

Discrete-Continuous Analysis and Application
of Nonlinear Sampled-data Control Systems

非线性采样控制系统 连续离散分析方法及应用

沈艳军 张道远 夏小华 著



科学出版社

非线性采样控制系统连续 离散分析方法及应用

Discrete-Continuous Analysis and Application
of Nonlinear Sampled-data Control Systems

沈艳军 张道远 夏小华 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍了非线性采样控制系统稳定性理论和非线性采样控制系统应用,所利用的分析方法主要是连续离散法.全书共7章:第1章绪论,介绍非线性采样控制系统国内外研究进展;第2章讨论非线性采样系统一般模型及其稳定性;第3章介绍下三角非线性系统采样观测器的设计;第4章给出基于采样数据下三角非线性系统全局指数镇定;第5章讨论下三角非线性系统时滞采样观测器的设计;第6章探讨基于时滞采样数据下三角非线性系统镇定;第7章给出基于采样数据本质非线性系统指数镇定.

本书可作为自动控制专业高年级本科生及研究生教材或参考书,也可供其他相关领域学者和工程师参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性采样控制系统连续离散分析方法及应用=Discrete-Continuous Analysis and Application of Nonlinear Sampled-data Control Systems/沈艳军,张道远,夏小华著.—北京:科学出版社,2017.3

ISBN 978-7-03-052175-0

I. ①非… II. ①沈… ②张… ③夏… III. ①非线性-采样系统-研究
IV. ①TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第053836号

责任编辑:范运年 王 苏 责任校对:桂伟利

责任印制:张 倩 封面设计:铭轩堂

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年3月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年3月第一次印刷 印张:14 1/2

字数:292 000

定价:96.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

随着数字计算机技术和数字信号处理技术等科学技术的发展, 数字控制系统在现代化工业的各领域得到了广泛的使用和重视. 目前, 高精度数字设备已应用到国民经济、国防建设及科学实验等各个方面. 在计算机控制系统中, 连续时间信号和离散时间信号通过 A/D、D/A 互相转换, 使得控制系统的性能分析更加复杂. 同时, 采样会带来假频、有限字长等问题, 在相邻两个采样时刻之间, 系统处于开环状态, 从而连续时间控制理论就无法直接应用到计算机控制系统中. 因此, 采样控制理论受到了众多学者越来越多的关注, 成为控制科学研究的热点之一.

采样控制系统是由连续时间对象和离散时间控制器所组成的控制系统. 在采样控制系统中, 传感器周期性地得到系统的状态量, 在每一个采样时刻, 控制器对传感器获得的采样信息进行分析和处理, 计算出相应的控制量, 再通过保持器作用于被控对象. 在每一个采样周期内, 采样控制系统的控制量是不变的, 是分段常量的控制量. 按照系统特性, 采样控制系统可分为线性采样系统和非线性采样系统. 按照时变特性, 又可分为定常采样系统和时变采样系统. 美国工程院院士 Manfred Morari 曾指出工程系统的模型往往是非线性的, 非线性采样系统的动态行为通常更加复杂. 近年来, 关于采样系统稳定性问题的研究得到了学者越来越多的关注, 取得了丰富的研究成果, 形成了三类主要方法: ①不考虑系统采样区间内特性, 在被控对象的精确或近似离散模型基础上设计控制器(DTD 方法); ②考虑采样周期内特性, 在被控对象采样模型的基础上设计控制器(SDD 方法); ③连续设计然后再离散化的方法(CTD 方法).

本书涉及非线性采样控制系统稳定性理论和非线性采样控制系统应用两个方面, 所利用的方法主要是连续设计再离散化的方法. 本书共 7 章, 第 1 章介绍非线性采样控制系统国内外研究进展; 第 2 章提出四种非线性采样系统的一般模型: 非线性单采样系统一般模型、非线性多采样系统一般模型、非线性时滞单采样系统一般模型、非线性时滞多采样系统一般模型, 并研究了这些系统的稳定性, 给出了相应稳定性的代数判据; 第 3 章在采样数据不存在滞后的情况下, 分别介绍

单输出、多输出下三角非线性系统采样观测器的设计，并给出了最大允许的采样周期和最大允许的时滞；第4章讨论了单输出下三角非线性系统采样状态反馈全局指数镇定、采样状态反馈全局一致最终有界、采样输出反馈全局指数镇定、采样输出反馈全局一致最终有界，并将有关结果推广到多输出下三角非线性系统；第5章分别讨论单输出、多输出下三角非线性系统时滞采样观测器的设计，并将观测器的设计推广到存在量化误差的情况，给出观测器误差一致有界的条件；第6章探讨单输出下三角非线性系统时滞采样状态反馈全局指数镇定、时滞采样状态反馈全局一致最终有界、时滞采样输出反馈全局指数镇定、时滞采样输出反馈全局一致最终有界，并将相关结果推广到多输出下三角非线性系统；第7章在不存在时滞和存在时滞两种情况下，讨论基于采样数据本质非线性系统指数镇定。

由于编者水平有限，加之时间仓促，对书中存在的缺点和错误之处，衷心地希望和欢迎读者批评和指正。

沈艳军

2016年10月于三峡大学

目 录

前言	
第 1 章 绪论	1
1.1 非线性采样控制系统	1
1.2 非线性采样控制系统研究现状	2
1.3 本书主要内容	5
第 2 章 非线性采样系统	6
2.1 非线性单采样系统	6
2.1.1 非线性单采样系统的一般模型	6
2.1.2 非线性单采样系统的稳定性	7
2.1.3 进一步推广	10
2.2 非线性多采样率系统	12
2.2.1 非线性多采样率系统的一般模型	12
2.2.2 非线性多采样率系统的稳定性	13
2.3 非线性时滞单采样系统	17
2.3.1 非线性时滞单采样系统的一般模型	17
2.3.2 非线性时滞单采样系统的稳定性	18
2.4 进一步推广	25
2.5 非线性时滞多采样率系统	28
2.5.1 非线性时滞多采样率系统的一般模型	28
2.5.2 非线性时滞多采样率系统的稳定性	29
2.6 本章小结	31
第 3 章 下三角非线性系统采样观测器	32
3.1 单输出下三角非线性系统采样观测器	32
3.1.1 问题描述	32
3.1.2 采样观测器设计	33
3.1.3 数值仿真	39
3.2 多输出下三角非线性系统多采样率观测器	40
3.2.1 问题描述	40
3.2.2 多采样率观测器设计	41
3.2.3 数值仿真	47

3.3	单输出下三角非线性系统一致最终有界采样观测器	48
3.3.1	问题描述	48
3.3.2	全局一致最终有界采样观测器	49
3.3.3	数值仿真	56
3.4	多输出下三角非线性系统一致最终有界多采样率观测器	57
3.4.1	问题描述	57
3.4.2	全局一致最终有界多采样率观测器	58
3.4.3	数值仿真	66
3.5	本章小结	68
第4章	基于采样数据下三角非线性系统全局指数镇定	69
4.1	单输出下三角非线性系统采样状态反馈全局指数镇定	69
4.1.1	问题描述	69
4.1.2	采样状态反馈全局指数镇定	70
4.1.3	数值仿真	75
4.2	单输出下三角非线性系统采样状态反馈全局一致最终有界	76
4.2.1	问题描述	76
4.2.2	采样状态反馈全局一致最终有界	77
4.2.3	数值仿真	82
4.3	单输出下三角非线性系统采样输出反馈全局指数镇定	83
4.3.1	问题描述	83
4.3.2	采样输出反馈全局指数镇定	84
4.3.3	数值仿真	89
4.4	单输出下三角非线性系统采样输出反馈全局一致最终有界	91
4.4.1	问题描述	91
4.4.2	采样输出反馈全局一致最终有界	91
4.4.3	数值仿真	98
4.5	多输出下三角非线性系统多采样率输出反馈全局指数镇定	99
4.5.1	问题描述	99
4.5.2	多采样率输出反馈全局指数镇定	100
4.5.3	数值仿真	107
4.6	多输出下三角非线性系统采样输出反馈全局一致最终有界	109
4.6.1	问题描述	109
4.6.2	多采样率输出反馈全局一致最终有界	109
4.6.3	数值仿真	115
4.7	本章小结	116

第 5 章 下三角非线性系统时滞采样观测器	118
5.1 单输出下三角非线性系统时滞采样观测器	118
5.1.1 问题描述	118
5.1.2 时滞采样观测器设计	119
5.1.3 数值仿真	125
5.2 多输出下三角非线性系统时滞多采样率观测器	126
5.2.1 问题描述	126
5.2.2 时滞多采样率观测器设计	127
5.2.3 数值仿真	129
5.3 单输出下三角非线性系统一致最终有界时滞采样观测器	130
5.3.1 问题描述	130
5.3.2 全局一致最终有界时滞采样观测器	131
5.3.3 数值仿真	140
5.4 多输出下三角非线性系统一致最终有界时滞多采样率观测器	141
5.4.1 问题描述	141
5.4.2 全局一致最终有界时滞多采样率观测器	142
5.4.3 数值仿真	145
5.5 本章小结	147
第 6 章 基于时滞采样数据下三角非线性系统镇定	148
6.1 单输出下三角非线性系统时滞采样状态反馈全局指数镇定	148
6.1.1 问题描述	148
6.1.2 时滞状态反馈全局指数镇定	149
6.1.3 数值仿真	154
6.2 单输出下三角非线性系统时滞采样状态反馈全局一致最终有界	155
6.2.1 问题描述	155
6.2.2 时滞采样状态反馈全局一致最终有界	156
6.2.3 数值仿真	162
6.3 单输出下三角非线性系统时滞采样输出反馈全局指数镇定	163
6.3.1 问题描述	163
6.3.2 时滞采样输出反馈全局指数镇定	164
6.3.3 数值仿真	169
6.4 单输出下三角非线性系统时滞采样输出反馈全局一致最终有界	171
6.4.1 问题描述	171
6.4.2 时滞采样输出反馈全局一致最终有界	171
6.4.3 数值仿真	178
6.5 多输出下三角非线性系统时滞多采样率输出反馈全局指数镇定	179

6.5.1	问题描述	179
6.5.2	时滞多采样率输出反馈全局指数镇定	180
6.5.3	数值仿真	186
6.6	多输出下三角非线性系统时滞多采样率输出反馈全局一致最终有界	187
6.6.1	问题描述	187
6.6.2	时滞多采样率输出反馈全局一致最终有界	188
6.6.3	数值仿真	195
6.7	本章小结	196
第 7 章	基于采样数据本质非线性系统指数镇定	197
7.1	基于采样数据一类本质非线性系统指数镇定	197
7.1.1	问题描述	197
7.1.2	稳定性分析	198
7.1.3	数值仿真	203
7.2	基于时滞采样数据本质非线性系统(7.2)的指数镇定	204
7.2.1	问题描述	205
7.2.2	稳定性分析	205
7.2.3	数值仿真	208
7.3	基于采样数据本质非线性系统(7.1)的指数镇定	209
7.3.1	问题描述	209
7.3.2	稳定性分析	210
7.3.3	数值仿真	215
7.4	基于时滞采样数据本质非线性系统(7.1)的指数镇定	217
7.4.1	问题描述	217
7.4.2	稳定性分析	217
7.4.3	数值仿真	221
7.5	本章小结	222
	参考文献	223

第1章 绪 论

随着计算机等科学技术的发展,高精度数字设备在现代化工业的各领域得到了广泛的使用和重视.在控制科学的研究领域中,特别是一些高精度的领域,如航空航天等领域,对被控对象的检测和控制大多数是通过这些尖端的数字设备来完成的.因此,采样控制系统受到了众多学者越来越多的关注,成为控制科学研究的热点之一.

对于一个采样控制系统来说,其被控对象模型是时间连续的,控制器的数学模型却是时间离散的.采样控制系统利用传感器周期性地采样可以得到控制系统的状态量,控制器在每一个采样时刻对传感器读取的状态信息进行分析和处理,计算出相应的控制量,再通过采样保持器使之作用于被控对象.这样,采样控制系统的控制量在每一个采样周期内是保持不变的,它是分段常量的控制量.按照时变特性,采样系统可分为定常采样系统和时变采样系统,按照系统特性,又可分为线性采样系统 and 非线性采样系统.美国工程院院士 Manfred Morari 指出工程系统的现实模型通常是非线性的,而非线性采样控制系统的动态行为更加复杂.

此外,在采样控制系统中,计算机只能以有限位存储字节.所以在数字控制器的执行过程中,采样数据必须进行量化处理.最后,在采样控制系统中还存在着固有时滞,这些固有时滞主要有数据采集、量化造成的滞后以及控制器运算造成的滞后.一般情况下,这些纯滞后常数比较小,对控制系统的影响不明显,其副作用常常被忽略.但是在磁悬浮控制力矩陀螺这种需要高精度指标的航天高精密领域,滞后的影响将变得非常突出.因此,研究时滞、采样量化非线性采样控制系统的建模,研究其稳定性理论和控制方法,具有重要的理论和实际意义.本章将系统介绍近年来关于非线性采样控制系统取得的成果.

1.1 非线性采样控制系统

计算机技术的发展对控制科学与工程领域产生了深刻的影响,众所周知,目前越来越多的系统都是基于计算机来控制的.典型的计算机反馈控制系统如图 1.1 所示.

输出信号 $y(t)$ 是连续时间信号,经过 A/D 转换变成数字信号,这一转换过程称作采样.采样在采样时刻 t_k 进行,计算机把采样后得到的信号数列 $\{y(t_k)\}$ 通过相应的控制算法加以处理,从而得到控制序列 $\{u(t_k)\}$.控制序列 $\{u(t_k)\}$ 再经过

D/A 转换器转换成模拟信号, 施加到被控对象. 一般情况下在相邻的两个采样时刻之间使用零阶保持器, 即在一个采样周期控制信号保持不变. 通常, 一个计算机控制系统既有连续时间信号, 也有采样得到的离散时间信号, 其本质上是一个混杂系统.

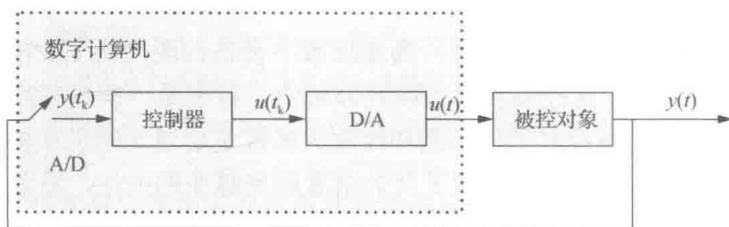


图 1.1 计算机控制系统

1.2 非线性采样控制系统研究现状

本质上说, 采样控制系统是一类复杂的混杂非线性系统, 系统的状态为一个状态对, 即连续状态和离散状态, 系统同时按照连续时间动力学和离散时间动力学演化并相互作用、相互影响. 系统的演化可由一组基于连续时间变量和离散时间变量的运动来刻画. 近年来, 关于采样系统稳定性问题的研究得到了学者越来越多的关注, 取得了丰富的研究成果. 目前, 按照控制器设计时所针对的模型, 采样系统控制器的设计方法主要可以分为以下三类方法.

(1) 不考虑系统采样区间内特性, 在被控对象的精确或近似离散模型基础上设计控制器 (DTD (discrete-time design) 方法).

DTD 方法是基于被控对象的离散模型进行控制器设计的方法. 它所研究的离散模型有两种: 被控对象的精确离散模型和近似离散模型. 因此, 采样系统的 DTD 方法可分为 DTD 方法和近似 DTD 方法. 通常情况下, 线性采样系统的精确离散模型比较容易获得, 故线性采样系统的 DTD 方法都是利用其精确离散模型来设计控制器. 非线性采样系统的模型比较复杂, 其精确离散模型也可能非常复杂甚至在某些情况下不能获得其精确离散模型. 然而, 其近似离散模型相对容易获得且复杂度也有所下降, 易于控制器的设计. 此外, 采用适当方法获得的近似模型在一定程度上也能反映原系统一些重要的性质. 关于这一点, Kazantzis 等^[1]利用泰勒方法将时间连续的被控对象离散化, 并指出该方法获得的离散模型具有较高的精度. 在控制领域的背景下, Kazantzis 等^[2]又进一步研究了泰勒法将系统离散化的精度问题, 给出了基于该方法控制器设计的方法, 为近似 DTD 方法的研究奠定了基础. Nešić 等^[3]讨论了近似模型所要满足的模型一致性, 并给出了近似模型设

计出的控制器使得精确离散模型稳定的充分条件。更重要的是,在不需要精确数学模型的情况下,他们给出了近似模型的模型一致性的充分条件,避开了精确模型不易获得这一难点,提高了近似 DTD 方法的可行性。随后,Nešić 等^[4]又研究了基于高阶近似模型设计的控制器使得精确模型稳定的问题,并给出了高阶近似模型的模型一致性条件。除此以外,采样系统近似 DTD 方法的 ISS (input-to-state stable) 稳定问题^[5]、指数稳定问题^[6]、镇定问题^[7]等也均有研究。

由于被控制的对象日益复杂,通常采用多台计算机对被控对象实行多回路的反馈控制。在这样的情况下,要求控制系统在各处用单一的速率进行采样通常是不实际的,甚至是不可能的。此外,采样器和保持器采样速率也往往是不一致的,保持器一般比采样器运转快,所以输入采样率比测量采样率高。因此,在系统各采样点上以不同的采样速率同时进行采样的多采样率数字控制系统近年来得到广泛的研究。利用线性化原理,Hu 等^[8]研究了一类多步长非线性采样控制系统。但是该方法仅适用于平衡点的局部范围。Polushin 等^[9]利用 Lyapunov 函数方法讨论了一类多步长非线性系统的状态反馈的采样镇定问题,在组成部件没有量化误差的情况下得到了半全局实用稳定性。基于输入多采样率控制系统,杨春曦等^[10]给出了系统静态输出反馈控制器的设计方法,通过求解带有线性矩阵不等式约束的凸优化问题获得控制器参数,使得多采样率控制系统获得更好的控制性能。在采样控制系统中,计算机只能以有限位存储字节,所以在数字控制器的执行过程中,采样数据必须进行量化处理。文献[11]运用近似 DTD 方法,在非线性系统的近似离散模型基础上设计了全局状态反馈镇定器。在系统近似误差和采样量化误差满足一定的条件下,得到了含量化误差的多步长非线性采样系统是半全局实用渐近稳定的。

在采样系统背景下,有学者探讨了基于近似 DTD 方法观测器的设计问题。例如,文献[12]和文献[13]研究了近似 DTD 方法的采样观测器设计问题。其中文献[12]还分析了何种情况下,近似模型设计的观测器可以让近似系统稳定却无法稳定精确系统。Abbaszadeh 等^[14]讨论了基于近似 DTD 方法鲁棒性观测器的设计。金辉宇^[15]给出了近似 DTD 方法下的观测器指数稳定的条件。

DTD 方法和近似 DTD 方法都是在被控对象的离散模型进行控制器设计的方法。但是,非线性系统的离散模型可能非常复杂,不利于控制器的设计。当系统存在未知非线性或不确定性时,甚至不能获得其近似离散模型。这样,DTD 方法和近似 DTD 方法就失效了。此外,两种方法在设计过程中忽略了系统的采样区间内特性,从而有可能在采样时刻之外,被控系统达不到要求的性能。

(2) 考虑采样周期内特性,在被控对象采样模型的基础上设计控制器(SDD(sampled-data design)方法)。

SDD 方法不仅考虑了采样时刻的系统特性,而且考虑了系统在采样区间内的特性,但是该方法需要系统的精确模型^[16].对于这类方法的研究,目前的研究成果还不是很多.对于定常、线性的被控对象,该方法的使用难度还比较合适.但是对于具有时变、非线性特性甚至微分包含形式的被控对象,该方法下的采样系统模型非常复杂,控制器设计难度将大大提高.同样,对于非线性系统,要得到离散时间模型有时是很困难的.即使得到离散时间模型,由于通常存在离散化误差,所以结果一般是半全局的或实用稳定的.

(3)CTD(continuous-time discretization)方法:对被控对象连续时间的模型设计出时间连续的控制器,然后将该连续控制器在充分小的采样周期下离散化,从而获得满足闭环性能要求的离散控制器.

简单地说,CTD 设计方法就是先连续设计然后离散化.在设计连续时间控制器时,可以运用目前已有的针对时间连续被控对象的控制器设计方法,这样可以使控制器的设计变得相对容易且理论分析易于处理.例如,Clarke 等^[17]研究了可控非线性系统在非连续反馈控制器下的可镇定问题.对于非连续控制器下的可控非线性系统的指数可镇定性问题也进行了讨论^[18].利用该方法,人们还研究了非线性采样系统的调节问题^[19]、 L_2 稳定性问题^[20]和 ISS 稳定性问题^[21].Nešić 等^[22]讨论了基于 CTD 采样系统的次优预测控制,分析了时间连续的控制器离散后应用于该采样系统的稳定性问题.文献[23]和文献[24]利用递归设计法研究了非线性系统采样状态控制器的设计问题.Owens 等^[25]对控制器离散的采样周期与采用离散化控制器得到的闭环系统稳定性之间的关系进行了详细的讨论,他得到这样的结论:当控制器离散化的采样周期小于某一个采样周期上界时,离散后的控制器依然可以使系统稳定.在离散后的控制器性能方面,文献[26]讨论了控制器离散化的采样周期与采用离散化控制器的闭环系统吸引域之间的关系.利用非光滑控制技术,都海波等^[27]对一类本质非线性系统设计了采样状态反馈控制器,并证明了存在一个最大采样周期保证闭环系统的全局渐近稳定性.余宏旺等^[28]考虑了系统采样周期固定情况下的一类多步长非线性采样控制系统,利用 CTD 方法设计采样控制器,同时考虑到量化误差的影响,对所设计的控制器进行了修改,并给出了近似误差和量化误差允许范围以保证闭环系统的实用稳定性.在考虑时滞存在的情况下,沈艳军等^[29,30]给出了非线性时滞采样控制系统的一般模型,并利用 Lyapunov 稳定性理论给出了其指数稳定的条件,分别研究了非线性系统时滞采样状态反馈镇定问题和输出反馈镇定问题.在存在量化误差情况下,文献[31]研究了单输出下三角非线性系统时滞采样输出反馈全局一致最终有界控制问题.

将 CTD 方法用于非线性系统观测器的设计也取得了一些进展.利用连续设计和采样时刻校正的方法,Karafyllis 等^[32]设计了非线性系统采样观测器.在采样存

在时滞的情况下,文献[33]研究了一类误差可线性化的非线性系统采样观测器设计问题,该采样观测器由预测和校正两部分组成.利用连续离散混合分析方法,证明了存在最大采样周期和最大时滞使得误差系统是指数稳定的.文献[34]和文献[35]分别利用小增益方法和高增益方法设计了非线性系统采样时滞观测器.张健等^[36]给出了用于重构系统状态的两种观测器(即连续时间观测器和采样观测器)的设计.接下来,基于这两种观测器的重构信号分别设计了采样控制器,并论证了基于连续时间观测器的采样控制器可以保证闭环采样系统的渐近稳定性,而基于采样观测器的采样控制器可以保证闭环采样控制系统状态有界.

CTD 是连续设计再离散化的方法,它也存在一些问题,例如,为了达到一定的闭环性能要求,通常需要将控制器在一个充分小的采样周期内进行采样和计算反馈控制等工作.这就对硬件提出了较高的要求^[37],使硬件方面的成本增大,一些过高的要求甚至使硬件实现变得异常困难.这一系列的硬件代价只是为了提高采样控制器对连续控制器的逼近程度,从而间接提高闭环采样系统的性能.这种花费巨大代价去间接提高系统性能的方法,无疑是对硬件的一种浪费,使硬件方面的利用率低下.此外,文献[29]、文献[30]、文献[34]、文献[35]虽然考虑了存在时滞的问题,但是要求时滞小于采样周期.总之,非线性采样控制系统虽然已经取得了一系列的成果,但是还有很多问题值得进一步研究.

1.3 本书主要内容

本书是关于非线性采样控制系统理论与应用的一本专著,涉及非线性采样控制系统稳定性理论和非线性采样控制系统应用两方面的内容,所利用的分析方法主要是连续离散法.本书主要包括以下内容.

(1)理论方面.首先,建立非线性采样控制系统一般模型,讨论其解的存在性、唯一性、稳定性,利用 Lyapunov 稳定性理论和连续离散方法给出其稳定性代数判据.其次,建立非线性时滞采样控制系统一般模型,讨论其解的存在性、唯一性、稳定性.利用 Lyapunov 稳定性理论,构造含参数的迭代数列,通过该数列的收敛性来判定非线性时滞采样控制系统的稳定性,并给出其稳定性代数判据.

(2)应用方面.在应用方面,利用非线性采样控制系统、非线性时滞采样控制系统的稳定性理论,分别系统讨论具有下三角结构单输出非线性系统、多输出下三角非线性系统采样观测器、时滞采样观测器设计;分别讨论基于采样数据、时滞采样数据具有下三角结构单输入单输出、多输入多输出等非线性系统的镇定问题;讨论本质非线性系统基于采样数据、时滞采样数据状态反馈镇定问题等.

第2章 非线性采样系统

随着计算机等科学技术的发展,高精度数字设备在现代化工业的各领域得到了广泛的应用和重视.在控制科学的研究领域,特别是一些高精度的领域(如航空航天等领域),对被控对象的检测和控制大多数是通过这些尖端的数字设备来完成的。因此,采样控制系统受到了众多学者越来越多的关注,成为控制科学研究的热点之一.本章建立非线性采样系统、非线性多采样率系统、非线性时滞采样系统和非线性时滞多采样率系统的一般模型,给出其解的定义和解的指数稳定性定义.利用连续离散方法,研究其指数稳定条件.这些内容是进一步研究非线性采样控制系统和非线性时滞采样控制系统观测器设计、镇定控制器设计的理论基础.

2.1 非线性单采样系统

2.1.1 非线性单采样系统的一般模型

考虑如下非线性单采样系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}) \\ t_{k+1} = t_k + T(t_k, x(t_k)), \\ x(t_{k+1}) = R(T(t_k, x(t_k)), \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t), x(t_k)), k \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 表示系统的状态; $t_k > 0$ 表示采样时刻; $T: R^+ \times R^n \rightarrow (0, r]$ 是界为 r 的有界函数,表示采样周期; $f: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 是连续函数; $R: R^+ \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 是有界函数.

对于任意 $(t_0, x_0) \in R^+ \times R^n$, 分段连续函数 $t \rightarrow x(t) \in R^n$ 可以按如下算法得到:

- (1) 由 t_k 通过公式 $t_{k+1} = t_k + T(t_k, x(t_k))$ 计算得到 t_{k+1} ;
- (2) 解微分方程 $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1})$, 得到当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时的状态值 $x(t)$;

- (3) 利用公式 $x(t_{k+1}) = R(T(t_k, x(t_k)), \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t), x(t_k))$, 计算状态 $x(t)$ 在 $t = t_{k+1}$

时刻的值.

对于系统(2.1), 做如下假设.

假设 2.1.1 $0 < T_{\min} = \min \{T(t_k, x(t_k))\} \leq T_{\max} = \max \{T(t_k, x(t_k))\}$.

假设 2.1.2 存在 $l > 0$ 使非线性函数 $f(\cdot)$ 满足下面的 Lipschitz 条件:

$$\|f(x, x_0) - f(\hat{x}, x_0)\| \leq l \|x - \hat{x}\| \quad (2.2)$$

下面给出非线性单采样系统 (2.1) 解的定义及其稳定性的定义.

定义 2.1.1 对于非线性单采样系统 (2.1) 及 $(t_0, x_0) \in R^+ \times R^n$, 分段连续函数 $t \rightarrow x(t, t_0, x_0)$ 满足系统 (2.1), 且 $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, 则称 $x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (2.1) 的解. 如果 $f(\cdot)$ 满足 $f(0, 0) = 0$, 且存在非减函数 $N: R^+ \rightarrow R^+$ 和正实数 λ , 对于任意的 $x_0 \in R^n$ 使 $\|x(t, t_0, x_0)\| < \exp(-\lambda(t - t_0)) N(\|x_0\|)$, 则系统 (2.1) 是全局指数稳定的, 正实数 λ 为指数衰减率.

2.1.2 非线性单采样系统的稳定性

本小节将给出充分条件使非线性单采样系统 (2.1) 是全局指数稳定的, 所用的方法就是构造一个收敛的序列. 通过这个收敛的序列不仅得到非线性单采样系统 (2.1) 在采样时刻是指数收敛的, 而且证明了其在采样区间内也是指数收敛的.

定理 2.1.1 对于非线性单采样系统 (2.1), 如果存在正实数 α_1, β_1 和正实数 $\alpha_2 < 1$ 以及定义在区间 $[t_0, \infty)$ 上的径向无界正定可微函数 $V(x(t))$ 满足条件:

$$\left. \frac{dV(x(t))}{dt} \right|_{(2.1)} \leq -\alpha_1 V(x(t)) + \beta_1 V(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2.3)$$

$$V(x(t_{k+1})) \leq \alpha_2 V(x(t_k)), \quad k \geq 0 \quad (2.4)$$

则非线性采样系统 (2.1) 是全局指数稳定的, 且指数衰减率为 $-1/T_{\max} \ln \alpha_2$.

证明 对式 (2.3) 两边同时乘以 $e^{\alpha_1 t}$, 可得

$$e^{\alpha_1 t} \left. \frac{dV(x(t))}{dt} \right|_{(2.1)} + \alpha_1 e^{\alpha_1 t} V(x(t)) \leq e^{\alpha_1 t} \beta_1 V(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

即

$$\left. \frac{d(e^{\alpha_1 t} V(x(t)))}{dt} \right|_{(2.1)} \leq e^{\alpha_1 t} \beta_1 V(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

对上面的微分不等式在区间 $[t_k, t]$ ($t_k \leq t < t_{k+1}$) 内求积分, 得

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &\leq \left(\left(1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) e^{-\alpha_1(t-t_k)} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) V(x(t_k)) \\
 &\leq \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) V(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

由式(2.4)易得

$$V(x(t_k)) \leq \alpha_2^k V(x(t_0)) \tag{2.6}$$

对于任意的 $t > t_0$, 存在 $k \geq 0$ 使得 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 则有 $\frac{t-t_0}{T_{\max}} - 1 \leq k$, 进一步由式(2.5)和式(2.6)可得

$$\begin{aligned}
 V(x(t)) &\leq \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \alpha_2^{\frac{t-t_0}{T_{\max}} - 1} V(x(t_0)) \\
 &= \exp\left(\frac{t}{T_{\max}} \ln \alpha_2\right) \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \alpha_2^{\frac{t_0}{T_{\max}} - 1} V(x(t_0))
 \end{aligned}$$

从而, 系统(2.1)是全局指数稳定的.

如果采样区间是常数, 即 $T = T(t_k, x(t_k))$, 由定理 2.1.1 可以得到如下推论.

推论 2.1.1 对于非线性采样系统(2.1), 如果存在正实数 α_1 、 β_1 和正实数 $\alpha_2 < 1$ 以及定义在区间 $[t_0, \infty)$ 上的径向无界正定可微函数 $V(x(t))$ 满足条件:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dV(x(t))}{dt} \right|_{(2.1)} &\leq -\alpha_1 V(x(t)) + \beta_1 V(x(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \\
 V(x(t_{k+1})) &\leq \alpha_2 V(x(t_k)), \quad k \geq 0
 \end{aligned}$$

则非线性采样系统(2.1)是全局指数稳定的, 且指数衰减率为 $(-1/T) \ln \alpha_2$.

如果在非线性单采样系统(2.1)中, $R(T(t_k, x(t_k))), \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t), x(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t)$,

即 $x(t_{k+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t)$, 则可得如下非线性采样系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}) \\ t_{k+1} = t_k + T(t_k, x(t_k)) \\ x(t_{k+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} x(t), & k \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$