高等院校考研数学精品辅导丛书

高等数学

同济第七版 上册

同步辅导·习题全解·考研精粹

主编 张军好

教材习题详细解答
考研大纲深度解读
知识结构图全面归纳
典型题强化解题技巧
近年考研题模拟实战

西北工業大學出版社

高等院校考研数学精品辅导丛书

高等数学

同济第七版 上册

同步辅导·习题全解·考研精粹

主 编 张军好

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为《高等数学》(同济·七版)的配套辅导书,分为上、下两册.上册共分为7章,每章包含知识结构图、考研大纲要求、考研试卷分值统计、本章内容概述、题型与方法、考研真题解析、教材课后习题详解、目标自测题与答案共七部分.本书主要特点是例题种类详细,知识点的结构层次清楚,内容充实,方法性强以及与考研联系紧密.

本书是使用该教材的教师与学生的同步辅导书,也可作为考研数学复习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导·习题全解·考研精粹/张军好主编.—西安:西北工业大学出版社,2016.4

ISBN 978-7-5612-4779-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第073107号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路127号　　邮编:710072
电　　话: (029)88493844　88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 武汉武铁印刷厂
开　　本: 880mm×1 230mm　　1/32
印　　张: 20.375
字　　数: 529千字
版　　次: 2016年4月第1版　　2016年5月第1次印刷
定　　价: 52.00元(上、下册)

高等院校考研数学精品辅导丛书
编 委 会

前　　言

本书为《高等数学》(同济・七版)配套使用的学习辅导与习题全解,共分上、下两册,可以作为使用该教材的老师与学生的同步辅导书,也可作为考研数学的复习用书.

当前,我国的高等教育已经走向大众化的教育,社会各界对高等教育的质量十分关注.我们编写这本配套教辅书,主要是为了适应这种新时期大学数学教育的新要求,一方面满足学生学习高等数学课程的需要,期望对保证和提高高等数学课程的教学质量,对广大学生掌握高等数学的基本思想与方法起到辅导作用;另一方面,也为了满足不同层次的学生的学习需要,利用辅导书这种形式,对教材的内容与解题方法作出总结、延伸与扩展,对大学生继续深造给予帮助,同时对新时期的大学教育如何培养具有创新精神的优秀人才作出有益的探讨.

本册为配套辅导的上册,按照配套辅导书的编写要求,本册内容按章编写,与教材同步.每章包含知识结构图、考研大纲要求、考研试卷分值统计、本章内容概述、题型与方法、考研真题解析、教材课后习题详解、目标自测题与答案共七部分.基本结构如下:

知识结构图:对本章主要内容作一个结构图表,使读者对其重点内容关系结构一目了然.

考研大纲要求:结合教育部颁发的研究生入学考试的基本要求对本章教学内容按"了解""理解"与"掌握"3个层次进行了分类编注,使读者对高等数学的考研要求做到一目了然,成竹在胸.

考研试卷分值统计:对近16年来的历届研究生入学考试数学一、数学二中的高等数学内容分数值进行了统计,使读者对该章内容在考研数学中所占比例一目了然.

本章内容概述、题型与方法:该部分包含本节的知识结构图、重点内容概述、典型例题・方法与技巧三方面的内容。它对本章的内容与方法进行了归纳总结,将基本的理论、基本的方法、解题技巧等多方面的内容融于范例之中.这些典型例题注重分析解题思想,揭示解题规律,引导读者如何思考问题,对培养读者

理性思维及分析问题和解决问题的能力大有帮助.

考研真题解析:考研题型与方法部分主要将近 10 年来全国硕士研究生入学考试数学一、数学二试题中高等数学部分进行了归纳与整理,对典型的测试类型进行了详细的剖析,并指出了经常的测试类型的大致演变方向,使读者对考研题目有一个清楚的认识,把握学习的方向,这对以后考研大有益处.

教材课后习题详解:该部分对教材中节后练习与章后练习作出了详细的解答,以便学生在学习过程中对自己的解题答案与过程进行对照、比较,从中找出自己的不足之处,达到对问题的更深刻和更透彻的理解.

目标自测题与答案:该部分是笔者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的,目的是给读者提供更深入的练习机会,让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力.

本书体现了例题种类详细、知识点的结构层次清楚、内容充实、方法性强以及与考研联系紧密的特点.

编写本书曾参阅了相关文献资料,在此谨向其作者深表谢忱。

由于水平所限,书中难免有不妥之处,恳请各位同行、读者批评指正.

编　者

2016 年 2 月

目　　录

第一章　函数与极限

1 知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的定义及初等函数和分段函数，反函数和复合函数
    - 函数的性质：有界性、单调性、奇偶性和周期性
  - 极限
    - 极限的定义
      - 数列极限的 ε-N 定义*
      - 函数极限的 ε-δ 定义
    - 极限的性质
      - 数列极限的存在唯一性、有界性、局部保号性
      - 函数极限的存在唯一性、有界性、局部保号性
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、复合函数的运算法则
      - 极限存在的两个准则
      - 洛必达法则、泰勒公式
      - 两个重要极限、等价无穷小量代换
    - 无穷小量与无穷大量
      - 无穷小量与无穷大量的定义与关系
      - 无穷小量的性质
      - 无穷小量阶的比较
  - 连续
    - 连续的定义
    - 连续函数的性质：最大最小值定理、有界性定理和介值定理
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点

2 考研大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及极限四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用两个重要极限求极限.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无

穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

3 考研试卷分值统计

表 1-1 为近 16 年来,本章所含知识点在“数学一”和“数学二”考研真题试卷中所占分值统计.

表 1-1　第一章高等数学考研试卷分值统计情况

年份/年		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
分数	数学一	5	8	6	8	4	4	16	8	13	4	8	20	6	4	4	4
	数学二	12	19	12	18	14	8	24	12	21	17	8	18	22	18	8	4

4 本章内容概述、题型与方法

第一节　映射与函数

一、本节知识结构图

$$\text{函数}\begin{cases}\text{函数的定义域和值域}\\ \text{初等函数和分段函数,反函数和复合函数}\\ \text{函数的四大性质:有界性、单调性、周期性和奇偶性}\end{cases}$$

二、重点内容概述

1. 有界性

函数 $f(x)$ 在 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在一个正常数 M,使得对任意 $x\in I$,都成立 $|f(x)|\leqslant M$;函数 $f(x)$ 在 I 上无界 $\Leftrightarrow$ 对任意正常数 M,均存在一个 $x_0\in I$,使得 $|f(x)|>M$.

2. 单调性

$f(x)$ 在 I 上单调增加 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$;$f(x)$ 在 I 上单调减少 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$.

3. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称,若对任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$ ($f(-x)=f(x)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是奇(偶)函数.

4. 周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 I，如果存在数 $T>0$，使任意 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

三、典型例题 · 方法与技巧

例 1　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 单调增加，f^{-1} 为其反函数，x_1 是 $f(x)+x=a$ 的根，x_2 是 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根，试求 x_1+x_2.

解：由 $f(x_1)+x_1=a$ 知

$$f(x_1)+f^{-1}[f(x_1)]=a$$

表明 $f(x_1)$ 是方程 $f(x)+x=a$ 的根. 由于 f 是单调递增的，故 f^{-1} 也是单调递增的，因为 $f^{-1}(x)+x$ 是单调递增的，方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 有根必唯一，故 $f(x_1)=x_2$，因而

$$x_1+x_2=x_1+f(x_1)=a$$

注：例 1 用到结论：单调的函数必有反函数，且 f 与 f^{-1} 有相同的单调性.

例 2　若 $f(x)$ 是 $(-l,l)$ 上的奇函数，并且有反函数 $f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(x)$ 也是奇函数.

证明：由于 $f[f^{-1}(-x)]=-x$，则

$$x=-f[f^{-1}(-x)]=f[-f^{-1}(-x)]$$

于是 $f^{-1}(x)=-f^{-1}(-x)$，即 $f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$，因而 $f^{-1}(x)$ 是奇函数.

例 3　设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(1)=a$，$f(x+2)-f(x)=f(2)$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

(1)试用 a 表达 $f(2)$ 和 $f(5)$；

(2)a 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解：(1)由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+2)-f(x)=f(2)$$

且 $f(x)$ 为奇函数，则有 $f(-1+2)-f(-1)=f(2)$. 即 $f(2)=2f(1)=2a$.
同时有

$$f(1+2)-f(1)=f(2)，即\ f(3)=f(1)+f(2)=3a$$

再由 $f(2+3)-f(3)=f(2)$ 得

$$f(5)=f(3)+f(2)=3a+2a=5a$$

(2)由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)-f(x)$，即 $f(x+2)=f(x)+2a$，要使 $f(x)$ 以 2 为周期，即 $f(x+2)=f(x)$，则必须 $a=0$.

例 4　已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，求证：

(1)若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递减，则 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$；

(2)若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递增，则 $f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$.

证明：(1)由于 $0<x_1<x_1+x_2$，由 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递减知

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}<\frac{f(x_2)}{x_1}$$

又由 $0<x_2<x_1+x_2$，由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调递减知

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}<\frac{f(x_2)}{x_2}$$

故

$$f(x_1+x_2)=\frac{x_1}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)+\frac{x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)<x_1\frac{f(x_1)}{x_1}+x_2\frac{f(x_2)}{x_2}$$

即

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

(2)同理可证.

第二节 数列的极限

一、本节知识结构图

$$数列极限\begin{cases}定义(\varepsilon\text{-}N\ 定义)\\ 性质\begin{cases}存在唯一性\\ 有界性\\ 局部保号性\\ 收敛数列与其子列的关系\end{cases}\end{cases}$$

二、重点内容概述

1. 深刻理解数列极限 ε-N 的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 关于以上定义，有几点要加以说明：

(1)ε 的任意性：ε 是衡量 x_n 与 a 的接近程度，ε 越小表示接近程度越好，它除了是正数以外，不受任何限制，这说明 x_n 与 a 可以接近到任何程度，然而尽管它是任意的，一旦给出，就可暂时看作是固定不变的，以便用它来求 N. 再者，ε 既可选任意正数，那么 $2\varepsilon,3\varepsilon$ 或 ε^2 是任何正数，因此，定义中不等式右边的 ε 可用 $2\varepsilon,3\varepsilon$ 或 ε^2 来代替.

(2)N 的相应性：一般来说，N 随 ε 的减小而变大，所以 N 写作 $N(\varepsilon)$ 来强调 N 是依赖于 ε 的，但这种写法并不是说 N 是由 ε 唯一确定的，因此相对于任意 ε，若 $N=100$ 时满足要求，则 $N=101,102,\cdots$ 更能满足要求，其实 N 等于多大没关系，主要是它的存在性，只要存在一个 N，则大于 N 的任何一个正整数都能满足要求.

(3)定义中的"当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立"这句话是凡下标大于 N 的所有 x_n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$，从几何上讲就是凡下标大于 N 的所有 x_n 都落在 a 的 ε

邻域内，而在这个邻域外，至多有 N 项，或者说，收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$ 在 a 的任何邻域内含有 $\{x_n\}$ 的几乎全体的项. 因而改变或增加或去掉数列有限项，不会改变数列的收敛或发散性.

(4)极限定义未给出求极限的方法，只能验证某数是它的极限.

2. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

这是本节的难点，而在说明 N 的存在性时，通常采用放大的方法.

3. 数列的有界性说明

若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列，反之不成立，例 $\{(-1)^n\}$ 有界但不收敛.

4. $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛于相同的极限.

三、典型的例题 · 方法与技巧

例 1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+3}=\dfrac{1}{2}$.

证明: $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{n}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{4n+6}<\frac{3}{4n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只需 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\text{，即}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}$$

例 2　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}=0$.

证明: $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}<\varepsilon$$

只需 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}-0\right|<\varepsilon\text{，即}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}=0$$

例 3　判断数列 $x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$ 是否收敛.

解: 对于数列有以下结论:

$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\Leftrightarrow$ 任意子列 $\{y_{n_k}\}$ 均收敛于 a

故若有两个子列的极限存在但不相等，则 $\{y_n\}$ 必发散，用此结论:

取 $n=4k+1$，则

$$\text{子列 } x_{4k+1}=\cos\frac{4k+1}{2}\pi=0\to0$$

取 $n=4k+2$，则

$$\text{子列 } x_{4k+2}=\cos\frac{4k+1}{2}\pi=-1\to-1$$

由于 $0\neq-1$,故数列 $x_n=\cos\frac{n\pi}{2}$发散.

第三节　函数的极限

一、本节知识结构图

- 函数的极限
  - 函数极限的定义
    - 自变量趋于有限值
    - 自变量趋于无穷大
  - 函数极限的性质
    - 存在唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
  - 函数极限与数列极限的关系

二、重点内容概述

1. 理解函数极限的定义并会应用定义验证某个有限数是在自变量某种趋势下的极限

若把数列$\{x_n\}$看作是自变量 n 的函数,即 $x_n=f(n)$,则数列极限就是一种特殊函数的极限,因而函数极限的证明方法与数列极限类似,不再赘述.

2. 函数极限的两个结论

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

以上两个结论可用来求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,同时也可用来判定 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

3. 函数极限的性质

其性质与数列极限的性质相对应,又略有不同.下面以对自变量的其中一种趋近方式加以说明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$:

(1)存在唯一性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则极限唯一;

(2)局部有界性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则 $\exists\,\delta>0$,当 $x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$时,$f(x)$有界(数列的有界性是 $\forall\, n\in N$,有 x_n 有界);

(3)局部保号性:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的极限为 A,且 $A>0(A<0)$,则 $\exists\,\delta>0$ 时,当 $x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$时,$f(x)>0(<0)$.

三、典型的例题 · 方法与技巧

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，当$|x|>1$时，要使

$$\left|\frac{x+2}{x+1}-1\right|=\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{|x|-1}<\varepsilon$$

只需$|x|>\frac{1}{\varepsilon}+1$，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\max\left\{1,\frac{1}{\varepsilon}+1\right\}=\frac{1}{\varepsilon}+1>0$，当$|x|>X$时，有

$$\left|\frac{x+2}{x+1}-1\right|<\varepsilon\text{，即}\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$$

例 2　证明函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, x<0\\0, \quad x=0\\x+1, x>1\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时，$f(x)$的极限不存在.

证明：由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1,\lim_{x\to0^+}f(x)\lim_{x\to0^+}(x+1)=1$$

$-1\neq1$；则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

例 3　证明 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$不存在.

证明：取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\cos2n\pi=1,\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于 $1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$不存在.

第四节　无穷大与无穷小

一、本节知识结构图

$$\text{无穷小与无穷大的关系}\begin{cases}\text{无穷小}\begin{cases}\text{无穷小的定义}\\\text{无穷小的性质}\end{cases}\\\text{无穷大}\begin{cases}\text{无穷大的定义}\\\text{无穷大的性质}\end{cases}\end{cases}$$

二、重点内容概述

1. 无穷小量

无穷小量是以 0 为极限的量，随着自变量的变化，越变越小的数，很小很小的数均不一定是无穷小量，0 是唯一一个是无穷小量的常数，当我们说一个量是无穷小量时，必定要连同自变量的趋近方式一起说明，比如 $x\to1$ 时 x^2-1 是无穷小量.

2. 无穷小量的性质