &= AP_i^2 + BD^2 - P_iD^2 \\ &= BD^2 + AD^2 = AB^2 \\ &= 1 \quad (i=1, 2, \dots, 1999). \end{aligned}$$

$$\therefore m_1 + m_2 + \dots + m_{1999} = 1999.$$

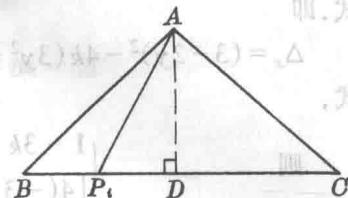


图 1-1

例 17 已知 a, b, c 为实数, 且满足关系: $a+b+c=2$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, 求 $(a-2)(b-2)(c-2)$ 的值.

分析与解 由于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{2}$,

联想到韦达定理, 如果令 $ab+bc+ca=m$, 则 $abc=2m$. 且 a, b, c 是三次方程 $x^3 - 2x^2 + mx - 2m = 0$ 的三个实根.

又 $\because x^3 - 2x^2 + mx - 2m = (x-2)(x^2+m)$,

于是 a, b, c 中至少有一个为 2,

$$\therefore (a-2)(b-2)(c-2)=0.$$

例 18 已知: $x, y, z > 0$, $x^2 + y^2 + xy = 1$, $y^2 + z^2 + yz = 3$, $z^2 + x^2 + zx = 4$, 求 $xy + yz + zx$ 的值.

分析与解 式子 $x^2 + y^2 + xy$, $y^2 + z^2 + yz$ 及 $z^2 + x^2 + zx$ 同余弦定理很类似.

联想到余弦定理: 于是可构造如下的三角形(图 1-2).

$$\text{其中, } AB = \sqrt{x^2 + z^2 + zx} = 2,$$

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 1,$$

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2 + yz} = \sqrt{3}.$$

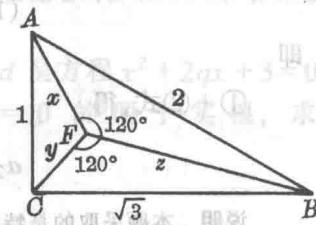


图 1-2

由 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ 知, $\triangle ABC$ 为直角三角形.

根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle CAF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 知

$$\frac{1}{2}xz\sin 120^\circ + \frac{1}{2}yz\sin 120^\circ + \frac{1}{2}xy\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore xy + yz + zx = 2.$$

说明 以上两例都是用构造法思想来求值. 其实, 在利用构造法求值时, 用得较多的是求根公式、韦达定理等.

例 19 若某整数 x 的平方等于四个连续奇数的积, 求这种整数 x 的所有可能值之积.

解 设四个连续奇数为 $2k-3, 2k-1, 2k+1, 2k+3$, 则有

$$x^2 = (2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)$$

$$= (4k^2 - 1)(4k^2 + 9)$$

$$= (4k^2)^2 - 10(4k^2) + 9.$$

当 $k=0$ 时, $x^2=9$, $\therefore x=\pm 3$;

当 $|k|=1$ 时, $x^2=-15<0$;

当 $|k|\geq 2$ 时,

$$(4k^2 - 6)^2 = (4k^2)^2 - 48k^2 + 36$$

$$= (4k^2)^2 - 10 \cdot 4k^2 + 9 - 8k^2 + 27$$

$$= x^2 - (8k^2 - 27) < x^2,$$

$$(4k^2 - 5)^2 = (4k^2)^2 - 10 \cdot (4k) + 25 = x^2 + 16 > x^2,$$

$\therefore (4k^2 - 6)^2 < x^2 < (4k^2 - 5)^2$.

而 $(4k^2 - 6)^2$ 与 $(4k^2 - 5)^2$ 是两个相邻整数的完全平方数, 故 x^2 不存在. 因此, 满足题意的整数只有两个, 即 ± 3 , 它们的乘积是 -9 .

例 20 若正整数 k, n 满足 $k \leq n$, 且 $\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = 35 \frac{7}{17}$, 求 $n+k$ 的值.

解 $\because 1 \leq k \leq n$,

$$\therefore \frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} \geq \frac{1+2+\cdots+n-n}{n-1} = \frac{n}{2},$$

$$\frac{1+2+\cdots+n+k}{n-1} \leq \frac{1+2+\cdots+n-1}{n-1} = \frac{n+2}{2}.$$

由题意, 得

$$\begin{cases} 35 \frac{7}{17} \geq \frac{n}{2}, \\ 35 \frac{7}{17} \leq \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

解不等式组, 得 $68 \frac{14}{17} \leq n \leq 70 \frac{14}{17}$.

由于 n 是自然数, 且 $17 \mid n-1$, 故 n 只能为 69, 再由 $\frac{1+2+\cdots+69-k}{68} = 35 \frac{7}{17}$, 解得 $k=7$, 从而 $n+k=76$.

说明 例 19、例 20 都是利用不等式的方法求值. 当直接求代数式的值困难时, 可以考虑它的反面, 用不等式分析, 或许能开辟新的思路.

习题一

1. 已知 $a - b = \sqrt{3} - 1$, $b - c = \sqrt{3} + 1$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值.
2. 设实数 x, y 满足: $4x^2 + y^2 - 12x - 4y + 13 = 0$, 求 $y^x + x\sqrt{y}$ 的值.
3. 已知 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}}$, 求 $f(1) + f(2) + \dots + f(999)$ 的值.
4. 若 $a^2 = a + 1$, $b^2 = b + 1$, 且 $a \neq b$, 求 $a^5 + b^5$ 的值.
5. 设 a, b, c 均为非零实数, 且 $ab = 2(a + b)$, $bc = 3(b + c)$, $ca = 4(c + a)$, 求 $a + b + c$ 的值.
6. 若 $x = \frac{\sqrt{1999} - 1}{2}$, 求 $2x^4 - 999x^2 + 1003x - 998$ 的值.
7. 如果 $(1 - 2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$, 求 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$ 的值.
8. 已知: a, b 为正整数, 且 $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{13}{89}$, 求 $a + b$ 的值.
9. 若 $x^2 + xy - 6y^2 = 0$, 且 $xy \neq 0$, 求 $\frac{2x^2 - 3xy + y^2}{5x^2 - 7xy + 2y^2}$ 的值.
10. 已知: p, q, r 都是 3 的倍数, $r > q > p$, 且 $r = p + 6$, 试求 $\frac{(p-q)(p-r)}{q-r}$ 的值.
11. 已知:
$$\frac{x+9y}{9x+7y} = \frac{m}{n}, \quad ①$$
$$\frac{x+9y}{9x+8y} = \frac{m+an}{bm+cn}. \quad ②$$

如果满足①式的一切实数 x, y, m, n 也满足②式, 求 $a + b + c$ 的值.
12. 已知: a, b 为正整数, 且满足 $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{4}{49}$, 求 $a + b$ 的值.

第二讲 不等式(组)的解法及其应用

不等式和方程一样, 也是代数里的一种重要内容. 在初中竞赛中碰到的不等式主要是: 一次不等式(组)、二次不等式、分式不等式、无理不等式等. 本讲中, 我们主要介绍一次不等式(组)、二次不等式及其应用.

不等式有一系列基本性质:

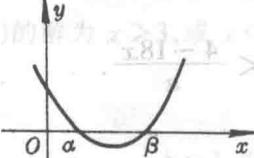
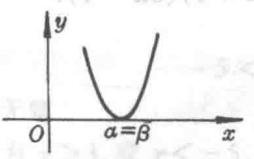
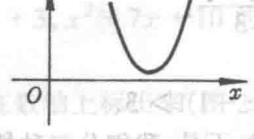
- (1) $a > b \Leftrightarrow b < a$;
- (2) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$;
- (3) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
- (4) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;
- (5) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$;
- (6) $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

这里需提醒注意的是(6), 不等式两边同时乘以一个负数, 不等号的方向要改变.

任何一个一次不等式经过移项、合并同类项、整理后, 最后总可以化为两种标准型:

$ax > b$ 或 $ax < b$. 对于不等式组, 我们只要先解出各不等式的解, 再求出它们的公共部分的解, 即为不等式组的解.

一元二次不等式的解的情况同一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式有密切关系. 任何一个一元二次不等式最后总可化为 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$, 其中 $a > 0$. 其解的情况见下表:

根的情况	$f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解
有两个不等实根 $\alpha < \beta$		$x < \alpha$ 或 $x > \beta$	$\alpha < x < \beta$
有两个相等实根 $\alpha = \beta$		$x \neq \alpha$ 的一切实数	无解
无实根		一切实数	无解

即任何一个分式方程都可化为 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 或 < 0 的形式. 前者的解可化为两个方程组讨论

如下: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ 至于后者, 可同理去讨论.

解简单的无理不等式的思想主要是化无理不等式为有理不等式. 同时, 还应考虑定义域.

例 1 解不等式:

$$\frac{1}{2}(x+7) + \frac{5-2x}{3} \leq 4.$$

解 两边同时乘以 6, 得

$$3(x+7) + 2(5-2x) \leq 24.$$

移项、整理, 得

$$-x \leq -7,$$

$$\therefore x \geq 7.$$

例 2 解不等式组:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{4} \leq 1, \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + x > 3x - 2, \end{cases} \quad ②$$

$$\begin{cases} \frac{2x-7}{3} < 3x. \end{cases} \quad ③$$

再次平方、整理, 得

解 不等式①的解是 $x \leq \frac{25}{8}$;

不等式②的解是 $x < \frac{5}{4}$;

不等式③的解是 $x > -1$.

$$\therefore -1 < x < \frac{5}{4}.$$

把它们的解表示在数轴上,如图 2-1 所示.

例 3 解关于 x 的不等式:

$$\frac{1-3x}{a^2} - 12 < \frac{4-18x}{a}.$$

解 由题设知 $a \neq 0$,去分母后整理,得

$$3(6a-1)x < (2a+1)(6a-1).$$

当 $6a-1 > 0$,即 $a > \frac{1}{6}$ 时, $x < \frac{2a+1}{3}$;

当 $6a-1=0$,即 $a = \frac{1}{6}$ 时,无解;

当 $6a-1 < 0$,即 $a < \frac{1}{6}$ 且 $a \neq 0$ 时, $x > \frac{2a+1}{3}$.

例 4 解不等式:

$$|x+6| - |x-1| > 3.$$

解 $-6, 1$ 分别是 $|x+6|$ 和 $|x-1|$ 的零点,于是,我们分三种情况讨论.

(1) $x < -6$ 时,原不等式可化为

$$(x+6) + (x-1) > 3, \text{ 无解};$$

(2) $-6 \leq x < 1$ 时,原不等式可变为

$$(x+6) + (x-1) > 3,$$

$x > -\frac{4}{2}$,即 $-2 < x < 1$;

(3) $x \geq 1$ 时,原不等式可化为

$$(x+6) - (x-1) > 3,$$

$$7 > 3.$$

此式恒成立,所以 $x \geq 1$ 恒为不等式的解.

综上,原不等式的解为 $x > -1$.

例 5 解不等式: $\frac{2x^2+3x+13}{x^2+7x+10} > 1$.

解 原不等式可化为

$$\frac{2x^2+3x+13}{x^2+7x+10} - 1 > 0,$$

$$\text{即 } \frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10} > 0.$$

解法一 上面不等式可化为以下两个不等式组的并集:

$$(1) \begin{cases} x^2-4x+3 > 0, \\ x^2+7x+10 > 0; \end{cases} \quad (2)$$

例 7 不等式 $x^2 - 3x + 4 > 0$ 的解是

此不等式解为一切实数.

所以原不等式的解为 $x > 3$.

例 7 解不等式: $2x^2 - 7x - 10 \leq 0$.

解 $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 129 > 0$.

所以, 方程 $2x^2 - 7x - 10 = 0$ 有两个不等实根

例 8 解不等式: $|x^2 - 4x + 1| > 3x$.

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{129}}{4}, x_2 = \frac{7 - \sqrt{129}}{4}$$

所以原不等式解为

$$\frac{7 - \sqrt{129}}{4} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{129}}{4}.$$

例 8 解不等式: $|x^2 - 4x + 1| > 3x$.

解 当 $x^2 - 4x + 1 \geq 0$, 即 $x \geq 2 + \sqrt{3}$, 或 $x \leq 2 - \sqrt{3}$ 时, 原不等式变形为

$$x^2 - 4x + 1 > 3x.$$

即 $x^2 - 7x + 1 > 0$. 解不等式组, 得

$$x > \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x < \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x^2 - 4x + 1 < 0$, 即 $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ 时, 原不等式变形为

$$-(x^2 - 4x + 1) > 3x.$$

即 $x^2 - x + 1 < 0$, 此不等式无解.

综上, 原不等式的解为

$$x > \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x < \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

例 9 如果不等式组 $\begin{cases} 9x - 9 \geq 0, \\ 8x - 6 < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为 1, 2, 3, 那么适合这个不等式组的整数 a, b 的有序对 (a, b) 共有多少对?

解 由原不等式组可解得 $\frac{a}{9} \leq x < \frac{b}{8}$. 如图 2-3 所示, 在数轴上画出这个不等式组

解集的可能范围, 可得

$$\begin{cases} 0 < \frac{a}{9} \leq 1, \\ 3 < \frac{b}{8} \leq 4. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 0 < a \leq 9, \\ 24 < b \leq 32. \end{cases}$

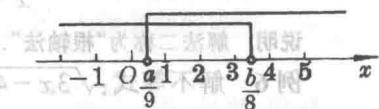


图 2-3

所以, $a = 1, 2, \dots, 9$, 共 9 个, $b = 25, 26, \dots, 32$, 共 8 个. 于是, 有序对 (a, b) 共有 $9 \times 8 = 72$ 对.

例 10 设 a, b 是正整数, 求满足 $\frac{8}{9} < \frac{a}{b} < \frac{9}{10}$, 且 b 最小的分数 $\frac{a}{b}$.

分析 欲求 b 的最小值, 只需将 b 放入一个不等式, 然后估计出 b 的下界. 这里要用到整数的离散性, 即若整数 x, y 满足 $x > y$, 则 $x \geq y + 1$.

解 原不等式等价于

解, 互乘, 式子再