

考研数学命题人土豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人 历年真题精析

(数学三)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数

豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人 历年真题精析

(数学三)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心研究和分析,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书收录了1998—2016年考研数学三历年真题,并进行了详细的解析;精辟阐明解题思路,全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还将1987—1997年的相关典型真题作为习题提供,以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家,以及一线教师共同编写而成。通过研读本书,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,进一步把握考试的特点及命题的思路,从而从容应考,轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2017 考研数学命题人历年真题精析. 数学三 / 全国
硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京: 北
京航空航天大学出版社, 2016. 4

ISBN 978-7-5124-2075-5

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 051568 号

版权所有,侵权必究。

2017 考研数学命题人历年真题精析(数学三)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpess@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:29 字数:670千字

2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2075-5 定价:45.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编 委 会

总主编	刘学元			
编 委	徐 荣	尤承业	刘德荫	童 武
	刘 佩	李春艳	叶 青	欧阳少波
	张晓燕	张 孜	黄 艳	王 宁
	张 杰	李 征	李智忠	黎兴刚
	汪 华	任丽娟	董 亮	王 欢
	陈冬冬	张飞飞	赵 娜	王光福
	郝显纯	高晓琼	李铁红	涂振旗
	姜宝静	杨 勇	王 宇	陈 娟
	王新会	崔杰凯	孟 楠	陈昌勇
	江海波	苗红宜	张永艳	潘小春
	王 静			

前 言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,已有 30 载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料,也是命题组专家智慧的结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题,则是广大准备考研的同学们的期盼。

本书严格按照最新的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求和精神编写,对历年考研真题逐题给出了详细解答,并尽量做到一题多解。只要认真分析研究,了解消化和掌握历年试题,便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性,也可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢,事半功倍。

本书包括两部分内容:

一部分是 1998—2016 年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象,从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中,精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题,分值较高。编者分考点归纳习题,总结各类题型的解题思路和方法,并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解,还在逐题解析历年考研数学试题的基础上,给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点,还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过例举具体题目,分析常犯的错误,使考生引以为戒;各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点:

1. 内容全面 汇集了 1998 年以来的所有真题,以便考生对历年真题有大致的了解并可研究真题。
2. 题型丰富 本书按考点对历年真题分类,对每种题型都进行了归纳和总结,方便考生复习。
3. 解析详尽 首先给出本题相应考点,再分析解题思路,给出详解,并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用第二部分内容,体会各知识点和题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题速度及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者 于清华园

目 录

第一篇 2015—2016 年考研数学三试题及答案与解析

2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	3
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析	6
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	14
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析	17

第二篇 1998—2014 年考研数学三试题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	27
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	30
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	34
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	38
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	42
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	45
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	49
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	53
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	57
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	61
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	65
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	69
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	73
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	77
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	81

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	85
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	89

第三篇 1998—2014 年考研数学三试题分类解析

第一部分 高等数学	95
第一章 函数、极限、连续	95
第二章 一元函数微分学	113
第三章 一元函数积分学	145
第四章 多元函数微分学	171
第五章 重积分	186
第六章 无穷级数	204
第七章 常微分方程	220
第二部分 线性代数	230
第一章 行列式	230
第二章 矩 阵	234
第三章 向 量	249
第四章 线性方程组	261
第五章 特征值与特征向量	277
第六章 二次型	292
第三部分 概率论与数理统计	305
第一章 随机事件与概率	305
第二章 随机变量及其分布	313
第三章 多维随机变量及其分布	324
第四章 随机变量的数字特征	341
第五章 大数定律与中心极限定理	356
第六章 数理统计的基本概念	359
第七章 参数估计	368

第一篇



2015—2016年考研数学三试题及答案与解析

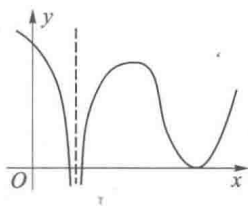


2016 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目的要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则().

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
 (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点
 (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点
 (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点



(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则().

- (A) $f'_x - f'_y = 0$ (B) $f'_x + f'_y = 0$ (C) $f'_x - f'_y = f$
 (D) $f'_x + f'_y = f$

(3) 设 $J_K = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则().

- (A) $J_1 < J_2 < J_3$ (B) $J_3 < J_1 < J_2$ (C) $J_2 < J_3 < J_1$ (D) $J_2 < J_1 < J_3$

(4) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ().

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
 (C) 发散 (D) 收敛性与 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是().

- (A) A^T 与 B^T 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似
 (C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则().

- (A) $a > 1$ (B) $a < -2$
 (C) $-2 < a < 1$ (D) $a = 1$ 或 $a = -2$

(7) 设 A, B 为两个随机变量,且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则().

(A) $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$ (B) $P(A|B) = 0$ (C) $P(A \cup B) = 1$ (D) $P(B|A) = 1$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) = (\quad)$.

(A) 6 (B) 8 (C) 14 (D) 15

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设袋子中有红、白、黑球各一个, 从中有放回地取球, 每次取一个, 直到三种颜色的球都取到为止, 则取球次数恰为 4 的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16) (本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 要求弹性 $\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元).

(I) 求需求函数的表达式.

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20) 本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(X, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数,

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题答案与解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考点提示】 极值点和拐点

【解题分析】 根据图像, 可导函数为零的点有 3 个, 但是最右边都恒大于 0, 故不是极值点, 所以极值点有 2 个. 拐点是一阶导函数的极值点或者不可导点. 一阶导函数极值点有 2 个, 不可导点有 1 个, 因此拐点有 3 个. 故答案选 B.

2. 【答案】 D

【考点提示】 多元函数偏导数

【解题分析】 由已知条件, 有

$$f'_x(x, y) = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x-y)^2},$$

所以 $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x-y} = f(x)$, 故此题选 D.

3. 【答案】 B

【考点提示】 重积分

【解题分析】 $J_1 = 0, J_2 > 0, J_3 < 0; J_3 < J_1 < J_2$, 故选 B.

4. 【答案】 A

【考点提示】 级数敛散

$$\begin{aligned} \text{【解题分析】} \quad \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的, 故原级数绝对收敛.

5. 【答案】 C

【考点提示】 矩阵相似

【解题分析】 由相似定义可知, A 与 B 相似, 存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 则

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = [(P^T)^{-1}]^{-1} A^T (P^T)^{-1}, \text{ 所以 } A$$

正确;

$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, 所以 B 正确;

$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P$, 所以 D 正确.

所以不正确的为 C, 故选择答案 C.

6.【答案】 C

【考点提示】 二次型正惯性指数

【解题分析】 由题意已知, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0 \text{ 可得 } A \text{ 的特征}$$

值为

$$\lambda_1 = a + 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1,$$

又因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正负惯性指数分别为 1 和 2, 且正负惯性指数恰好等于特征值中正、负数的个数, 所以 $a + 2 > 0$ 且 $a - 1 < 0$, 即 $-2 < a < 1$. 故选 C.

7.【答案】 A

【考点提示】 随机变量

【解题分析】 由题意可知:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1, \quad P(AB) = P(B), \quad P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0,$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = 1.$$

8.【答案】 C

【考点提示】 随机变量及概率分布

【解题分析】 $D(XY) = E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2$, $E(XY) = E(X)E(Y) = 1$,

$$E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2) = 3 \times 5 = 15, \quad D(XY) = 14.$$

二、填空题

9.【答案】 6

【考点提示】 极限

【解题分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$. 由等价无穷小替换得

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, \quad \sin x \sim x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x) \cdot 2x}{3x} = 2.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$.

10.【答案】 $\sin 1 - \cos 1$

【考点提示】 定积分的定义

【解题分析】 由题意可知:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n}.\end{aligned}$$

又由定积分的定义得

$$\text{原极限} = \int_0^1 x \sin x dx = (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1.$$

根据定积分原理, 原式 $= \int_0^1 x \sin x dx = (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1.$

11.【答案】 $-dx + 2dy$

【考点提示】 全微分

【解题分析】 根据题意, 对 $(x+1)x - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两边分别关于 x, y 求导可得

$$z + (x+1)z'_x = 2xf(x-z, y) + x^2 f'_1(x-z, y)(1-z'_x)$$

$$(x+1)z'_y - 2y = x^2[f'_1(x-z, y)(-z'_y) + f'_2(x-z, y)],$$

将 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ 代入求得 $z'_x = -1, z'_y = 2$. 所以 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

12.【答案】 $\frac{1}{3} - \frac{2}{3e}$

【考点提示】 二重积分

【解题分析】 根据积分对称定理, 得

$$\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{3} - \frac{2}{3e}.$$

13.【答案】 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$

【考点提示】 求行列式

【解题分析】 根据题意并展开第一列有

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

14.【答案】 $\frac{2}{9}$

【考点提示】 概率论

【解题分析】 要求前三次必须恰好取到两个不同颜色的球, 第四次取到剩下一种

颜色的球 C_3^1 , 前三次恰好取到两种不同颜色的球的概率是 $C_3^1 C_2^1$, 故最终概率 $P = \frac{C_3^1 C_3^1 C_2^1}{3^4} = \frac{2}{9}$, 故所求概率为 $\frac{2}{9}$.

三、解答题

15. 【考点提示】 求极限

【解题分析】 原式 = $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4) + 2x \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right] - 1}{x^4}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4}}$$

$$= e^{\frac{1}{3}}.$$

16. 【考点提示】 微分方程

【解题分析】 (I) 因需求弹性定义 $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} < 0$, 而题设 $\eta = \frac{p}{120-p} > 0$, 故 $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = -\eta$,

即 $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{p-120}$, 得 $\frac{dQ}{Q} = \frac{p}{p-120}$, 等式两边积分, 得 $Q = c(p-120)$. 又该商品的最大需要量为 1200, 即当 $p=0$ 时, $Q=1200$, 由此可知 $c=-10$. 所以需求函数表达式为 $Q=10(120-p)$.

(II) 收益函数 $R(p) = pQ = 10p(120-p)$.

边际收益 $R'(p) = 1200 - 20p$, 当 $p=100$ 时, $R'(100) = -800$.

其经济意义是当价格为 100 万元时, 再增加一个单位价格, 收益将减少 800 万元.

17. 【考点提示】 定积分分类讨论

【解题分析】 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_0^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$,

$f'(x) = 4x^2 - 2x = 2x(2x-1)$, 且 $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $f''(0) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $\frac{1}{2}$ 处取极小值且

为最小值, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

18. 【考点提示】 积分与导数

【解题分析】 $\int_0^x f(x-t) dt$ 做变量替换, $u = x-t$, 则 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_x^0 f(u)(-du) =$

$$\int_0^x f(u) du.$$

化简方程可得

$$\int_0^x f(u) du = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + e^{-x} - 1,$$

两边同时求导后得