普通高等学校“十三五”规划教材

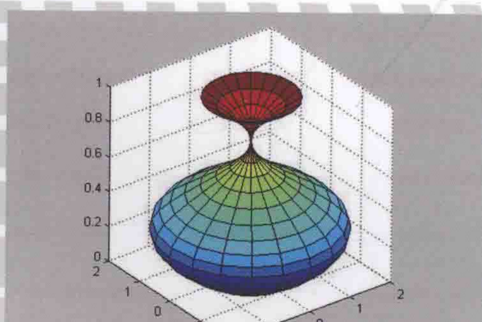
高等数学

（独立院校用）

下册

GAODENG SHUXUE (DULI YUANXIAO YONG)

梁　茜　张国强　张玲玲　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十三五”规划教材

高等数学

（独立院校用）

下册

主编　梁　茜　张国强　张玲玲
参编　彭　丽　任淑青　荣建华
主审　李忠定

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本系列教材是专门为大学独立院校工科各专业编写的公共课教材，共4册：《高等数学（独立院校用）》（上、下册）、《线性代数与几何（独立院校用）》、《概率论与数理统计（独立院校用）》。编者根据独立院校的教育教学特点及多年的教学经验撰写，**是河北省2011年度高等教育教学改革立项项目的研究成果**。本书为《高等数学（独立院校用）·下册》，内容包括多元函数的微积分学、重积分、曲线积分和曲面积分、常微分方程等。

本书适合作为普通高等学校独立院校工科各专业高等数学课程的教材，也适合作为一般的本专科、成人教育高等数学课程的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/梁茜，张国强，张玲玲主编．—北京：中国铁道出版社，2016.1

普通高等学校“十三五”规划教材．独立院校用

ISBN 978-7-113-20999-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①梁… ②张… ③张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第236104号

书　　名： 高等数学（独立院校用）·下册
作　　者： 梁　茜　张国强　张玲玲　主编

策　　划： 李小军　　**读者热线：**（010）63550836
责任编辑： 李小军
编辑助理： 曾露平
封面设计： 付　巍
封面制作： 白　雪
责任校对： 汤淑梅
责任印制： 李　佳

出版发行： 中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址： http://www.51eds.com
印　　刷： 三河市兴达印务有限公司
版　　次： 2016年1月第1版　　2016年1月第1次印刷
开　　本： 720mm×960mm　1/16　　**印张：** 10.75　**字数：** 210千
书　　号： ISBN 978-7-113-20999-5
定　　价： 25.00元

前　言

本书根据广大读者、同行和专家的意见和建议以及编者的教学实践编写完成，本书遵循以下几条原则：

1. 在结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的风格和体系基础上，注意吸收当前教学改革中一些成功的经验，使得本书更加适应当前教学的需要。

2. 注重教材的严谨性。注重书中例题、习题和答案的正确性，无论是自学内容还是课后习题，都更加便于理解。

3. 注重内容的实用性。使教材在注重基础的同时兼顾深入，以适应当前我国独立院校本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需求。

4. 注重教材例题和习题的层次化。本书优化了书中的例题和习题，对于超过教学基本要求的习题均采用“*”号标出，在教学中可以根据不同专业，不同教学时数等情况加以取舍，也可以供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考。

5. 注重教材的完整性。每章后有小结，包含学习目的、学习重点和难点，并以框架格式列出每章主要内容，以帮助读者更加深入理解每章的知识体系。

本书是在石家庄铁道大学四方学院领导的大力支持下，由梁茜、张国强、张玲玲、彭丽、任淑青、荣建华共同编写而成。其中梁茜、张国强、张玲玲担任主编，李忠定教授主审。在此，我们对本书编写过程中给予我们支持和帮助的专家、同行和读者表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正，以使本书不断完善。

编　者

2015 年 10 月

目　录

第 7 章

多元函数微分学及其应用

上册中所讨论的函数只有一个自变量，这种函数称为一元函数. 但在很多实际问题中往往牵涉多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，以二元函数为主，讨论多元函数的微分法及其应用.

本章内容如下：

与上册的微积分基础知识对应，包括多元函数的基本概念、二元函数的极限及连续性、有界闭区域上连续函数的性质.

与一元函数求导法则对应，包括多元函数求偏导法则、复合函数的链式法则、隐函数(组)求(偏)导数法则、多元函数的全微分，以及多元函数连续性、偏导数存在性、偏导数与可微分的关系.

与一元函数微分学的应用对应，包括多元函数微分学在几何上的应用：求空间曲线的切线、曲面的切平面，求多元函数的极值、最值. 作为偏导数的推广，讨论了方向导数的概念及求法，介绍了梯度的概念.

7.1 多元函数的基本概念

7.1.1 邻域 区域

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 为正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$$
$$=\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

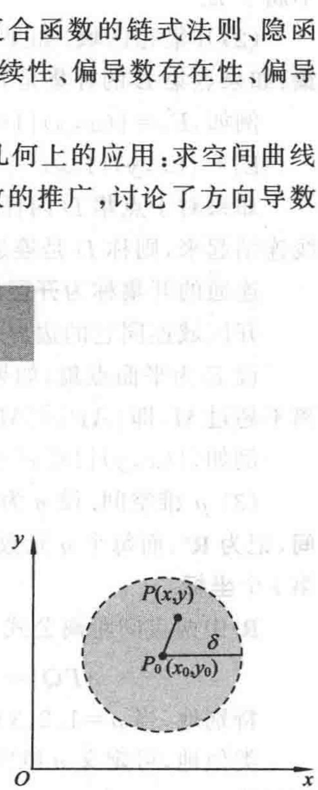


图 7-1

从几何图形上看，$U(P_0,\delta)$ 就是以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、以 δ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体，如图 7-1 所示. 类似地，可定义点 P_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的某个邻域，点 P_0 的某个去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

(1)内点和边界点. 设 E 是平面上的一个点集，P 是该平面上的一个点，如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**，如图 7-2 所示.

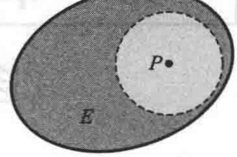


图 7-2

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**，如图 7-3 所示. E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

例如，点集

$$E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$$

的边界为 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

注意　E 的内点必属于 E；E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

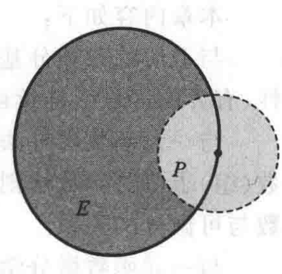


图 7-3

(2)开集和区域. 如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**；如果点集 E 的补集是开集，则称 E 为**闭集**.

例如，$E_2=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为开集；

$E_3=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 为闭集.

如果对于点集 D 内任何两点，都可用一条完全属于 D 的折线连结起来，则称 D 是**连通**的.

连通的开集称为**开区域**，简称**区域**. 例如，$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为区域.

开区域连同它的边界一起称为**闭区域**. 例如，$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 为闭区域.

设 E 为平面点集，如果存在正数 M，使得对于 E 中的任意点 P 与某一定点 A 的距离不超过 M，即 $|AP|\leqslant M$，则称 E 为**有界点集**，否则称 E 为**无界点集**.

例如，$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域；$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是无界开区域.

(3) n 维空间. 设 n 为一个自然数，我们称 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，而每个 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个**点**，数 x_i 称为该点的第 i 个**坐标**.

$\mathbf{R}^n$ 中两点间距离公式：设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，则

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地，当 $n=1$、2、3 时，$|PQ|$ 分别为数轴、平面、空间中两点间的距离.

类似地，可定义 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域、内点、边界点、区域等概念，如 $\mathbf{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}.$$

7.1.2 二元函数的概念

1. 定义

在实践中，我们常常遇到因变量依赖于多个自变量的情形.

【例 1】 底半径为 r，高为 h 的圆柱体的体积 V 的计算公式为

$$V=\pi r^2 h \quad (r>0,h>0).$$

其中，底半径 r 与高 h 是相互独立的两个自变量，当它们在 $r>0,h>0$ 的范围内任意取定一对值后，体积 V 有唯一确定的值与之对应.

【例 2】 一定量的理想气体的压强 p 与容器体积 V，绝对温度 T 之间有以下关系：

$$p=\frac{RT}{V} \quad (V>0,T>0,R \text{ 为常数}).$$

其中，V 与 T 是相互独立的两个自变量，当它们在 $V>0,T>0$ 的范围内任意取定一对值后，压强 p 有唯一确定的值与之对应.

以上两例的具体意义虽不同，但它们在数学特征上却有明显的共性，我们将这种共性抽象成二元函数的概念.

定义 7.1 设有变量 x、y 和 z，如果当变量 x、y 在一定范围内任意取定一对值 (x,y) 时，变量 z 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值与 (x,y) 对应，则称这个法则 f 为 x、y 的**二元函数**，记作

$$z=f(x,y) \quad (\text{或 } z=z(x,y)).$$

变量 x、y 称为**自变量**，而变量 z 称为**因变量**，自变量 x、y 的变化范围称为函数的**定义域**.

类似地，可定义三元及三元以上函数. 二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

二元函数的定义域是 xOy 平面上的点集，三元函数的定义域是空间内的点集，四元及四元以上函数的定义域无几何意义.

【例 3】 求函数 $f(x,y)=\ln(x+y)$ 的定义域.

解 当 $x+y>0$ 时，函数有意义，所以函数的定义域为 $\{(x,y)|x+y>0\}$，如图 7-4所示.

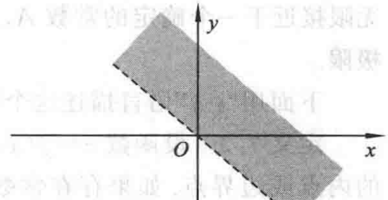


图 7-4

【例 4】 求 $f(x,y)=\arcsin(3-x^2-y^2)$ 的定义域.

解 由 $|3-x^2-y^2|\leqslant 1$ 解得 $2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，因此，$f(x,y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

如图 7-5 所示.

2. 图形

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，则对于 D 中每一点 $P(x,y)$，依照函数关系 f，对应于空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点 $M(x,y,f(x,y))$. 当点 $P(x,y)$ 在 D 中变动时，点 $M(x,y,f(x,y))$

就相应地在空间中变动，一般地，动点 $M(x,y,f(x,y))$ 的轨迹是一个曲面（见图 7-6），这个曲面称为二元函数的**图形**.

例如，由空间解析几何知，二元函数

$$z=1-x-y$$

的图形是一个平面，该平面在三坐标轴上的截距均为 1.

又如，二元函数

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

表示的曲面是一个中心在原点，半径为 a 的上半球面.

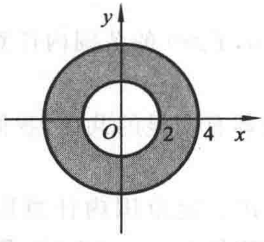


图 7-5

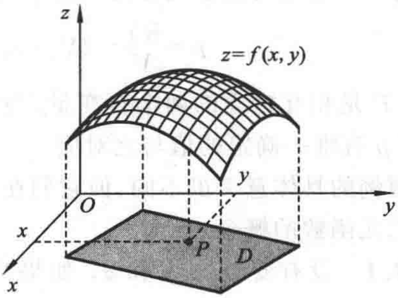


图 7-6

7.1.3 二元函数的极限

现在讨论二元函数 $z=f(x,y)$，当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，就称 A 是二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**.

下面用"ε-δ"语言描述这个概念.

定义 7.2 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的某个定义区域的内点或边界点. 如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，只要 D 内的点 $P(x,y)$ 适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

对应的函数值 $f(x,y)$ 都满足不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad (\text{或} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A),$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad (\text{或 } f(x,y)\to A\ (\rho\to 0)).$$

其中，$\rho=|PP_0|$，而**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域. 也称上述二元函数

的极限为**二重极限**.

注意 二元函数极限定义与一元函数类似,因此二元函数有着与一元函数极限类似的性质及运算法则,如极限的四则运算法则、夹逼准则、无穷小的运算性质等.

【例 5】 证明:$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

证明 方法一:当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$0\leqslant\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

又因为
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

方法二:令 $\rho=x^2+y^2$,则$(x,y)\to(0,0)$时,$\rho\to 0^+$,因此

$$\text{原式}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0\quad(\text{有界函数乘以无穷小仍是无穷小}).$$

【例 6】 计算:$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解 因为$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$0\leqslant\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|x|\leqslant\frac{1}{2}|x|.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x=0,$$

因此,由夹逼准则,得
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

按照二元函数极限的定义,二元函数的极限存在是指:点 $P(x,y)$以任意方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$时,函数值 $f(x,y)$都趋向于同一个常数. 由此可以得到确定二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在的方法:

(1) 选取 $P\to P_0$的一种方式,通常取沿某条过 P_0的直线(或曲线)L 趋向于 P_0,按此方式,$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in L}}f(P)$不存在;

(2) 选取 $P\to P_0$的两种不同的方式,通常取沿两条过 P_0的直线(或曲线)C_1,C_2趋向于 P_0的方式,使得

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_1}}f(P)=A_1,\ \lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_2}}f(P)=A_2,\ A_1\neq A_2.$$

【例 7】 讨论下列极限的存在性.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解 (1) 设 $P(x,y)\to O(0,0)$的路径为 x 轴所在的直线 ,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

不存在，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x^2+y^2}$不存在.

(2) 取 $P(x,y)\to O(0,0)$的路径为 x 轴所在的直线，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=0.$$

取 $P(x,y)\to O(0,0)$的路径为直线 $y=x$，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

事实上，当点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx$ 趋向于点$O(0,\ 0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

该极限值随 k 的不同而不同，即当点 $P(x,y)$沿着不同的直线 $y=kx$ 趋向于点$O(0,\ 0)$时，对应的函数值趋向于不同的常数，因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

7.1.4 二元函数的连续性

定义 7.3 设二元函数 $f(x,y)$的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点或边界点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**连续**.

类似定义三元函数及三元以上的函数的连续性.

如果 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$是函数 $f(x,y)$的**间断点**.

若函数 $f(x,y)$在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x,y)$在 D 内连续.

【例 8】 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$处的连续性.

解 当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

而
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

因此，由夹逼准则得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$.

故函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

注意 一元函数中关于连续函数的运算法则,对于多元函数仍适用.

多元初等函数是指由常数、多个自变量及一元基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算,且可以用一个解析式表示的多元函数.

例如 $xy-\dfrac{x}{2y}$,$(x+y)+\arctan\ln(1+x^2y)$等都是多元初等函数.

结论 一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

【例 9】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.

解 原式$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+4-4}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

以上运算的最后一步用到了二元函数$\dfrac{1}{\sqrt{xy+4}+2}$在点$(0,0)$处的连续性.

与闭区间上一元连续函数的性质类似,在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质：

性质 7.1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上连续的多元函数,在 D 上必能取得它的最大值和最小值.

性质 7.2(介值定理) 在有界闭区域 D 上连续的多元函数,必能取到介于函数最大值和最小值之间的任何值.

习题 7-1

1. 已知函数 $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$,求 $f(2,1)$和 $f(\sqrt{x},x+y)$.

2. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,求 $f(x+y,x-y,xy)$.

3. 设 $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{xy}{x^2+1}$,求 $f(x,y)$.

4. 求下列函数的定义域,并绘出定义域的草图.

(1) $z=\ln(x^2+2y-1)$； (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$； (4) $z=\dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2+1)}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}(\sin x+\sin y)$.

6. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

7. 讨论函数 $z=\dfrac{x+y}{x-y^2}$ 的连续性.

8. 描绘下列函数的图形：

(1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；　　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

(3) $z=2-x^2-y^2$；　　(4) $z=xy$.

7.2 偏导数

7.2.1 偏导数的概念及其计算

1. 定义

对于一元函数，我们由研究函数的变化率引入了导数的概念，而多元函数同样需要讨论它的变化率. 但多元函数的自变量不止一个，研究起来要复杂得多. 为了方便，可以考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.

下面以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，讨论偏导数的概念. 首先给出偏增量的定义：

如果 y 保持不变(可看作常数)，只有 x 发生变化时，z 可视为关于 x 的一元函数，当 x 取得增量 Δx 时，函数 z 的增量为

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

称之为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处关于 x 的**偏增量**，记为 $\Delta_x f(x,y)$（或 $\Delta_x z$），即

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$$

同理，函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处关于 y 的偏增量为

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

而二元函数 $f(x,y)$ 关于 x 的变化率，就是 y 保持不变时，$f(x,y)$ 关于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 7.4　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 $y=y_0$，而 x 在 x_0 处取到增量 Δx 时，相应地，函数有偏增量：

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},z_x(x_0,y_0)\text{或 }f_x(x_0,y_0)\text{①},$$

即
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数的定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点 (x,y) 处对 x 的偏导数 $f_x(x,y)$ 都存在，那么这个偏导数仍是 x、y 的函数，称它为函数 $z=f(x,y)$ 对**自变量** x 的**偏导(函)数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x\text{或 }f_x(x,y).$$

即
$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$

记作 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y$ 或 $f_y(x,y)$.

与一元函数类似，函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值，而 $f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值，即 $f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$f_y(x_0,y_0)=f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

将二元函数 $f(x,y)$ 关于 x 的偏导数定义式与一元函数 $f(x)$ 的导数定义式比较可得，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 关于 x 的导数，即

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

类似地，
$$f_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}.$$

偏导数的定义可以推广到二元以上函数，如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处的偏导数为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

① 偏导数记号 z_x,f_x 也记成 z_x',f_x'，下面高阶偏导数的记号也有类似的情形.

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

2. 计算

从偏导数的定义可以看出，二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$就是把 $f(x,y)$ 中的变量 y 看作常数时，对自变量 x 的导数. 所以，求多元函数的偏导数相当于求一元函数的导数，在求偏导数时，并不需要用新的方法. 一元函数的求导法则（如四则运算求导法则、复合函数求导法则）和求导公式对多元函数的偏导数仍然适用.

【例 1】 求函数 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2+\sin x$ 对 x 和 y 的偏导数.

解 把 y 看作常数，函数 $f(x,y)$ 对 x 求导数，得

$$f_x(x,y)=2x+3y+\cos x,$$

再把 x 看作常数，函数 $f(x,y)$ 对 y 求导数，得

$$f_x(x,y)=3x+2y.$$

【例 2】 求函数 $z=x^2y+\sin(xy)$ 在 $(1,0)$ 处的两个偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy+y\cos(xy)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+x\cos(xy)$，

因此，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=2xy+y\cos(xy)\Big|_{(1,0)}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}=x^2+x\cos(xy)\Big|_{(1,0)}=2.$

需要注意，“求某点的偏导数时，先求偏导函数再代值”的方法不一定简便，如下例.

【例 3】 设 $f(x,y)=xe^{xy}+(x+y)\ln(1+x^2y)$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$.

解 由于 $f(x,y)$ 的表达式很复杂，先求偏导函数再代值计算量大，因此利用“求多元函数的偏导数相当于求一元函数的导数（把其他自变量看成常数）”这一性质，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1},$$

而

$$f(x,0)=x,$$

因此，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=1.$$

【例 4】 已知理想气体的状态方程

$$pV=RT(R\text{ 为常数}),$$

证明：$\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-1.$

证明 由函数 $p=\dfrac{RT}{V}$ 得$\dfrac{\partial p}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$.

同理，由函数 $V=\dfrac{RT}{p}$ 得$\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{p}$；由函数 $T=\dfrac{pV}{R}$ 得$\dfrac{\partial T}{\partial p}=\dfrac{V}{R}$.

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

这表明偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$是一个整体，不能理解为分子与分母之商，这是与一元函数的导数记号的不同之处.

如果在函数表达式 $f(x,y)$ 中将两个自变量 x,y 对调后，仍为原来的函数，称该函数 $f(x,y)$ 对变量 x,y 具有**轮换对称性**. 若函数对变量 x,y 具有轮换对称性，且已知$\dfrac{\partial z}{\partial x}$的表达式，则只要将$\dfrac{\partial z}{\partial x}$中的 x,y 对调就能得到$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例如，函数 $z=x^4+y^4-2x^2y^2$ 对变量 x,y 具有轮换对称性.

【例 5】 设 $z=[\ln(xy)+1]^3$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 注意到函数 $z=[\ln(xy)+1]^3$ 对 x,y 具有轮换对称性，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3[\ln(xy)+1]^2\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{3}{x}[\ln(xy)+1]^2,$$

所以利用轮换对称性得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{y}[\ln(xy)+1]^2.$$

3. 偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 上一点，过点 M_0 作平面 $y=y_0$，此平面与曲面相交得到一条曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$，如图 7-7 所示. 该曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$，由导数的几何意义得，导数$\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$表示该曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率，因此，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义是：曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 相交所得的曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率. 同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 相交所得的曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率.

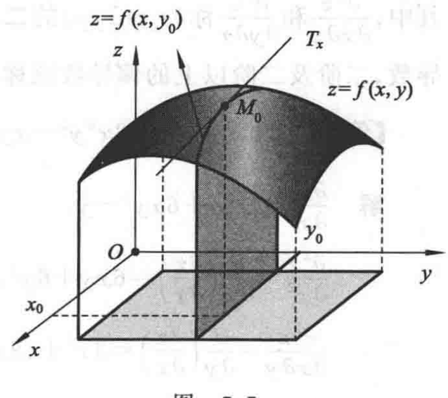


图 7-7

4. 二元函数连续与偏导数存在之间的关系

与一元函数的连续与可导的关系不同，二元函数的连续与偏导数存在之间无必然联系，即二元函数在某一点处的偏导数存在并不能保证函数在该点连续；反之，二元函数在某一点处连续也不能保证函数在该点处的偏导数存在. 下面两例证实了这一结论.

【例 6】 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$处的偏导数存在，