高等学校公共基础课“十三五”规划教材

高等数学同步辅导(上册)

—— 配合同济七版高等数学

杨有龙　陈慧婵　吴 艳　编◎

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校公共基础课“十三五”规划教材

高等数学同步辅导(上册)

——配合同济七版高等数学

杨有龙　陈慧婵　吴　艳　编

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是与同济大学数学系编写的第七版《高等数学》上册（高等教育出版社出版）相配套的同步辅导教材，书中各章均包括教学要求、答疑解惑、典型例题、习题选解和培优提升五个部分.

“教学要求”部分表明了施教的基本要求和教学目的；“答疑解惑”部分针对学生在学习过程中产生的疑难问题，采用问答的形式予以解答，可达到理清概念、释疑解惑的目的；“典型例题”部分通过对具体例题的分析和求解，引导学生产生联想，从中领悟求解的基本方法和途径，从而掌握一定的解题技巧和了解各种基本题型；“习题选解”部分通过对教材中有代表性的习题进行解答，为学生自我测试和检查对比提供方便；“培优提升”部分选取了近几年具有代表性的数学竞赛和考研试题并给出解答过程，为学生参加竞赛和考研预热.

本书可作为理工科大学生学习“高等数学”课程的同步辅导教材或参加数学竞赛和报考硕士研究生的理想复习资料，也可作为“高等数学”任课教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导：配合同济七版高等数学. 上册/杨有龙，陈慧婵，吴艳编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2016.8
高等学校公共基础课“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5606-4173-7

Ⅰ. ① 高…　Ⅱ. ① 杨…　② 陈…　③ 吴…　Ⅲ. ① 高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 184191 号

策划编辑　刘小莉
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印　　刷　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 17.5
字　　数　417 千字
印　　数　1～6000 册
定　　价　32.00 元
ISBN 978-7-5606-4173-7/O

XDUP 4465001-1

＊＊＊如有印装问题可调换＊＊＊

前　　言

高等数学以微积分为核心，具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性．它包含了处理连续变量的基本理论和科学思维方法，不仅是学习其他自然科学和工程技术的重要基础和工具，而且也是培养和训练学生逻辑推理和理性思维的重要载体．牢固掌握高等数学蕴含的基础知识，从中发掘和领会科学的思维方法，对大学生全面素质的提高、分析能力的加强和创新意识的启迪都至关重要．

本书与同济大学数学系编写的第七版《高等数学》教材(高等教育出版社出版)相配套，全书共十二章，分上、下两册出版．上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用与微分方程；下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分以及无穷级数．本书力求帮助学生加深对高等数学基本概念的理解，引导学生掌握高等数学的解题方法和技巧，培养学生的学习兴趣，启发学生举一反三，达到事半功倍的效果．本书旨在巩固和提升高等数学的教学效果和质量，为理工科大学生的高等数学自主学习提供同步辅导．

本书第一、二、三、四章由陈慧婵副教授执笔，第五、六、七、八章由杨有龙教授执笔，第九、十、十一、十二章由吴艳副教授执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿．

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学数学与统计学院领导和广大高等数学教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵的建议和修改意见，长期致力于高等数学教学和研究的老教师们给予了鼓励和支持，编者在此致以深深的谢意．

本书的出版得到了西安电子科技大学本科教材立项资助，以及西安电子科技大学出版社领导及编辑的大力支持，策划编辑刘小莉和责任编辑王瑛为本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，恳请读者批评指正．

编　者

2016 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

一、教学要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式. 理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性. 理解复合函数、分段函数、反函数及隐函数的概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

2. 理解数列极限与函数极限、函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系. 掌握极限的性质及其四则运算法则. 理解极限存在的两个准则，并会利用它们求极限. 掌握利用两个重要极限公式求极限的方法. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

3. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理、零点定理及介值定理)，并会应用这些性质.

二、答疑解惑

问题 1　“两函数相同”的含义是否是指它们的定义域与值域完全相同？

答　否. 两函数相同是指它们的定义域和对应法则完全相同，与两函数的值域及表示它们的记号无关.

例如函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$，虽然它们的定义域与值域完全相同，但它们的对应法则不同，因此它们不表示同一函数. 而函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 和 $g(t)=t\sqrt[3]{t-1}$，虽然它们表示形式有所不同，但由于它们的定义域和对应法则完全相同，所以它们表示同一函数.

问题 2　分段函数一定不是初等函数吗？

答　不一定. 初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，而分段函数是用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，这种表示函数的方法不仅与函数的定义并无矛盾，而且有现实意义. 判断一个分段函数是否为初等函数，需用初等函数的定义进行严格检验.

例如分段函数

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其另一表示形式为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，由于它是由基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的，所以它是初等函数.

又如分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 x, & x\leqslant 1,\\ \log_x x, & x>1,\end{cases}$$

它也可以表示为 $f(x)=1$，所以它也是初等函数.

问题 3 单调函数必有单值反函数，不单调的函数是否一定没有单值反函数?

答 不一定. 一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应法则 f 在定义域 D_f 与值域 R_f 之间是否构成一一对应的关系. 若是一一对应的关系，则它必存在单值反函数；否则就不存在单值反函数. 函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调性只是存在单值反函数的充分条件，而非必要条件.

例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，但它存在单值反函数 $f^{-1}(x)=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

问题 4 下列关于数列极限的论述是否正确?

(1) 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，总有无限多个 x_n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足 $x_n-a<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(3) 若对于任意给定的正整数 k，总存在正数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足 $|x_n-a|<\mathrm{e}^{-k}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

答 (1) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何表现为：①点 a 的任何 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$ 内都包含数列 $\{x_n\}$ 的无限多个点；②在 $U(a,\varepsilon)$ 以外，最多只有数列 $\{x_n\}$ 的有限多个点. 由于题设条件仅满足条件①而不满足条件②，故不能说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限. 例如，取

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 1, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，总有无限多个 $x_n(n=1,3,5,\cdots)$ 满足 $|x_n-0|<\varepsilon$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(2) 不正确. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$ 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 由于题设条件 $x_n-a<\varepsilon$ 成立无法保证 $|x_n-a|<\varepsilon$ 一定成立，故不能说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限. 例如，取 $x_n=-n+a(n=1,2,3,\cdots)$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足 $x_n-a<\varepsilon$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(3) 正确. 因为对于任意给定的正数 ε，总可以选取适当的正整数 k 使 $e^{-k}<\varepsilon$，对于上述 k，由题设总存在正数 N，当 $n>N$ 时，所有的 x_n 均满足 $|x_n-a|<e^{-k}<\varepsilon$，所以由数列极限的定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

问题 5 下列命题是否正确？

(1) 发散数列一定无界.

(2)“数列发散”和“数列不以 a 为极限”是两个完全等价的概念.

(3) 无界数列必为无穷大数列.

答 (1) 不正确. 发散数列未必无界. 例如数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1, 2, \cdots)$ 是发散的，但对一切自然数 n 都有 $|x_n|=1<2$，即它是有界的.

(2) 不正确. “数列发散”和“数列不以 a 为极限”是两个不同的概念. 数列发散是指数列不以任何常数为极限，而数列不以 a 为极限是指数列不收敛于定常数 a，但它却可能收敛于其他的定常数.

(3) 不正确. 由无穷大数列和无界数列的定义知，无穷大数列必为无界数列，但是无界数列未必就是无穷大数列. 例如数列 1，0，2，0，…，n，0，…是无界数列，但不是无穷大数列.

又如 $x_n=n+(-1)^n n(n=1, 2, \cdots)$ 是无界数列，但不是无穷大数列. 证明如下：

先证数列 $x_n=n+(-1)^n n(n=1, 2, \cdots)$ 是无界数列(即 $\forall M>0$，总存在某个自然数 n_0，使得 $|x_{n_0}|>M$).

对 $M>0$，取自然数 $N\geqslant M$，则有 $n=2N$，使得 $|x_n|=4N>M$，由无界数列的定义知，数列 $\{x_n\}$ 是无界数列.

再证数列 $x_n=n+(-1)^n n(n=1, 2, \cdots)$ 不是无穷大数列(即若 $\forall M>0$，总存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时对一切的 x_n 都有 $|x_n|>M$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大数列；否则，若存在 $M>0$，对任意自然数 N，使得当 $n>N$ 时的 x_n 都有 $|x_n|<M$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大数列).

对于 $M=1$ 以及任何自然数 N，取 $n=2N+1>N$，则有

$$|x_n|=|(2N+1)+(-1)^{2N+1}(2N+1)|=0<M=1,$$

由此可知数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大数列.

问题 6 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不以 A 为极限的分析定义是什么？

答 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不以 A 为极限的分析定义是：存在一个正数 ε_1，对于任意给定的 $\delta>0$，总有点 x_1 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$，使不等式 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_1$ 成立.

例 证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

证 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 的定义可知，需找出符合定义要求的 ε_1 和 x_1. 为此分析 $f(x)=x^2$ 在点 $x_0=2$ 的去心邻域 $\mathring{U}(2, \delta)$ 内的函数值，可知在 $\mathring{U}(2, \delta)$ 内总可找到大于 4 的函数值. 于是可取 $\varepsilon_1\leqslant 4-A=4-3=1$，并在 $\mathring{U}(2, \delta)$ 内找出一点 x_1，使 $f(x_1)>4$. 据此分析，给出证明如下：

取 $\varepsilon_1=1$，任意给定 $\delta>0$，取 $x_1=2+\dfrac{\delta}{2}\in\mathring{U}(2, \delta)$，则

$$|f(x_1)-A|=|x_1^2-3|=\left|\left(2+\frac{\delta}{2}\right)^2-3\right|>1=\varepsilon_1,$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

问题7 在自变量的同一变化过程中，无穷大有怎样的运算规律？

答 在自变量的同一变化过程中，关于无穷大有如下运算规律：

(i) 两个无穷大的积仍为无穷大.

(ii) 无穷大与有界函数的和、差仍为无穷大.

(iii) 在自变量的同一变化过程中，无穷大与极限不为零的有界函数的积仍为无穷大.

以上规律，根据无穷大的定义，都不难证明. 现仅以(i)为例，证明如下：

不妨设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则根据无穷大的定义，有

$\forall M>0$，$\exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)|>\sqrt{M}$；

对于上述$M>0$，$\exists\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，有$|g(x)|>\sqrt{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>\sqrt{M}$及$|g(x)|>\sqrt{M}$同时成立，此时$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|>M$，由无穷大的定义知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$.

这里提醒读者注意下列两种错误：

(1) 认为两个无穷大的和、差仍为无穷大. 这是错误的. 例如设$x_n=n+1$，$y_n=-n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1$；又如设$x_n=n+(-1)^{n+1}$，$y_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在.

(2) 认为两个无穷大的商仍为无穷大. 这是错误的. 例如设

$$f(x)=x^2+1,\ g(x)=2x^2-1,$$

则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$，但$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$；又如设

$$f(x)=x,\ g(x)=x^2+1,$$

则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$，但$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

问题8 无穷多个无穷小之和仍为无穷小吗？

答 不一定. 无穷多个无穷小之和的极限是不确定的，它可能发生以下几种情况：

(1) 无穷多个无穷小之和仍为无穷小. 例如，设$x_n=\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^3}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0.$$

(2) 无穷多个无穷小之和是不等于零的常数. 例如，设$x_n=\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

(3) 无穷多个无穷小之和是无穷大. 例如，设$x_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty.$$

问题 9　函数极限与数列极限之间有何关系？

答　下列定理体现了函数极限与数列极限的密切关系.

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或为$\infty$）的充分必要条件是：对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$（$n=1, 2, 3, \cdots$），都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（或为$\infty$）（证明略）.

由此定理可以得到数列极限在讨论函数极限时的一些应用.

（1）证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，常用的方法是找出一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$（$x_n\neq x_0$），使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$为无穷大；或找出两个收敛于 x_0 的数列 $\{y_n\}$、$\{z_n\}$（$y_n\neq x_0$，$z_n\neq x_0$），使$\{f(y_n)\}$与$\{f(z_n)\}$有不同的极限.

例　证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

证　取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$z_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$（$n=1, 2, 3, \cdots$），则

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin2n\pi=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

例　证明极限$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

证　取 $y_n=2n\pi$，$z_n=2n\pi+\pi$（$n=1, 2, 3, \cdots$），则

$$\lim_{n\to\infty}\cos y_n=\lim_{n\to\infty}\cos2n\pi=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\cos z_n=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\pi)=-1,$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

（2）证明函数 $f(x)$在 D 上无界，常用的方法是找出数列$\{x_n\}\subset D$，使$\{f(x_n)\}$为无穷大数列.

（3）证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$，常用的方法是找出一个收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$（$x_n\neq x_0$），使数列$\{f(x_n)\}$收敛.

例　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0, 1]$上无界，但该函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

证　取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$（$n=1, 2, 3, \cdots$），显然 $x_n\in(0, 1]$，则 $f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，所以 $f(x)$在区间$(0, 1]$上无界.

另一方面，取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$（$n=1, 2, 3, \cdots$），显然当 $n\to\infty$时，$y_n\to0^+$，而

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}2n\pi\ \sin2n\pi=0,$$

故$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\neq\infty$.

（4）求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的方法是先找一个收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$（$x_n\neq x_0$），求出 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，然后再证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.（例如学习重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 时，首先证

明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，再利用夹逼准则证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，最后利用换元法证明$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.)

定理的另一重要应用是可以利用函数的极限，求得某些数列的极限. 尤其当学习了洛必达法则后，许多目前难以求出的数列极限，可以根据这个定理，通过计算函数的极限来求得.

例 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)(a>0,a\neq1)$.

解 取$f(x)=\frac{a^x-1}{x}$，已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$，即$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\ln a$，又由于$x_n=\frac{1}{n}\to0(n\to\infty)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a.$$

问题 10 若$f(x)$在$x=x_0$处连续，是否存在x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$，使$f(x)$在该邻域内连续?

答 不一定. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{为有理数},\\0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

则$f(x)$在$x=0$处连续，而在$(-\infty,+\infty)$内的其他任何点都不连续，因此$f(x)$在连续点$x=0$的任何一个邻域都存在间断点.

问题 11 一切初等函数在其定义域内都连续吗?

答 不一定. 基本初等函数在其定义域内都连续，但对于初等函数来说，在其定义域内就不一定连续. 例如$\sqrt{\cos x-1}$是初等函数，它的定义域是$x=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$，是$x$轴上的一列孤立点，函数在这些点的附近没有定义，因此它在其定义域内没有连续性. 又如$\sqrt{x^2(x-1)^3}$是初等函数，它的定义域是$x=0$，$x\geqslant1$，函数在$[1,+\infty)$是连续的，但在$x=0$附近没有定义，因此它在其定义域内不连续. 但是，若初等函数的定义域内含有区间，则函数在该区间内是连续的. 通常把包含在定义域内的区间称为定义区间，因此可以说“一切初等函数在其定义区间内都是连续的”.

三、典型例题

例 1 函数$y(x)=\frac{\sqrt{x-x^2}}{\ln(2x-1)}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$的定义域为__________.

解 应填$\left(\frac{1}{2},1\right)$.

要函数$y(x)$有意义，需满足

$$\begin{cases} x-x^2\geqslant 0 \\ 2x-1>0 \\ 2x-1\neq 1 \\ \left|\dfrac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \\ -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<x<1,$$

即函数的定义域为$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

例 2　已知 $f(x-1)$的定义域为$[0, a](a>0)$，则 $f(x)$的定义域为(　　).

(A) $[1, a+1]$　(B) $[-1, a-1]$　(C) $[a-1, a]$　(D) $[a, a-1]$

解　应选(B).

由 $f(x-1)$的定义域为$[0, a](a>0)$可知 $0\leqslant x\leqslant a$，从而$-1\leqslant x-1\leqslant a-1$，即 $f(x)$的定义域为$[-1, a-1]$，故选(B).

例 3　设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x, & x\geqslant 0, \end{cases}$　$g(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0, \\ x+2, & x>0, \end{cases}$　求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解　(1) $f[g(x)]=\begin{cases} [g(x)]^2, & g(x)\leqslant 0, \\ -g(x), & g(x)>0, \end{cases}$

由题设知，当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)=2-x>0$；当 $x>0$ 时，$g(x)=x+2>0$. 于是对任何 x 都有 $g(x)>0$，故

$$f[g(x)]=-g(x)=\begin{cases} x-2, & x\leqslant 0, \\ -x-2, & x>0. \end{cases}$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases} 2-f(x), & f(x)\leqslant 0, \\ f(x)+2, & f(x)>0, \end{cases}$

由题设知，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$；当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$. 故

$$g[f(x)]=\begin{cases} 2+x, & x\geqslant 0, \\ x^2+2, & x<0. \end{cases}$$

例 4　设函数 $f(x)$对其定义域 D 上的一切 x 恒有 $f(a+x)=f(a-x)$，则称函数$f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 对称(或称函数 $f(x)$的图形有对称轴 $x=a$). 证明：若函数$f(x)$的图形有对称轴 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$，则函数 $f(x)$为周期函数，并求出其周期.

分析　由周期函数的定义知，只要能找到常数 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$，$x\in D$，$x\pm T\in D$ 即可.

证　由于 $f(x)$的图形以 $x=a$ 和 $x=b$ 为对称轴，于是有

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x).$$

在两式中分别用 $a-x$ 替换 x、$b-x$ 替换 x，进而有 $f(x)=f(2a-x)$且 $f(x)=f(2b-x)$，因此

$$f(2a-x)=f(2b-x).$$

在上式中用 $2a-x$ 替换 x，进而有

$$f(2a-2a+x)=f(2b-2a+x),$$

即

$$f[x+2(b-a)]=f(x).$$

故由周期函数的定义知，函数 $f(x)$为周期函数，且周期 $T=2(b-a)>0$.

例 5 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

分析 由有界函数的定义知，只要能找到常数 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 即可. 或者只要能找到常数 k_1、$k_2(k_2>k_1)$，使 $k_1\leqslant f(x)\leqslant k_2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 即可.

证 显然 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}>0.$$

又因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $(1-x^2)^2\geqslant 0$，即

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

综上可知，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $0<f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}=\dfrac{1}{2}$.

证 注意到当 $n>8$ 时，有

$$\left|\frac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3n+8}{2(2n^2+13n+20)}<\frac{4n}{4n^2}=\frac{1}{n}.$$

所以要想使 $\left|\dfrac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要使 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 且 $n>8$ 即可. 于是对于任意给定的正数 ε，取自然数 $N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right],8\right\}$，则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}=\frac{1}{2}.$$

注 证明极限存在时，可以在限定 n 取值的条件下将不等式进行适当的“放大”. 本例中放大 $\left|\dfrac{n^2+5n+6}{2n^2+13n+20}-\dfrac{1}{2}\right|$ 时是在 $n>8$ 的条件下进行的. 由于 $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 可能小于 8，所以取 N 时，应取既大于(或等于) $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 又大于 8 的自然数. 由于数列的极限与其前有限项无关，故 N 可以取得大一些.

例 7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 要从不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 直接求解 N 较为困难，故先利用二项式公式将 $|x_n-a|$ 适当放大.

当 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt[n]{n}>1$，令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda(\lambda>0)$，则

$$n=(1+\lambda)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2>\frac{n^2}{4}\lambda^2,$$

从而有 $\lambda<\frac{2}{\sqrt{n}}$，由此得 $\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. 对于任意给定的正数 ε，要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，即 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$，于是 $\forall\,\varepsilon>0$，取自然数 $N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon,$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 8　求数列 $x_n=\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}$ 的极限，其中 m 和 k 为正整数，且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$.

解　因分子、分母的极限均为无穷大，所以数列为“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，不能直接使用商的极限运算法则，应将其变形后再设法使用商的极限法则. 通过变形可得

$$x_n=\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=n^{m-k}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_m}{n^m}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_k}{n^k}},$$

利用和与商的运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_m}{n^m}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_k}{n^k}}=\frac{a_0+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_m}{n^m}}{b_0+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1}{n}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_k}{n^k}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

(1) 当 $m<k$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{m-k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-m}}=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=0;$$

(2) 当 $m=k$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{m-k}=1$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=1\cdot\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_0}{b_0};$$

(3) 当 $m>k$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{m-k}=\infty$，根据无穷大数列的运算法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=\infty.$$

综上所述，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=\begin{cases}0, & m<k,\\ \frac{a_0}{b_0}, & m=k,\\ \infty, & m>k.\end{cases}$$

注　本题的结果是一个重要且常用的数列极限公式. 下列数列极限公式非常有用，读者应熟练掌握：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0(k>0)$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(\left|q\right|<1)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

例 9 设 $a_n=\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 显然 $a_n\leqslant 1$，又

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}=\sqrt[n]{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}=1,$$

则由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$.

例 10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}\right]$.

解 该表达式共有 $2n+1$ 项，记

$$x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{(n+1)^2}.$$

因为 $n^2+1\leqslant n^2+k\leqslant(n+1)^2(k=1,2,\cdots,2n+1)$，所以

$$\frac{1+2+\cdots+(2n+1)}{(n+1)^2}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+(2n+1)}{n^2+1}.$$

又因为

$$1+2+\cdots+(2n+1)=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)(n+1),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(2n+1)}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(2n+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}=2.$$

由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right]=2.$$

类题 利用夹逼准则证明下列极限成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\cos n}{n}=0\left(\text{提示：}2-\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{2n+\cos n}{n}\leqslant 2+\dfrac{1}{n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}=10$(提示：$10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<10\sqrt[n]{10}$)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{n!}=0\left(\text{提示：}0<\dfrac{4^n}{n!}=\left(\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{4}\right)\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{n-1}\cdot\dfrac{4}{n}\right)<\dfrac{4^4}{4!}\cdot\dfrac{4}{n}\right)$.

例 11 设 $a_1=\sqrt{6}$，$a_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$，…，$a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}$，…，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证 方法一：由 $a_1=\sqrt{6}$，$a_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$知 $a_1<a_2$，设 $a_{n-1}<a_n$成立，则有

$$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}<\sqrt{6+a_n}=a_{n+1},$$

由归纳法知，数列$\{a_n\}$单调增加.

又$a_1=\sqrt{6}<3$，若$a_{n-1}<3$，则$a_n=\sqrt{6+a_{n-1}}<\sqrt{6+3}=3$，由归纳法知，数列$\{a_n\}$的上界为 3，从而由单调有界准则知极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$得$a=\sqrt{6+a}$，解之得$a=3$或$a=-2$(舍去)，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

方法二：直接证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

由$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}(a_n>0)$知

$$
\begin{aligned}
|a_n-3|&=\left|\sqrt{6+a_{n-1}}-3\right|\\
&=\frac{|a_{n-1}-3|}{\sqrt{6+a_{n-1}}+3}<\frac{1}{3}|a_{n-1}-3|<\frac{1}{3^2}|a_{n-2}-3|<\cdots<\frac{1}{3^{n-1}}|a_1-3|\to 0(n\to\infty),
\end{aligned}
$$

故由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

例 12　设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

证　由$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$知，$0<x_n<3$，从而有

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+(\sqrt{3-x_n})^2\right]=\frac{3}{2},$$

即数列$\{x_n\}$有上界.

下面考察数列$\{x_n\}$的单调性.

由于

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{x_n(3-x_n)-x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0,$$

故$\{x_n\}$单调增加，或者由$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1}\geqslant\sqrt{\dfrac{3}{3/2}-1}=1$知$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界准则知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，等式$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边同取极限得

$$a=\sqrt{a(3-a)}.$$

由此解得$a=\dfrac{3}{2}$或$a=0$(舍去)，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

注　对于像本题这样的利用递推关系式$x_{n+1}=f(x_n)$定义的数列求极限的问题通常用以下方法分两步解决：

第一步：利用单调有界准则证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

第二步：递推关系式$x_{n+1}=f(x_n)$两边同取极限后，解代数方程求出极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

例 13　计算下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\sqrt{x}}{3x^2+4x-1}\cos x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；