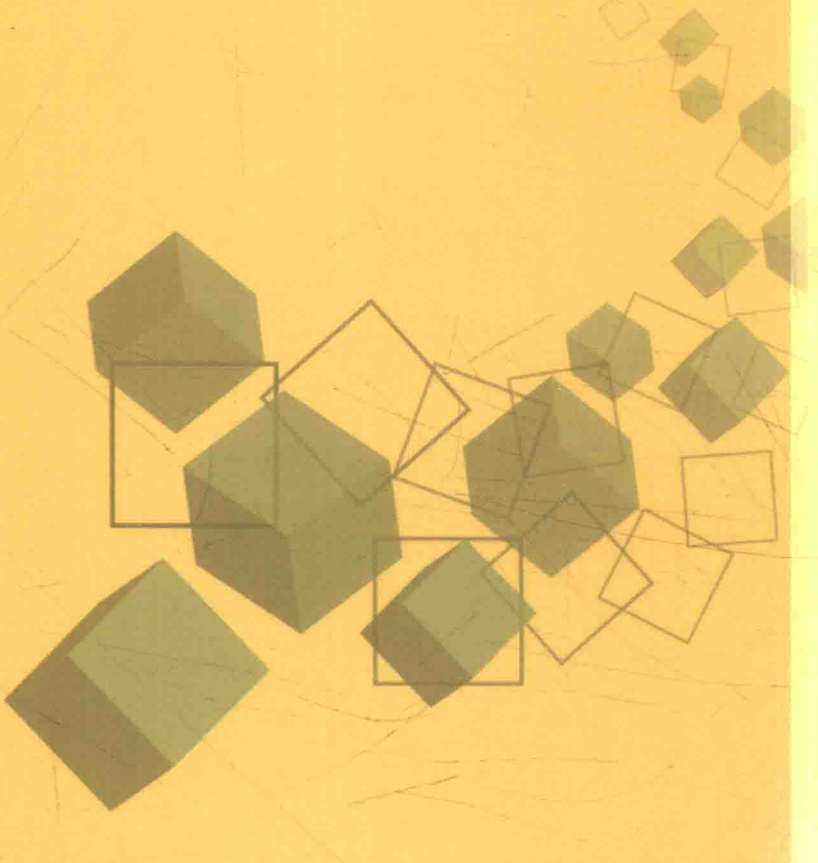
应变的几何场理论

肖建华 著



科学出版社

应变的几何场理论

肖建华　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

理性力学的张量化表述是非常抽象的，因而阻碍了其在工程力学上的应用。在工程上如何理解和应用应变张量是本书的主题，也是现代力学进入工程化的必经之地。结构寿命评价、稳定性等的理论方程；断裂、疲劳、流变等力学理论问题均可归结为更基本的应变理论问题。本书主要内容包含应变(变形)的张量理论；变形张量的陈-Stokes直和分解的几何意义及运动方程；弯曲变形(杆板壳弯曲)的应变及力学意义；微结构的弯曲变形与疲劳断裂；大变形的非线性运动方程；流变；流体的应变。

本书可作为工程力学(疲劳断裂、结构完整性、稳定性)，理性力学等专业本科生和研究生的教材，也可作为相关行业科技工作人员和工程师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应变的几何场理论 / 肖建华著. —北京：科学出版社，2017
ISBN 978-7-03-050711-2

Ⅰ.应… Ⅱ.肖… Ⅲ.应变分析 Ⅳ.TB301.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第278314号

责任编辑：魏英杰 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017年1月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：314 000

定价：80.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

该书作者在20世纪八九十年代前期从事地震波反射勘探相关技术的研究与开发。出于探测地下深部小断裂及地层裂隙带等的技术需求，1994年到英国爱丁堡大学进修1年。在此期间，他系统地学习研究了国外理性力学方面的著作，开始用理性力学的观点研究地层中的弹性波理论。试图从理论上得到作为地震勘探基础的雷克子波的理论解，解释观测到的地震横波分裂等经典弹性动力学理论没能解决好的基础理论问题。

为此，作者在1997年师从我国理性力学家陈至达先生开始研究基于拖带坐标系下的Stokes-陈S+R和分解定理的、由陈先生创立的理性力学(陈应变)研究，并建立中煤第一勘探局光华地球物理研究所从事实验性开发研究。2000年前后，作者解决了地震勘探中的相关基础理论问题。自2004年起，作者放弃在原工作单位的职务，到上海交通大学专门从事基础理论研究。在开拓陈先生创立的理性力学理论方面取得突破性进展，发现了在拖带系陈应变概念下的运动方程。为安心从事更大范围、系统性的理论开拓，于2006年到河南理工大学继续这方面理论研究。

这本书是作者近10年来理论研究工作的结晶。虽然作为弹性力学基础概念的应变张量有百年的历史，也拓展在流体力学等一系列与连续介质变形运动有关的学科中，但在我国还缺乏这样一部有理论深度和用现代数学语言描述的专著。

作者把经典的应变概念用简洁、明了的现代几何场理论给予解读，既具有严密的理论，也通俗易懂。作者对陈至达的局部转动概念进行了全面论述，以杆、板、壳为主题，系统地建立了用局部转动概念解决弯曲变形的理论，得到了局部转动角的二阶调和方程(等价经典的四阶挠度方程)。建立的理论简洁、明了，是未来研究结构失稳及完整性评价的不可多得的著作。

作者基于局部转动概念和所发现的运动方程，系统地建立了材料的疲劳断裂理论，使我国在疲劳断裂理论方面取得重大进展。该书对流变的本构方程，流动的模式转换等也在局部转动概念下进行了系统性理论论述。其中作为例子给出了单向流变的时变解，以及圆管流体单向流动的速度解、压力解。值得一提的是，作者给出的单向流压力解梯度是连续的，克服了经典压力解在管心的奇异性。作者给出的例子表明，基于现代几何场论的陈应变概念不但能简洁明了地回答经典力学中含糊不清的概念，而且能得到更精确的理论解。

自陈至达先生的导师钱伟长先生采用拖带坐标系研究板壳变形以来，至今已

有 70 年了。陈至达先生自 20 世纪 50 年代起，致力于开创理性力学理论。在 80 年代前后，系统性地建立了 Stokes-陈 S+R 和分解定理的相关几何场理论，并初步建立了相关的力学理论。但是，在 2000 年后，坚持不懈的系统性地开拓相关力学理论的人只有作者一人。15 年的孤独，在坚定的科学信仰下的奋发图强和广泛的研究视野成就了这部专著，这使得我国理性力学的研究走在了国际前列。

作为陈至达先生的学生，非常有幸可以为该书作序，相信这部专著将成为力学的经典著作。特此为序。

宋彦琦
中国矿业大学(北京)
2015 年 9 月 18 日

前　言

工程力学是工程科学的理论基础，工程力学的基础是纯粹力学，或简称为力学。对力学有多种看法，但是目前的共识性理论是 20 世纪 60 年代后形成的连续介质力学（理性力学或非线性连续介质力学）。在我国，钱伟长、陈至达、郭仲衡、匡震邦，杨桂通、戴天民、武际可、徐秉业等都是有影响的，对理论的建立有贡献，国外主要是以 Truesdell、Erickson、Noll、Finger、Biot、Lodge 等为代表。事实上，钱伟长先生在 1943 年的论文（连续三篇长文）就是用张量理论建立板壳变形力学非线性理论的开山之作。上述力学家工作形成的理论路线是采用拖带坐标，引入应变张量；用位移梯度定义变形张量，引入极分解定理把变形分解为伸张和转动的乘积；用基矢变换表达变形张量，引入直和分解定理把变形分解为伸张和转动的相加。

由于应变概念上的不同，关于运动方程、本构方程等的理论也有所不同。对于微小变形，所有理论的结果与经典力学理论是一致的。这样，对于现代力学理论就有了多个竞争性的理论。然而，这类竞争是在抽象数学表述下进行的，从而在半个世纪里几乎对工程力学没有影响，这也大大地滞后了现代力学在工程上的应用。因此，出版一部以应变概念为中心而展开的面向工程应用的专著是有必要的。

国内外的力学发展历程告诉我们，在一个统一的思想框架下讲述有关理论，反而使读者易于理解问题的本质，并能把握工程力学的核心理论问题。基于此，本书采用我国力学家陈至达先生建立的用拖带坐标系下基矢变换表达变形张量（引入直和分解定理把变形分解为伸张和转动的相加）的理性力学体系展开。

一般而言，力学可以分成为应变、物性、运动方程及求解。多数力学类著作是围绕各类求解问题而展开的，但本书不介入此类问题，而是围绕应变概念而展开理性力学的基本理论。这是完全不同于其他力学书的。目前，国内专门围绕应变而展开的著作只有我国力学家陈至达的专著《理性力学》，及其简化版的力学类专业教科书《有限变形力学基础》。国外是 Truesdell 写的几部著作及教科书。

本书将 2000 年以后的研究成果一并包括进来，基本上反映了现代力学的应变理论。

肖建华

目　　录

第0章　引　　论

理性力学的基本纲领[1-5]如下。

① 用最合适的数学概念来描述和研究自然现象。最合适的不见得是最现代化的，但它也可能就是。理性力学既不刻意回避，也不刻意寻求最抽象的数学。

② 物理概念的引入就是数学化的，数学是用来描述和构造力学理论的，是用来发现理论的。

③ 理性力学的目标是形成一个关于真实变形的力学理论，其一般性和精确性类似于经典几何学，追求的是简洁的思考，使用的是能精确的和无偏见的表达经验事实的数学概念。

无论是哪个观点下的理性力学研究工作，其前提条件是经典变形力学理论，是微小变形时的一个近似，它在近似意义上是正确的。这种对经典变形力学理论的不崇拜、不迷信，批判性的思考结果就是要推动经典理论由近似正确走向精确，从而能应用于大变形大转动的、具有物理现实性的任意变形。

一般来说，理性力学的数学工具主要是微分几何、流形变换、张量等数学理论。这里无意对理性力学进行全面的论述，而是对我国理性力学家陈至达的基于基矢变换的理性力学体系进行论述。这种论述是对比性的，也就是说，把理性力学的其他观点的结果与之对比。

陈至达所建立的理性力学体系的特点是：先建立精确的关于变形的几何场理论，然后把经典变形力学的成果用几何场理论表达出来（理性化）。下面通过最简单的变形运动，针对以下核心概念来进行论述精确性和简洁性是如何体现出来的。全书重点是曲线的张量描述；连续介质的局部转动与欧拉转动的区别；变形张量的定义；应力应变混合张量；运动方程；疲劳断裂。比较而言，这类要点能够说明理性力学的最新进展及其工程意义。

0.1　简单剪切变形的应力应变

对底面积为 A，高为 H 的方形理想弹性样品，一个面 $Z=0$ 置于粗糙平面 X 和 Y 上，在另一个面上 $Z=H$，平行于边长 X 方向施加水平力 F，就形成了一个简单剪切变形。在经典教科书中，这是最简单的变形。

按 Truesdell 极分解[2]的处理方法，只有位移函数 $u_X=\tan\theta\cdot Z$，其他分量为零，因此变形对应的局部微分坐标变换为

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}X+\tan\theta\cdot\mathrm{d}Z,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}Z \tag{0-1}$$

对应的变形梯度的非零分量为

$$F_z^X=\tan\theta,\quad F_x^X=F_y^Y=F_z^Z=1 \tag{0-2}$$

在数学上,坐标变换系数并不是一个张量,但是在力学上很多人也把它看成是张量。虽然柯西应变可定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{F}_j^i-\boldsymbol{\delta}_j^i$,但它不是一个张量。

按陈至达和分解[4,5]的处理方法,这是一维流形变形。在拖带系,原始基矢 $\boldsymbol{e}_Z$ 变形为当前基矢,即

$$\boldsymbol{g}_z=\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X+\boldsymbol{e}_Z \tag{0-3}$$

另外两个基矢无变形,即

$$\boldsymbol{g}_x=\boldsymbol{e}_X,\quad \boldsymbol{g}_y=\boldsymbol{e}_Y$$

如何由它构造力学意义上的变形张量形式就是陈至达理性力学的基础。使用 Clifford 几何代数[6]理论,有

$$\boldsymbol{g}_z\boldsymbol{e}_Z=\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X\boldsymbol{e}_Z+\boldsymbol{e}_Z\boldsymbol{e}_Z=\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X\boldsymbol{e}_Z+1 \tag{0-4}$$

因此有

$$\boldsymbol{g}_z=\boldsymbol{g}_z\boldsymbol{e}_Z\boldsymbol{e}_Z=(\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X\boldsymbol{e}_Z+1)\boldsymbol{e}_Z \tag{0-5}$$

在随体拖带坐标意义上,这是一维变形。

按陈-Stokes R+S 和分解定理[5],形式上有

$$\boldsymbol{g}_z=\left(\frac{1}{\cos\theta}R_z^Z+S_z^Z\right)\cdot\boldsymbol{e}_Z \tag{0-6}$$

也就是说,一维变形是通过一边转动原始位形上的 $\boldsymbol{e}_Z$ 到当前的位形 $\boldsymbol{g}_z$,一边拉伸它而实现的。

在数学上,拖带系意义下的基矢变换是一个张量。也就是说,与 Clifford 几何代数理论对应的张量是形式上一致的[6,7],但是对其几何意义的表达方式却是不相同的。

与下式对比,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_z&=\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X+\boldsymbol{e}_Z\\&=\frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_X+\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_Z)\\&=\frac{1}{\cos\theta}[(\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_X+\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_Z)+(1-\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_Z]\\&=\frac{1}{\cos\theta}(\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_X+\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_Z)+\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\boldsymbol{e}_Z\\&=\frac{1}{\cos\theta}R_z^Z(\theta)\boldsymbol{e}_Z+\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\boldsymbol{e}_Z\end{aligned} \tag{0-7}$$

可以得到伸张应变,即

$$S_z^Z = \frac{1}{\cos\theta} - 1 \tag{0-8}$$

这个伸张应变是经典变形力学理论无法得到的$\left(\text{对微小剪切 } \tan\theta \approx \theta, \frac{1}{\cos\theta} - 1 \approx \frac{1}{2}\theta^2\right.$ 是高阶小量,可以忽略$\left.\right)$。而剪切应变为

$$\omega_z^X = \tan\theta \cdot L_z^X = \tan\theta \cdot \boldsymbol{e}_X \boldsymbol{e}_Z \tag{0-9}$$

因此,简单剪切变形的微元体拖带系下的真实应力为

$$\sigma_z^Z = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

$$\sigma_x^X = \sigma_y^Y = \lambda\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

$$\sigma_z^X = 2\mu \cdot \tan\theta \tag{0-10}$$

它们表示作用在当前面上(下标)在原坐标(上标)方向上的应力分量。

为明确以上结果的力学价值,下面与直观的结果比较。

① 在工程力学中,只有一个剪应变分量 $\gamma_{XZ} = \frac{\partial u_X}{\partial Z} = \tan\theta$,对应的剪应力为 $\sigma_{XZ} = 2\mu \cdot \tan\theta$。在直观经验上我们知道,在高不变的情况下,斜边的拉伸应变为$\frac{1}{\cos\theta} - 1$。然而,理论上并不能给出这个量。虽然直观经验上也知道微元受到拉伸,变形体内部有拉应力,但经典理论给不出正确的数学形式。这个缺陷是明显的。

② 如果使用常用的,关于位移梯度对称和反对称的和分解下的应变概念,则有格林对称应变分量 $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\tan\theta$,以及反对称的斯托克斯应变 $\omega_{xz} = -\omega_{zx} = \frac{1}{2}\tan\theta$。这里有两个问题:一是斯托克斯应变不是张量,也不是转动的精确表达方式,从而有待改进;二是如果舍弃斯托克斯应变而单纯采用格林对称应变,则与工程力学的差距太大,也不符合直观经验。这样,一个简单剪切变形却成为格林应变理论上难于圆满解决的问题。它也没有能力给出伸张应变。陈至达的理性力学理论认为,问题的根源在于没有表达出变形力学意义上的局部转动和拉伸的物理关系,把变形混淆为数学上的坐标变换(尽管数学上是可以这样来表达变形的)。

按陈至达的理性力学理论,对不可压缩介质,由于其体积不变,从而有条件,即

$$AH = A \cdot \left(\frac{l}{\cos\theta}\right) \tag{0-11}$$

其中,l 为斜边边长(当前的拖带 z 坐标方向);θ 为原高度边与当前斜边的夹角。

因此，斜边边长方向上的应变是伸张应变为 $\varepsilon_z^Z=\frac{1}{\cos\theta}-1$，其余两个方向的边长无长度变化。这是一维的拖带变形。相应的微元体三维应力分量为

$$\sigma_z^Z=(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right) \tag{0-12}$$

$$\sigma_x^X=\sigma_y^Y=\lambda\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$$

这表明，对宏观的简单剪切变形，物质微元的内在变形是拉伸。这与经典的位移场处理结果不一样，但是与经典的板壳力学中的处理方法是一致的。

与作用力方向一致的那个方向的纯粹剪应变为 $\omega_z^X=\tan\theta$，顶面的应力为

$$\tilde{\sigma}_z^X=2\mu\tan\theta \tag{0-13}$$

顶面的边界条件为 $\tilde{\sigma}_z^X\cdot A=2\mu\tan\theta\cdot A=F$，因此有 $\theta=\arctan\frac{F}{2\mu}$。变形被外力和物性完全确定。

就实验系(X,Y,Z)而言，顶面的垂向受到一个向上的分力作用，即

$$F_{\text{up}}=A\cdot(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\cos\theta=A\cdot(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta) \tag{0-14}$$

因此，必须施加一个压力来抵消它的作用。这是很早就被实验学家所认识到的。顶面外加作用力的一般形式为

$$\boldsymbol{F}_{\text{total}}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_{\text{up}}=F\cdot\boldsymbol{e}_X-A\cdot(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_Z \tag{0-15}$$

或写为

$$\boldsymbol{F}_{\text{total}}=2\mu A\cdot\tan\theta\cdot\boldsymbol{e}_X-A\cdot(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta)\cdot\boldsymbol{e}_Z \tag{0-16}$$

这是外力与变形量的非线性方程。

对于底面的摩擦，它受到的正压力为 $F_{\text{down}}=A\cdot(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta)$。因此，变形产生的水平力为

$$F_{\text{hori}}=A\cdot(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\sin\theta=A\cdot(\lambda+2\mu)(\tan\theta-\sin\theta) \tag{0-17}$$

由库仑定律，在临界滑动时，有条件方程 $F_{\text{hori}}+F=\eta\cdot F_{\text{down}}$，即

$$A\cdot(\lambda+2\mu)(\tan\theta_c-\sin\theta_c)+2\mu A\cdot\tan\theta_c=\eta A\cdot(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta_c) \tag{0-18}$$

因此，库仑摩擦系数为

$$\eta=\frac{2\mu+(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta_c)}{(\lambda+2\mu)(1-\cos\theta_c)}\cdot\tan\theta_c \tag{0-19}$$

由此可以看出，库仑系数与临界水平力的非线性关系为

$$\eta=\left[\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{(\lambda+2\mu)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{F_c}{2\mu A}\right)^2}}\right)}\right]\cdot\frac{F_c}{A} \tag{0-20}$$

这个问题有很多文章讨论过,也有不同的近似,但是非线性的存在是共识。

0.2 变形的基本问题:弯曲的几何描述

对三维流形,取拖带坐标为(x^1,x^2,x^3),对微分曲线 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{g}_1^0\mathrm{d}x^1+\boldsymbol{g}_2^0\mathrm{d}x^2+\boldsymbol{g}_3^0\mathrm{d}x^3$,其变形后为 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1+\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2+\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3$。其变形前后长度的张量表达为 $\mathrm{d}s_0^2=g_{ij}^0\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$,这里(及以后)重复指标表示求和,$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$。对单位长度 $\mathrm{d}s_0=1$,有格林应变的抽象定义,即

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}s_0^2}{2\mathrm{d}s_0^2}=\frac{1}{2}(g_{ij}-g_{ij}^0)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{0-21}$$

这个定义的确描述了曲线长度的相对变化,但是否定了转动的 Stokes 应变。一般来说,很多论文和书籍是通过角应变概念来论证它包含剪切应变。但是,事实是格林应变否定了弯曲的力学地位,因为长度不变的弯曲只产生零应变。

高斯对曲面上的曲线[7]的研究结论是,对于局部曲线微元,除了上面的长度不变量 $I=\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,还有一个几何不变量,$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\alpha_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$,其几何意义是在 $\mathrm{d}s$ 长度内法矢量的转动角。从而,一个弯曲曲线上的微元线段需要两个本质量来表达。

在陈至达的理性力学中,平面上有限曲线微元起点的切矢 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}$和法矢 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}$,与曲线微元终点的切矢 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{end}}$和法矢 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{end}}$有如下关系,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_{\mathrm{end}}&=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ \boldsymbol{n}_{\mathrm{end}}&=-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\cos\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\end{aligned} \tag{0-22}$$

也就是说,曲线的弯曲需要用一个局部转动(转角为 α)来表达,即终点相对于起点的局部转动。

上面的单纯剪切是一维流形的转动(弯曲)问题,因为水平面上的轴是自由的(不参与随体转动)。对于一维流形曲线的弯曲,如果取初始位形的切矢为 $\boldsymbol{g}^0$ 和法矢为 $\boldsymbol{n}^0$,变形后的切矢为 $\boldsymbol{g}$ 和法矢为 $\boldsymbol{n}$,则有弯曲的一般局部转动表达形式,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}&=\cos\Theta\cdot\boldsymbol{g}^0+\sin\Theta\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{n}&=-\sin\Theta\cdot\boldsymbol{g}^0+\cos\Theta\cdot\boldsymbol{n}^0\end{aligned} \tag{0-23}$$

把 $\boldsymbol{g}^0=\boldsymbol{g}_{\mathrm{end}}$,$\boldsymbol{n}^0=\boldsymbol{n}_{\mathrm{end}}$代入上式,就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}&=\cos\Theta\cdot(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}})+\sin\Theta\cdot(-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\cos\alpha)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ &=(\cos\Theta\cdot\cos\alpha-\sin\Theta\cdot\sin\alpha)\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+(\cos\Theta\cdot\sin\alpha+\sin\Theta\cdot\cos\alpha)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ &=\cos(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\sin(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ \boldsymbol{n}&=-\sin\Theta\cdot(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}})+\cos\Theta\cdot(-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\cos\alpha)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ &=-(\sin\Theta\cdot\cos\alpha+\cos\Theta\cdot\sin\alpha)\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+(\cos\Theta\cdot\cos\alpha-\sin\Theta\cdot\sin\alpha)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\\ &=-\sin(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{ini}}+\cos(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\end{aligned} \tag{0-24}$$

总结以上结果，**局部整旋角 Θ 的几何解释就是微元长度曲线变形前后的法向转动角的变化**。初始位形上的曲线微元 $\boldsymbol{g}_{\text{end}}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\text{ini}}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\text{ini}}$，$\boldsymbol{n}_{\text{end}}=-\sin\alpha\cdot\boldsymbol{g}_{\text{ini}}+\cos\alpha\cdot\boldsymbol{n}_{\text{ini}}$ 变形为当前位形上的曲线微元，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}&=\cos(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{g}_{\text{ini}}+\sin(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{n}_{\text{ini}}\\ \boldsymbol{n}&=-\sin(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{g}_{\text{ini}}+\cos(\alpha+\Theta)\cdot\boldsymbol{n}_{\text{ini}}\end{aligned}\tag{0-25}$$

对于陈至达给出的局部转动，很多学者将其等同于刚体转动，因此没有认识到这是理性力学的重大理论进展。

与简单的剪切不同，如果要求法向也参与转动（弯曲），就是一个二维流形的弯曲转动问题。板壳的弯曲是二维流形的弯曲问题，因为厚度方向的法矢量也参与转动。对于二维流形的弯曲，取 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 为面上的两个正交拖带坐标单位基矢，取 $\boldsymbol{n}$ 为曲面单位法矢量。用上标 0 表达初始位形，采用右手系，则弯曲变形的一般形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1&=\cos\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0-\sin\Theta_1\cdot\boldsymbol{n}_1^0\\ \boldsymbol{n}_1&=\sin\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\cos\Theta_1\cdot\boldsymbol{n}_1^0\\ \boldsymbol{g}_2&=\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}_2^0\\ \boldsymbol{n}_2&=-\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}_2^0\end{aligned}\tag{0-26}$$

其中，一个转动发生在 $\boldsymbol{g}_1^0$ 和 $\boldsymbol{n}_1^0$ 面上，另一个转动发生在 $\boldsymbol{g}_2^0$ 和 $\boldsymbol{n}_2^0$ 面上。

几何上，曲线的法线和曲面的法线有关系方程，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1^0&=\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}^0-\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0\\ \boldsymbol{n}_2^0&=\cos\Theta_1\cdot\boldsymbol{n}^0+\sin\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0\\ \boldsymbol{n}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_2^0&=\cos\Theta_1\cdot\cos\Theta_2\end{aligned}\tag{0-27}$$

代入式(0-26)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1&=\cos\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0-\sin\Theta_1\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{g}_2&=\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\cos\Theta_1\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{n}_1&=\sin\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0-\cos\Theta_1\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\cos\Theta_1\cos\Theta_2\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{n}_2&=\cos\Theta_2\sin\Theta_1\cdot\boldsymbol{g}_1^0-\sin\Theta_2\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\cos\Theta_2\cos\Theta_1\cdot\boldsymbol{n}^0\end{aligned}\tag{0-28}$$

在物理可实现意义上，这两个转动并不是分别发生的，而是同时进行的，因此上面的方程是近似的。为获得唯一的转动，陈至达引入平均转动概念。当前位形上的单位法线是唯一的，即

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2}{2}=L_1^3\sin\Theta\cdot\boldsymbol{g}_1^0+L_2^3\sin\Theta\cdot\boldsymbol{g}_2^0+\cos\Theta\cdot\boldsymbol{n}^0\tag{0-29}$$

为使得 $\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{n}=0$，理性力学取二维流形的弯曲的几何关系条件方程为

$$\sin\Theta_1\cdot\frac{1+\cos\Theta_2}{2}=\sin\Theta\cdot L_1^3=-\sin\Theta\cdot L_3^1,$$

$$\sin\Theta_2 \cdot \frac{1+\cos\Theta_1}{2} = \sin\Theta \cdot L_3^2 = -\sin\Theta \cdot L_2^3 \tag{0-30}$$

$$(L_3^1)^2 + (L_3^2) = 1$$

则有近似式，即

$$\cos\Theta_1 \cos\Theta_2 \approx \cos\Theta$$

$$\sin\Theta_1 \sin\Theta_2 \approx L_3^2 L_1^3 (1-\cos\Theta) \tag{0-31}$$

$$\cos\Theta_1 \approx 1-(1-\cos\Theta)(L_1^3)^2, \quad \cos\Theta_2 \approx 1-(1-\cos\Theta)(L_3^2)^2$$

从而有二维流形曲面平均弯曲的一般形式，即

$$\boldsymbol{g}_1 = [1-(1-\cos\Theta)(L_1^3)^2]\boldsymbol{g}_1^0 + (1-\cos\Theta)L_3^1 L_2^3 \cdot \boldsymbol{g}_2^0 + \sin\Theta \cdot L_3^1 \cdot \boldsymbol{n}^0$$

$$\boldsymbol{g}_2 = (1-\cos\Theta) \cdot L_3^2 L_1^3 \cdot \boldsymbol{g}_1^0 + [1-(1-\cos\Theta)(L_3^2)^2] \cdot \boldsymbol{g}_2^0 + \sin\Theta \cdot L_3^2 \cdot \boldsymbol{n}^0 \tag{0-32}$$

$$\boldsymbol{n} = L_1^3 \sin\Theta \cdot \boldsymbol{g}_1^0 + L_2^3 \sin\Theta \cdot \boldsymbol{g}_2^0 + \cos\Theta \cdot \boldsymbol{n}^0$$

由于前提性的式(0-26)适用于原始曲面为弯曲状的任意曲面，转动角 Θ 表达了曲面弯曲的增量，从而是力学意义上的弯曲变形量。将其混同于在平面上的刚体转动是非常错误的认识论方法。这也是长期以来对陈理性力学持否定性态度的根源之一。

对于三维流形的单纯弯曲，Study 和陈至达[4,5]给出的张量形式为

$$R_j^i = \delta_j^i + \sin\Theta \cdot L_j^i + (1-\cos\Theta) L_l^i L_j^l \tag{0-33}$$

它表达的是三维弯曲微元体的变形前后弯曲程度的变化。其中，L_j^i 表示由 i 方向的基矢向 j 方向的基矢转动，称为转动方位张量，它是反对称的；Θ 为局部整体转动角。

对于刚体转动，它当然是正确的。由于形式上的一致而误认为这是刚体转动则是错误的。俄罗斯理性力学家 Zhilin 在 1990 前后给出了类似的转动概念[8]（用 $1/\Theta$ 作为单位长度），并修订欧拉刚体转动方程而建立新的理论体系。但是，其表达方式并未能张量化，这是令人遗憾的。

在力学上，被研究的微元体始终是一个三维流形，但是它的弯曲变形可能是一维的单个方向的弯曲，也可能是二维的两个正交方向的同时发生的弯曲，而最为复杂的弯曲就是三个正交方向都参与的弯曲。无论初始位形上的原始基矢如何弯曲，变形力学用上面的有关公式提纯出来的是变形后当前位形上的基矢相对于原始基矢的弯曲增量。

在这个意义上说，陈至达理性力学的转动概念是力学理论的本质性进展，是里程碑式的科学进展。

0.3 弯曲与长度变化分离的力学价值

我们从简单的板壳弯曲变形来看这个问题，即任意曲面板的单向弯曲。对于

$L_3^2=0, L_1^3=1$ 的弯曲变形，上式退化为初始弯曲板的单向弯曲变形(转动)形式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1&=\cos\Theta\cdot\boldsymbol{g}_1^0-\sin\Theta\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{g}_2&=\boldsymbol{g}_2^0\\ \boldsymbol{n}&=\sin\Theta\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\cos\Theta\cdot\boldsymbol{n}^0\end{aligned}\tag{0-34}$$

基尔霍夫板的中面假定引出以中面为参考，用中面法线 $\boldsymbol{n}$ 转动角 $\boldsymbol{\Theta}$ 表达弯曲(转动)的方法。取中面为参考，沿厚度方向 z 的弯曲变化就表达为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_1&=\cos\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{g}_1^0-\sin\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{n}^0\approx\boldsymbol{g}_1^0-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{n}&=\sin\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\cos\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{n}^0\approx\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{g}_1^0+\boldsymbol{n}^0\end{aligned}\tag{0-35}$$

弯曲的主要原因是斯托克斯转动应变 $\omega_{1n}=-\omega_{n1}=-\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z$。由它构造的关于中面的转动力矩为 $M_{1n}=\displaystyle\int_{-D/2}^{D/2}\left(-2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot z\mathrm{d}z=-\frac{\mu D^3}{6}\frac{\partial\Theta}{\partial z}$(尽管很多人反对或不接受这个公式，但理论上这是最为合理的)。

如果使用工程应变概念，则存在应变 $\varepsilon_{11}=\dfrac{\sqrt{g_{11}}-\sqrt{g_{11}^0}}{\sqrt{g_{11}^0}}=\pm\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)^2$，如果使用格林应变概念，则有应变 $\varepsilon_{11}=\dfrac{1}{2}(g_{11}-g_{11}^0)=\pm\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)^2$。符号的选择是根据拉伸，还是压缩确定的。由此应变产生的应力为 $\sigma_{11}=\pm\dfrac{1}{2}(\lambda+2\mu)\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)^2$，$\sigma_{22}=\sigma_{zz}=\pm\dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)^2$。相对于中面而言，一侧的拉伸等同于另一侧的压缩，因此它给出的中面平均应力为零。但是，无法用它们构造出正确的弯矩公式。对经典理论而言，如何克服这个困难就成为一个重要的理论问题，并且至今还是一个不断被讨论的问题。事实上，在经典板壳理论中，为了在不使用斯托克斯转动应变的情况下得到关于中面的转动力矩，对方程(0-35)作如下近似(假设)，即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_1^0)&\approx-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{n}^0\\ \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}^0&\approx\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)\cdot\boldsymbol{g}_1^0\end{aligned}\tag{0-36}$$

因此，按上式的几何意义引入随体应变 $\tilde{\varepsilon}_{11}\approx-\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\right)$。这样就得到关于中面的转动力矩为，即

$$M_{1n}=\int_{-D/2}^{D/2}-(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}\cdot z\cdot z\mathrm{d}z=-\frac{(\lambda+2\mu)D^3}{12}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\tag{0-37}$$

这就是目前经典的平板弯矩公式(各类理论的弹性系数有所不同,本书没有使用平面应力或应变假定)。在经典板壳理论中,$\Theta|_{z=0}=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$,$|\boldsymbol{g}_1|_{z=z}|-|\boldsymbol{g}_1|_{z=0}|\approx -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot z$,把$-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$解释为中心面弯曲变形后的曲率。伸张量$-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot z$完全是由于在厚度方向上有曲率变化而引出的,中面上并无伸张应变,而且截面上关于厚度积分也给出零伸张。这种绕道而行的论述方法显然是要使用工程应变概念(长度的变化)来构造一个直接使用格林应变定义无法正确解决的问题(局部转动)。

以上的讨论在于想说明一个论点,不考虑弯曲转动力学效应的格林应变不能直接应用于含有弯曲的变形。因此,把弯曲变化量与长度变化量分离开来是必要的。这也是板壳理论进展的路线和实践证明的。

0.4 Stokes-陈 R+S 和分解公式

板壳理论的研究工作被看成是 20 世纪初的重大成果。它表现在克服了弯曲变形的格林应变概念上的困难,同时表明使用随体系(中面随体曲面系)的必要性。这个随体系的引入是辛格和钱伟长的贡献,称为拖带坐标系[9]。用随体系上的张量 g_{ij} 关于厚度的变分来描述板壳弯曲变形就形成一般性理论。一般地说,可以把变形分解为与单纯弯曲有关的应变;与纯粹的拖带长度变化产生的伸张应变;实际变形为两者的直和。这就是目前最为流行的理论方法,但是用张量理论来表达它们却是我国力学家陈至达所建立的理性力学理论。

对于三维流形的变形,陈至达理性力学给出的结论是对任意有物理可实现性的变形梯度张量 F^i_j,总可以把它分解为一个对称的纯粹伸张张量 S^i_j 和一个单位正交转动张量 R^i_j 的直和,即

$$
\begin{gathered}
F^i_j=S^i_j+R^i_j\\
S^i_j=\frac{1}{2}(u^i|_j+u^i|_j^{\mathrm{T}})-(1-\cos\Theta)L^i_lL^l_j\\
R^i_j=\delta^i_j+\sin\Theta\cdot L^i_j+(1-\cos\Theta)L^i_lL^l_j
\end{gathered}
\tag{0-38}
$$

其中,u^i 为初始位形上的位移场;$u^i|_j$ 为协变导数,这是因为初始位形是任意的;上标 T 为转置运算。

$$
\begin{gathered}
F^i_j=\delta^i_j+u^i|_j\\
\Theta=\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{(u^1|_2-u^2|_1)^2+(u^2|_3-u^3|_2)^2+(u^3|_1-u^1|_3)^2}\\
L^i_j=\frac{1}{2\sin\Theta}(u^i|_j-u^i|_j^{\mathrm{T}})
\end{gathered}
\tag{0-39}
$$