数学奥林匹克小丛书

高中卷 2

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU

函数与函数方程

熊斌 朱臻 苏勇 编著

华东师范大学出版社

Shuxue

Xiao

Congshu

Shuxu

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 2

函数与函数方程

pike Xiao Congshu

熊斌 朱臻 苏勇 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．函数与函数方程/熊斌，朱臻，苏勇编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3

ISBN 7-5617-4136-7

I.数...　II.①熊...②朱...③苏...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016373号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

函数与函数方程

编　　著　熊 斌 朱 臻 苏 勇
策划组稿　倪 明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　周 滔
封面设计　高 山
版式设计　蒋 克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　10
字　　数　176千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4136-7/G·2365
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

目　录

1 映射与函数

1.1 映　射

映射是数学中的一个基本概念，几乎每一个数学分支都要用到它.

定义 1.1　设 A 和 B 是两个给定的集合，如果按照某种对应法则 f，使得对于每一个 $x \in A$，通过 f，惟一确定一个 $y \in B$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个映射，记为

$$f: A \to B.$$

集合 A 叫做映射 f 的定义域，集合 B 叫做映射 f 的值域，称 y 为 x 在映射 f 作用下的象，记作 $y = f(x)$，并用符号

$$f: x \mapsto y$$

表示，称 x 为 y 的一个原象.

例 1　设集合 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{x, y, z\}$.

$$f: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x$$

是 A 到 B 的一个映射.

而
$$g: a \mapsto y,\ c \mapsto x$$

不是 A 到 B 的映射，因为 b 在 g 的作用下没有象.

$$h: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x,\ c \mapsto z$$

也不是 A 到 B 的映射. 因为 A 中元素 c 有 B 中两个元素 x 和 z 与它对应.

例 2　设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$，$B = \{-1, 0, 1\}$.

(1) 问从 A 到 B 的不同的映射有多少个？

(2) 从 A 到 B 的映射满足 $f(a_1) > f(a_2) \geqslant f(a_3)$，确定这样的映射 f：

$A \to B$ 的个数.

解 (1) 确定 a_1 的象,有 3 种方法;确定 a_2 的象,也有 3 种方法;确定 a_3 的象,还是有 3 种方法. 所以,从 A 到 B 不同的映射共有

$$3 \times 3 \times 3 = 27(\text{个}).$$

(2) 由 $f(a_1) > f(a_2) \geqslant f(a_3)$ 知, $f(a_1) = 0$ 或 1.

若 $f(a_1) = 0$, 则 $f(a_2) = f(a_3) = -1$.

若 $f(a_1) = 1$, 则 $f(a_2) = f(a_3) = 0$, 或 $f(a_2) = f(a_3) = -1$, 或 $f(a_2) = 0$, $f(a_3) = -1$.

综上,共有 4 种满足题意的映射.

定义 1.2 设 f 是 A 到 B 的一个映射,如果对任意的 a_1, $a_2 \in A$,当 $a_1 \neq a_2$ 时,必有 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 那么称 f 是 A 到 B 的一个单射. 如果对于任意 $b \in B$, 均存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = b$, 那么称 f 是 A 到 B 的一个满射.

若 $A = B$, f 定义为

$$f: x \mapsto x \ (\text{其中 } x \in A),$$

则这个映射称为 A 上的恒等映射(或单位映射).

例 3 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 写出一个 $f: A \to B$, 使得 f 是单射,并求 A 到 B 的单射个数;

(2) 写出一个 $f: A \to B$, 使得 f 不是单射,并求所有这种映射的个数;

(3) A 到 B 的映射能否是满射?

解 (1) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1, \ a_2 \mapsto b_2, \ a_3 \mapsto b_3$$

就是 A 到 B 的一个单射.

这种映射的个数为 $\mathrm{P}_4^3 = 24$(个).

(2) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1, \ a_2 \mapsto b_1, \ a_3 \mapsto b_1$$

即为所求.

这种映射的个数为 $4^3 - \mathrm{P}_4^3 = 40$(个).

(3) 答案是否定的.

由于集合 A 中的每一个元素恰与集合 B 中的一个元素对应,而 $|A| = 3$, $|B| = 4$(用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数),所以集合 B 中至少有一个元素,在

集合 A 中找不到与它对应的元素. 因而 A 到 B 的满射不存在.

一般地,如果 A 到 B 有一个单射,那么 $|A| \leqslant |B|$;如果 A 到 B 有一个满射,那么 $|A| \geqslant |B|$.

例 4 $\mathbf{N}_+$ 是正整数集合,$\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的映射 p、q 定义如下:

$$p(1)=2,\ p(2)=3,\ p(3)=4,\ p(4)=1.$$
$$p(n)=n,\ 当\ n \geqslant 5\ 时;$$
$$q(1)=3,\ q(2)=4,\ q(3)=2,\ q(4)=1.$$
$$q(n)=n,\ 当\ n \geqslant 5\ 时.$$

(1) 作出 $\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的映射 f,使得对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 都有

$$f(f(n))=p(n)+2.$$

举出这样的映射 f 的一个例子;

(2) 证明:$\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的任何映射 f,都不可能使得对一切 $n \in \mathbf{N}_+$,都有

$$f(f(n))=q(n)+2.$$

解 (1) 由 $p(n)$ 的定义及 $f(f(n))=p(n)+2$,可以作出映射的对应表:

$$1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 8 \to 10 \to 12 \to \cdots$$
$$2 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to 13 \to 15 \to \cdots$$

于是可构造出 $f(n)$,其对应关系由下表的箭头所示:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 4 \arrow[d] & 3 \arrow[d] & 6 \arrow[d] & 8 \arrow[d] & 10 \arrow[d] & 12 \arrow[d] & \cdots \\
2 \arrow[ur] & 5 \arrow[ur] & 7 \arrow[ur] & 9 \arrow[ur] & 11 \arrow[ur] & 13 \arrow[ur] & 15 & \cdots
\end{tikzcd}$$

即 $f(1)=2$,$f(2)=4$,$f(3)=7$,$f(4)=5$,$f(5)=3$. 当 $n(\geqslant 6)$ 是偶数时,$f(n)=n+3$;当 $n(\geqslant 6)$ 是奇数时,$f(n)=n-1$. 这个映射满足 $f(f(n))=p(n)+2$.

(2) 用反证法. 假设存在映射 f,使得对一切 $n \in \mathbf{N}_+$,$f(f(n))=q(n)+2$,那么有

$$f(f(1))=q(1)+2=5,\ f(f(5))=q(5)+2=7,\ \cdots,$$
$$f(f(2))=q(2)+2=6,$$
$$f(f(6))=q(6)+2=8,\ \cdots,\ f(f(3))=q(3)+2=4,$$

$f(f(4)) = q(4) + 2 = 3$. $f(f(n))$的对应的值是

$$1 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to \cdots,$$
$$2 \to 6 \to 8 \to 10 \to 12 \to \cdots,$$
$$3 \to 4 \to 3.$$

由于 q 是单射,因此 f 也是单射. 设

$$f(3) = a,\ f(4) = b.$$

那么 $f(a) = f(f(3)) = 4$, $f(b) = f(f(4)) = 3$. 所以

$$f(f(a)) = f(4) = b,\ f(f(b)) = f(3) = a.$$

若 $b \geqslant 5$, 则

$$a = f(f(b)) = q(b) + 2 = b + 2 \geqslant 7,$$
$$b = f(f(a)) = q(a) + 2 = a + 2 = b + 4,$$

矛盾.

若 $a \geqslant 5$, 同样可推得矛盾.

若 $a \leqslant 4$, $b \leqslant 4$, 则

$$a = q(b) + 2 \geqslant 3,$$
$$b = q(a) + 2 \geqslant 3.$$

于是 a、b 只能是 3、4 或 4、3.

当 $a = 3$, $b = 4$ 时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2;$$

当 $a = 4$, $b = 3$ 时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2.$$

因此,对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, 使 $f(f(n)) = q(n) + 2$ 的映射 f 不存在.

例 5 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f: A \to A$ 是 A 到 A 上的映射. 对于 $i \in A$, 记 d_i 为 $i - f(i)$被 7 除后所得的余数 $(0 \leqslant d_i < 7)$. 如果 d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 两两不同,则称 f 是 A 到 A 上的 D 映射.

(1) 判断下面两个 A 到 A 上的映射 f_1、f_2 是不是 D 映射;

i	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(i)$	0	4	6	5	1	3	2

i	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(i)$	1	6	4	2	0	5	3

(2) 设 f 是 A 到 A 上的 D 映射，令

$$F(i) = d_i,\ i \in A,$$

证明：F 也是 A 到 A 上的 D 映射；

(3) 证明：所有 A 到 A 上的不同的 D 映射的个数是奇数.

解 (1) 对于 f_1，容易算得 $d_0 = 0$, $d_1 = 4$, $d_2 = 3$, $d_3 = 5$, $d_4 = 3$, $d_5 = 2$, $d_6 = 4$. 由 D 映射的定义知，f_1 不是 D 映射.

对于 f_2，可算得 $d_0 = 6$, $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_3 = 1$, $d_4 = 4$, $d_5 = 0$, $d_6 = 3$，故 f_2 是 D 映射.

(2) 由于 f 是 A 到 A 上的 D 映射，因此，$d_0, d_1, \cdots, d_6$ 两两不同，并且 $0 \leqslant d_i < 7$, $0 \leqslant i \leqslant 6$. 所以，$F$ 是 A 到 A 上的映射.

由 d_i 的定义知，

$$i - f(i) \equiv d_i \pmod 7,$$

所以

$$i - F(i) = i - d_i \equiv f(i) \pmod 7.$$

因为 $0 \leqslant f(i) \leqslant 6$，所以从上式知，$f(i)$ 就是 $i - F(i)$ 被 7 除所得的余数. 又因为 $f(0), f(1), \cdots, f(6)$ 两两不同，所以 F 是 A 到 A 上的 D 映射.

(3) 显然，A 到 A 上的 D 映射的数目是有限多个.

由上面第(2)小题知，给定一个 A 到 A 上的 D 映射 f，可以得到 A 到 A 上的另一个 D 映射. 下面我们先来计算满足 $F \neq f$ 的 D 映射的数目.

设 f 是 A 到 A 上的 D 映射，F 是从 f 出发按第(2)小题的方法所得到的 D 映射. 对于 F，用同样的方法又可以得到一个 D 映射 G，由第(2)小题知，$i - F(i)$ 被 7 除所得的余数就是 $f(i)$，即

$$G(i) = f(i),\ i = 0, 1, 2, \cdots, 6.$$

从而 $G=f$. 也就是说，从 F 出来，按第(2)小题的方法所得到的 D 映射恰好就是原来的 f. 因此，对于满足 $F\neq f$ 的 D 映射，都可以用第(2)小题的方法使它们两两配对. 这样的 D 映射的数目是偶数.

接下来计算满足 $F=f$ 的 D 映射的数目.

因为

$$i-F(i)\equiv f(i)(\bmod 7),$$
$$F(i)=f(i),$$

所以

$$2f(i)\equiv i(\bmod 7),$$

其中，$0\leqslant i\leqslant 6$，$0\leqslant f(i)\leqslant 6$.

当 $i=0$ 时，$f(0)=0$； 当 $i=1$ 时，$f(1)=4$；

当 $i=2$ 时，$f(2)=1$； 当 $i=3$ 时，$f(3)=5$；

当 $i=4$ 时，$f(4)=2$； 当 $i=5$ 时，$f(5)=6$；

当 $i=6$ 时，$f(6)=3$.

所以，满足 $F=f$ 的 D 映射(容易验证它是 D 映射)只有下列一个：

i	0	1	2	3	4	5	6
$f(i)$	0	4	1	5	2	6	3

综上所述，A 到 A 上的 D 映射的数目为奇数.

定义 1.3 设 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 f 既是单射，又是满射，那么 f 称为一一对应(或双射).

恒等映射是一一对应，例 5(1)中的映射 f_1，f_2 也都是一一对应.

如果集合 A 与集合 B 之间存在一一对应 f，那么集合 A 与集合 B 的元素个数相等，即 $|A|=|B|$.

反过来，如果 $|A|=|B|$，那么在集合 A 与集合 B 之间必存在一个一一对应，这只要将 A 中的第一个元素与 B 中的第一个元素对应，A 中的第二个元素与 B 中的第二个元素对应，依此类推即可.

例 6 给定一个正整数 n. 有多少个满足条件

$$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$$

的四元有序整数组 (a, b, c, d)？

解 作映射 f:

$$(a, b, c, d) \mapsto (a, b+1, c+2, d+3).$$

于是 f 是从集合 $A = \{(a, b, c, d)\} \mid 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant n\}$ 到集合 $B = \{(a, b', c', d') \mid 0 \leqslant a < b' < c' < d' \leqslant n+3\}$ 的一个映射. 容易验证这个映射是一一对应. 所以 $|A| = |B|$.

由于 $|B|$ 就是集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n+3\}$ 的四元子集的个数,即 C_{n+4}^4,从而 $|A| = C_{n+4}^4$.

说明 利用一一对应,可以帮助我们解决许多组合计数问题. 当我们欲求集合 A 的元素个数时,可以寻找一个既能与集合 A 建立一一对应又便于计数的集合 B,算出集合 B 的元素个数即可. 本例就是如此,下面再看一个有趣的问题.

例 7 数学竞赛命题委员会有 9 名教授组成. 命好的试题藏在一个保险箱里,要求至少有 6 名教授在场时才能打开保险箱. 问保险箱至少应安上多少把锁,配多少把钥匙,怎样把钥匙发给命题委员?

解 设 B 是保险箱上所安的锁的集合,A 是 9 名命题委员中所有 5 人组的集合. 显然

$$|A| = C_9^5 = 126.$$

对于一个 5 人组 $a \in A$,依题意,必有惟一的一把锁 $b \in B$,使得 5 人组中无人能打开锁 b. 令 b 是 a 在 A 到 B 的映射 f 下的象,即 $b = f(a)$. 于是便定义了集合 A 到集合 B 的一个映射 f. 下证 f 是一一对应.

对于集合 A 中的两个不同的 5 人组 a_1、a_2,它们所对应的锁 $b_1(= f(a_1))$, $b_2(= f(a_2))$ 必不相同. 否则,若 $b_1 = b_2$,则当两个 5 人组 a_1 与 a_2(其中至少有 6 名命题委员)都在场时,仍然打不开锁 b_1,这与题设矛盾,从而 f 是单射.

又对每一把锁 $b \in B$,必有一个 5 人组 $a \in A$,他们不能打开锁 b,即 $b = f(a)$,因此 f 是满射.

综上可知,f 是 A 到 B 的一一对应.

所以 $|B| = |A| = 126$,即应安 126 把锁.

现在来考虑如何配钥匙. 对于每把锁 $b \in B$,必有 5 人组 $a \in A$,他们中的每一个人都不能打开锁 b,而另外的 4 个人每个人都能打开锁 b,因此,每把锁应配 4 把钥匙,分给与这把锁对应的 5 人组之外的 4 个人. 故总共应配

$4\times126=504$ 把钥匙,并把每把锁的 4 个钥匙分发给一个 4 人小组的每个人,不同的 4 人组对应于不同的钥匙.

例 8 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集,把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1) 求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2) 求证:当 $n\geqslant3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等;

(3) 当 $n\geqslant3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

(1992 年全国高中数学联赛试题)

分析 要证明两个集合的元素个数一样多,一种方法是直接把这两个集合的元素个数算出来,另一种方法是在这两个集合之间建立一个一一对应. 本题我们将用后一种方法来解.

解 (1) 设 A 是 S_n 的任一奇子集,构造映射 f 如下:

$$A\mapsto A-\{1\}, \text{若 } 1\in A;$$
$$A\mapsto A\cup\{1\}, \text{若 } 1\notin A.$$

(注:$A-\{1\}$表示从集合 A 中去掉 1 后得到的集合)

所以,映射 f 是将奇子集映为偶子集的映射.

易知,若 A_1, A_2 是 S_n 的两个不同的奇子集,则 $f(A_1)\neq f(A_2)$,即 f 是单射.

又对 S_n 的每一个偶子集 B,若 $1\in B$,则存在 $A=B\setminus\{1\}$,使得 $f(A)=B$;若 $1\notin B$,则存在 $A=B\cup\{1\}$,使得 $f(A)=B$,从而 f 是满射.

所以,f 是 S_n 的奇子集所组成的集到 S_n 的偶子集所组成的集之间的一一对应,从而 S_n 的奇子集与偶子集个数相等,故均为 $\frac{1}{2}\cdot2^n=2^{n-1}$ 个.

(2) 设 $a_n(b_n)$表示 S_n 中全体奇(偶)子集容量之和.

若 $n(\geqslant3)$ 是奇数,则 S_n 的奇子集由如下两类:①S_{n-1}的奇子集;②S_{n-1}的偶子集与集$\{n\}$的并,于是得

$$a_n=a_{n-1}+(b_{n-1}+n\cdot2^{n-2}). \qquad ①$$

又 S_n 的偶子集可由 S_{n-1}的偶子集和 S_{n-1}的奇子集与$\{n\}$的并构成,所以

$$b_n=b_{n-1}+(a_{n-1}+n\cdot2^{n-2}). \qquad ②$$