JISAUNJI SUANFA WENJI

计算机算法文集

程锦松 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

JISAUNJI SUANFA WENJI

计算机算法文集

程锦松 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机算法文集 / 程锦松著．—合肥：安徽大学出版社，2016.1
ISBN 978-7-5664-1026-9

Ⅰ.①计… Ⅱ.①程… Ⅲ.①电子计算机—算法理论—文集 Ⅳ.①TP301.6—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 258567 号

出版发行：北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印　　刷：安徽省人民印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×240mm
印　　张：17
字　　数：296 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版
印　　次：2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：40.00 元
ISBN 978-7-5664-1026-9

策划编辑：钟　蕾
责任编辑：钟　蕾　蒋　芳
责任校对：程中业
装帧设计：李　军
美术编辑：李　军
责任印制：赵明炎

序

本文集汇集作者在计算机算法研究领域的34篇成果。二十世纪六七十年代，由于众所周知的原因，我国学术界的大部分领域，几乎停止研究工作十多年，计算机算法也不例外，所以本文集中除1966年的一篇以外，都是1980—2004年的工作成果。而事实上，早在1958年本书作者就参加中国科学院计算技术研究所训练班，随后数十年如一日，从事计算机科学与技术的科研和教学工作。此文集汇集了作者在计算机算法方面的部分研究成果，涉及数值计算算法与非数值计算算法，串行算法与并行算法，网络与分布式系统中的算法和稳定性判定方法，等等。

作者在研究这些算法时，不仅恪守理论上的完整性，还兼顾应用背景的种种需求。因此，这个文集中的许多论文引起国内外学者关注，先后被收录入数学评论(Mathematical Reviews)，计算机文摘(Computer Abstracts)，计算机与自动控制文摘(Computer & Control Abstracts)。本文集中的许多论文被同行引用，获得好评，有的论文获得优秀论文奖和科技进步奖。例如关于多项式和矩阵的并行算法，接触到的同行经分析比较，都认为此算法优于国外同类算法。

我还要说，论文集的内容呈献给读者的不仅是一系列算法和定理结论，还有诸文中引入新方法的手段与细心的推演过程，它们对读者更有启发。因此，我热忱地把本书推荐给计算机算法专业的硕士、博士研究生们，以及像我一样研究方向与计算机算法有交集的其他学科的研究者们！请同时关注书中的结果与处理问题的技巧。

看完书稿，我觉得可以早些刊行此书，但如今出版也还不晚，愿此书为我国的数学与计算机科学的发展添光增色。

,July,17,2015.

前 言

作者自1958年参加中国科学院计算技术研究所训练班开始，50多年来一直从事计算机科学与技术的科研和教学工作，涉及计算机算法、计算机软件、计算机系统设计和计算机应用等方面。

现从作者公开发表的有关计算机算法的文章中选取34篇结集出版。文集中包含数值计算算法和非数值计算算法，串行算法和并行算法，网络与分布式系统中的算法和稳定性判定法等方面的文章。该文集可供计算机科学与技术以及计算数学和自动控制等专业的科技人员和高校师生参阅。

文集中有的文章属于国家自然科学基金或安徽省科研基金项目的子课题，有的被SCI收录，有的获得优秀论文奖；但有的文章水平一般。故作者将结集出版的书命名为《计算机算法文集》，而不用"论文集"命名。

文集中有29篇文章是作者独自撰写的，其余5篇是作者的学生与作者合写的。文集中的文章按发表的时间顺序编排，原文的出处在文集每篇文章的附注中给出。

作者欢迎读者对文集提出批评指正。

安徽大学原教务长郑祖庥教授特为本文作序，在此深表感谢。

程锦松

2015年夏于安徽大学

目　录

1. 多项式根的分布理论与代数方程解法

§1 引　言

假使给定了 n 次复系数多项式

$$f(Z) = f_0(Z) = a_{0,0}Z^n + a_{1,0}Z^{n-1} + \cdots + a_{n,0}, a_{0,0} \neq 0. \tag{1}$$

讨论在复平面上(1)的根的分布问题对于理论研究和实际应用都有很重要的意义.本文就是讨论(1)的根对于虚轴、实轴和单位圆的分布问题,并根据所得到的结论设计出了代数方程数值求解方法,这种方法已在数字电子计算机上实现,并已用于实际解题.

本文在写作过程中曾得到赵访熊教授的指教,在此深表感谢.

§2 多项式根对于虚轴和实轴的分布理论

令

$$f^*(Z) = f_0^*(Z) = \overline{a_{0,0}}Z^n - \overline{a_{1,0}}Z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \overline{a_{n,0}}, \tag{2}$$

易知(1)的根和(2)的根关于虚轴对称.

首先引入下面引理:

引理 1　若 $\operatorname{Re} Z=0$,则 $|f(Z)|=|f^*(Z)|$.

引理 2　设 α,β 为任意两数,且 $|\alpha|\neq|\beta|$,若 $g(Z)=\alpha f(Z)-\beta f^*(Z)$,则

$$g^*(Z)=\bar{\alpha}f^*(Z)-\bar{\beta}f(Z),$$
$$f(Z)=\alpha_1 g(Z)-\beta_1 g^*(Z),$$
$$f^*(Z)=\bar{\alpha}_1 g^*(Z)-\bar{\beta}_1 g(Z),$$

这里

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}}, \beta_1 = \frac{-\beta}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}}.$$

引理 3 若(1)的全部根位于复平面的左半平面，则对于复平面的左半平面上任意一点 $Z(\mathrm{Re}\,Z<0)$都有

$$|f(Z)| < |f^*(Z)|.$$

引理 1—引理 3 的证明可见参考文献[1].

假使能选取 $\xi_k(k=0,1,\cdots,m-1;m-1\leqslant n-1)$满足

$$|f_k(\xi_k)| \neq |f_k^*(\xi_k)|, \tag{3}$$

则按

$$f_{k+1}(Z) = \frac{f_k^*(\xi_k)f_k(Z) - f_k(\xi_k)f_k^*(Z)}{Z-\xi_k}, \tag{4}$$

就可作出多项式序列

$$f_0(Z), f_1(Z), \cdots, f_m(Z) \neq 0, m \leqslant n. \tag{5}$$

对于 $f_m(Z)$，不再存在 ξ_m，使得$|f_m(\xi_m)| \neq |f_m^*(\xi_m)|$.

多项式序列(5)有下列性质：

定理 1 $f_k(Z)$是 $n-k$ 次多项式$(k=0,1,\cdots,m)$.

证明：因为$[f_0^*(\xi_0)f_0(Z) - f_0(\xi_0)f_0^*(Z)]$的最高次项 Z^n 的系数$[a_{0,0}f_0^*(\xi_0) - \overline{a_{0,0}}f_0(\xi_0)] \neq 0$，所以 $f_1(Z)$的次数为 $n-1$. 事实上，若 $a_{0,0}f_0^*(\xi_0) - \overline{a_{0,0}}f_0(\xi_0) = 0$，则可推出$|f_0^*(\xi_0)| = |f_0(\xi_0)|$，这与(3)矛盾.

同理可证 $f_2(Z)$的次数为 $n-2$，…，$f_m(Z)$的次数为 $n-m$.

因此可设

$$f_k(Z) = a_{0,k}Z^{n-k} + a_{1,k}Z^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k,k}, a_{0,k} \neq 0$$
$$(k=0,1,\cdots,m). \tag{6}$$

定理 2 无法选取 ξ_m 使$|f_m(\xi_m)| \neq |f_m^*(\xi_m)|$的充分必要条件是 $f_m(Z)$和 $f_m^*(Z)$的根完全一样.

证明：充分性

设 $Z_k, Z_k'(k=1,2,\cdots,n-m)$分别为 $f_m(Z)$和 $f_m^*(Z)$的根，则

$$f_m(Z) = a_{0,m}\prod_{k=1}^{n-m}(Z-Z_k),$$

$$f_m^*(Z) = \overline{a_{0,m}}\prod_{k=1}^{n-m}(Z-Z'_k).$$

若 $Z_k = Z_k'(k=1,2,\cdots,n-m)$，则

$$f_m^*(Z) = \frac{\overline{a_{0,m}}}{a_{0,m}}f_m(Z).$$

所以对于任意的 Z 有

$$|f_m^*(Z)|=|f_m(Z)|.$$

必要性

若无法选取 ξ_m 使 $|f_m(\xi_m)|=|f_m^*(\xi_m)|$，则 $f_m(Z)$ 的根和 $f_m^*(Z)$ 的根一定全同，若不然，设 η 是 $f_m(Z)$ 的根，但不是 $f_m^*(Z)$ 的根，则显然 $|f_m^*(\eta)|\neq|f_m(\eta)|=0$.

定理 3 $f_k(Z)$ 和 $f_m^*(Z)$ 的最高公因式 $d_k(Z)$ 均相同($k=0,1,\cdots,m$).

$f(Z)$ 和 $f^*(Z)$ 的最高公因式 $d(Z)$ 包含 $f(Z)$ 所有对称于虚轴的根，也只包含这些对称于虚轴的根(在虚轴上的根也计算在内).

证明：令 $g_0(Z)=f_0^*(\xi_0)f_0(Z)-f_0(\xi_0)f_0^*(Z)$，则由引理 2 知 $d_0(Z)$ 与 $g_0(Z)$ 和 $g_0^*(Z)$ 的最高公因式 $e(Z)$ 相同：$e(Z)=d_0(Z)$. 但 $f_1(Z)=\dfrac{g_0(Z)}{Z-\xi_0}$，由 ξ_0 的选取知 ξ_0 不可能是 $d_0(Z)=e(Z)$ 的根. 设 $g_0(Z)=e(Z)h(Z)$，则 $f_1(Z)=d_0(Z)g_1(Z)$，这里 $g_1(Z)=\dfrac{h(Z)}{Z-\xi_0}$ 没有关于虚轴对称的根，而 $f_1(Z)$ 中对称于虚轴的根都包含在 $d_0(Z)$ 内，所以 $d_1(Z)=d_0(Z)$. 同理可证 $d_1(Z)=d_2(Z)=\cdots=d_m(Z)$.

根据定理 2，可以认为 $d_m(Z)=f_m(Z)$.

设 $f_k(Z)$ 在复平面的左半平面上根的个数为 p_k，在复平面的右半平面上根的个数为 q_k，下面讨论如何确定 p_0,q_0 的问题.

假定 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根. 在复平面上选取一闭曲线 Γ，它是由虚轴上一段线段和左半平面上一个半圆 C 组成的，C 的圆心为原点，半径为充分大的 R，使得 $f_0(Z)$ 在左半平面上的根全部在由 Γ 所围成的区域内. 当 $R\to\infty$，对 C 上任意的点 $Z=Re^{i\theta}$ 有 $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{|f_0(Re^{i\theta})|}{|f_0^*(Re^{i\theta})|}=1$. 再据引理 1 知，当 $R\to\infty$ 时，对 Γ 上任意的点 Z 有

$$|f_0(Z)|=|f_0^*(Z)| \tag{7}$$

在 Γ 所围成的区域内选取满足式(3)的 ξ_0，按式(4)作出 $f_1(Z)$.

若 $|f_0(\xi_0)|<|f_0^*(\xi_0)|$，则 $|f_0^*(\xi_0)|\neq0$，此时 $f_1(Z)$ 可写成

$$f_1(Z)=f_0^*(\xi_0)f_0(Z)\left[1-\frac{f_0(\xi_0)f_0^*(Z)}{f_0^*(\xi_0)f_0(Z)}\right]\frac{1}{Z-\xi_0}.$$

由此可得

$$\Delta_\Gamma\arg f_1(Z)=\Delta_\Gamma\arg f_0(Z)+\Delta_\Gamma\arg\left[1-\frac{f_0(\xi_0)f_0^*(Z)}{f_0^*(\xi_0)f_0(Z)}\right]-2\pi, \tag{8}$$

这里 $\Delta_\Gamma \arg f(Z)$ 表示当 Z 沿 Γ 正方向绕一周时，$f(Z)$ 之幅角增量.

在 $|f_0(\xi_0)|<|f_0^*(\xi_0)|$ 的情况下，由式(7)知，当 $R\to\infty$，点 Z 沿 Γ 变化时，点 $w=1-\dfrac{f_0(\xi_0)f_0^*(Z)}{f_0^*(\xi_0)f_0(Z)}$ 总是留在 $|w-1|<1$ 内，所以

$$\Delta_\Gamma \arg\left[1-\frac{f_0(\xi_0)f_0^*(Z)}{f_0^*(\xi_0)f_0(Z)}\right]=0. \tag{9}$$

已假定 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根，由定理 1 和定理 3 知 $n-1$ 次的多项式 $f_1(Z)$ 在虚轴上也没有根，则由式(8)，式(9)可得

$$p_1=p_0-1,q_1=q_0.$$

若 $|f_0(\xi_0)|>|f_0^*(\xi_0)|$，且注意到 $f_0(Z)$ 的根和 $f_0^*(Z)$ 的根关于虚轴对称的事实，则类似地可证得

$$p_1=q_0-1,q_1=p_0.$$

由上面叙述可知，ξ_0 事实上可在整个左半平面上来选取.

假使在复平面的左半平面上依次选取了满足式(3)的 ξ_k，且按式(4)作出了多项式序列(5)，则用类似的方法，一般可证得如下结论：

$$\left.\begin{aligned}&\text{若 } |f_k(\xi_k)|<|f_k^*(\xi_k)|\text{，则 } p_{k+1}=p_k-1,q_{k+1}=q_k,\\&\text{若 } |f_k(\xi_k)|>|f_k^*(\xi_k)|\text{，则 } p_{k+1}=q_k-1,q_{k+1}=p_k.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$(k=0,1,\cdots,m-1)$$

因为已假定 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根，所以由定理 1 和定理 3 可知 $p_k+q_k=n-k$.

若令

$n_k=n-k,S_k=\mathrm{Sgn}[|f_k^*(\xi_k)|-|f_k(\xi_k)|](k=0,1,\cdots,m-1)$，

则式(10)可写成一个公式

$$q_k=S_kq_{k+1}+\frac{1-S_k}{2}n_k(k=0,1,\cdots,m-1) \tag{11}$$

或

$$p_k=S_k(p_{k+1}+1)+\frac{1-S_k}{2}n_k(k=0,1,\cdots,m-1). \tag{12}$$

在式(11)中依次令 $k=0,1,\cdots,m-1$，则有

$$q_0=S_0q_1+\frac{1-S_0}{2}n_0.$$

$$q_1=S_1q_2+\frac{1-S_1}{2}n_1.$$

……

$$q_{m-1}=S_{m-1}q_m+\frac{1-S_{m-1}}{2}n_{m-1}.$$

逐次代入即得

$$q_0 = n_0 \frac{1-S_0}{2} + S_0 n_1 \frac{1-S_1}{2} + S_0 S_1 n_2 \frac{1-S_2}{2} + \cdots +$$

$$S_0 S_1 \cdots S_{m-2} n_{m-1} \frac{1-S_{m-1}}{2} + S_0 S_1 \cdots S_{m-1} q_m. \tag{13}$$

设 $S_0, S_1, \cdots, S_{m-1}$ 中有 j 个数 $S_{k_1}, S_{k_2}, \cdots, S_{k_j}$ 为 -1($0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqslant m-1$). 将 $S_k (k=0,1,\cdots,m-1)$ 代入式(13),除去与 $S_k=1$ 对应的零项后,式(13)变成

$$q_0 = n_{k_1} - n_{k_2} + n_{k_3} - n_{k_4} + \cdots + (-1)^{j-1} n_{k_j} + (-1)^j q_m. \tag{14}$$

以 $n_k = n-k$ 代入式(14)即得

$$q_0 = (n-k_1) - (n-k_2) + (n-k_3) - (n-k_4) + \cdots +$$

$$(-1)^{j-1}(n-k_j) + (-1)^j q_m. \tag{15}$$

式(10)—式(15)是在假定 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根的情况下推得的,但下面可以看到,不管 $f_0(Z)$ 在虚轴上是否有根,同样可得到一个类似式(15)的公式.

事实上,设 $f_0(Z)$ 和 $f_0^*(Z)$ 有最高公因式 $d_0(Z)$,则

$$f_0(Z) = d_0(Z) g_0(Z), f_0^*(Z) = d_0(Z) g_0^*(Z).$$

设 $f(Z) = p(Z) q(Z)$,由直接计算可知 $f^*(Z) = p^*(Z) q^*(Z)$. 因而由 $f_0(Z) = d_0(Z) g_0(Z)$,得 $f_0^*(Z) = d_0^*(Z) g_0^*(Z)$. 若令 $d_0(Z)$ 的首项系数为实数,因为 $d_0(Z)$ 是 $f_0(Z)$ 和 $f_0^*(Z)$ 的最高公因式,所以 $d_0(Z) = d_0^*(Z)$,$f_0^*(Z) = d_0(Z) g_0^*(Z)$.

当选取了满足式(3)的 ξ_0(Re $\xi_0 < 0$),则按式(4)作出的 $f_1(Z)$ 为

$$f_1(Z) = d_0(\xi_0) d_0(Z) g_1(Z),$$

这里

$$g_1(Z) = \frac{g_0^*(\xi_0) g_0(Z) - g_0(\xi_0) g_0^*(Z)}{Z - \xi_0}.$$

因为约去常数因子 $d_0(\xi_0)$,根的位置和个数不受影响,故可认为 $f_1(Z) = d_0(Z) g_1(Z)$. 一般若选取满足式(3)的 ξ_k(Re $\xi_k < 0$),按式(4)作出 $f_{k+1}(Z)$,且约去常数因子不计,则有

$$f_k(Z) = d_0(Z) g_k(Z) \quad (k=0,1,\cdots,m).$$

所以

$$|f_k(\xi_k)| = |d_0(\xi_k)| |g_k(\xi_k)|, \; |f_k^*(\xi_k)| = |d_0(\xi_k)| |g_k^*(\xi_k)|$$

$$(k = 0,1,\cdots,m). \tag{16}$$

由式(16)知,在求出 $f_m(Z)=d_0(Z)$后,无须再对 $g_0(Z)=\dfrac{f_0(Z)}{d_0(Z)}$作多项式序列,就可以从$|f_k(\xi_k)|$和$|f_k^*(\xi_k)|$之间的大小关系来定出 $g_0(Z)$在左半平面和右半平面上根的个数.

在实际计算时,为简便计,$g_k(Z)$的各个系数也可同时约去同一常数.

综合上述,有下列定理:

定理 4 假使给定了形如(1)的多项式且在左半平面上选取满足式(3)的 $\xi_k(k=0,1,\cdots,m-1)$,按(4)作出多项式序列(5),则

$$q_0=(m-k_1)-(m-k_2)+(m-k_3)-(m-k_4)+\cdots+(-1)^{j-1}(m-k_j)+(-1)^j q_m \tag{17}$$

这里之所以要将式(15)中的 n 换为式(17)中的 m,是因为 $d_0(Z)=f_m(Z)$是$n-m$ 次多项式,而在虚轴上没有根的 $g_0(Z)$是 $n-(n-m)=m$ 次多项式.

若令 $Z=\mathrm{i}y$,代入 $d_0(Z)=f_m(Z)$,且用某种方便的方法定出了 $d_0(\mathrm{i}y)$的实根个数 l,则 $q_m=p_m=\dfrac{1}{2}(n-m-l)$.

例 1 试问 $f(Z)=Z^5+4Z^4+2Z^3-2Z^2+Z-6$ 在左半平面、右半平面和虚轴上各有几个根?

解 $f_0(Z)=Z^5+4Z^4+2Z^3-2Z^2+Z-6$,

$f_0^*(Z)=Z^5-4Z^4+2Z^3+2Z^2+Z+6$,

$f_0(-1)=-8, f_0^*(-1)=0, S_0=-1$;

$f_1(Z)=Z^4-5Z^3+7Z^2-5Z+6$,(已约去常数因子 8)

$f_1^*(Z)=Z^4+5Z^3+7Z^2+5Z+6$,

$f_1(-1)=24, f_1^*(-1)=4, S_1=-1$;

$f_2(Z)=Z^3+6Z^2+Z+6$,(已约去常数因子-20)

$f_2^*(Z)=Z^3-6Z^2+Z-6$,

$f_2(-1)=10, f_2^*(-1)=-14, S_2=1$;

$f_3(Z)=Z^2+1$,(已约去常数因子-24)

$f_3^*(Z)=f_3(Z)$.

所以 $d_0(Z)=f_3(Z)=Z^2+1$,在例子中,无须再计算,显然有 $q_3=p_3=0$, $l=2$,按式(17)计算,此时 $m=3, j=2, k_1=0, k_2=1, q_0=(3-0)-(3-1)+0=1$,而 $p_0=5-1-2=2$.

下面讨论(1)的根是否全部位于左半平面的判定问题.

定理 5 在定理 4 的假设下，$p_0=n$ 的充分必要条件是

$$S_k = 1(k = 0,1,\cdots,n-1). \tag{18}$$

证明：充分性

按定理条件，此时 $f_n(Z)=c\neq 0$（c 为常数），则由定理 2、定理 3 知 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根，这时式(13)成立，且 $q_n=0$. 将 $m=n,q_n=0$ 与 $S_k=1$ 代入式(13)则得 $q_0=0$.

$f_0(Z)$ 在虚轴上没有根，且 $q_0=0$，则 $p_0=n$.

必要性

若 $p_0=n$，则 $f_0(Z)$ 在虚轴上没有根，式(12)成立. 同时由引理 3，知道此时在左半平面上任取一点作为 ξ_0 都有 $S_0=1$，故可作出 $f_1(Z)$. 将 $S_0=1$ 代入 $k=0$ 的式(12)，得 $p_1=n-1$. 同理，在左半平面上任取一点作为 ξ_1，都有 $S_1=1$，从而又可作出 $f_2(Z)$，…，以此类推，就可作出含 $n+1$ 个多项式的多项式序列(5)，且所选取的 ξ_k($\mathrm{Re}\,\xi_k<0$)满足式(18)($k=0,1,\cdots,n-1$).

在实际应用定理 5 进行判定时，为计算方便可取 $\xi_k=-1$.

应提醒注意的是，当 $S_k=-1(k=0,1,\cdots,n-1)$ 时，不能误认为 $f(Z)$ 的根全部在复平面的右半平面.

以上讨论了(1)的根对于虚轴分布的问题，至于(1)的根对于实轴分布的问题也可完全类似地进行讨论. 若令

$$f^*(Z)=f_0^*(Z)=\overline{a_{0,0}}Z^n+\overline{a_{1,0}}Z^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n,0}},$$

而在上半平面选取满足式(3)的 ξ_k，按式(4)作出多项式序列(5)，而以 p_k 表示 $f_k(Z)$ 在复平面的上半平面根的个数，以 q_k 表示 $f_k(Z)$ 在复平面的下半平面根的个数，则将定理 4 中的“左”字改为“上”字，定理 4 仍然成立，定理 5 亦成立.

§3 多项式根对于单位圆的分布理论

在§2 中所得到的多项式根对于虚轴分布的有关定理还可以几乎平行地移到多项式根对于单位圆的分布问题上来，只需在某些地方略加修改即可. 下面对应于§2 中的引理，定理，公式用加“′”表示，本节内一般与§2 中相平行的引理、定理不再写出证明.

在本节里取定 Γ 为单位圆. 为了书写清楚起见，令

$$F(Z) = F_0(Z) = b_{0,0}Z^n + b_{1,0}Z^{n-1} + \cdots + b_{n,0} \tag{1′}$$

这里 $b_{k,0}=a_{k,0}(k=0,1,\cdots,n)$，即 $F(Z)=f(Z)$. 令

$$F^*(Z)=F_0^*(Z)=\overline{b_{n,0}}Z^n+\overline{b_{n-1,0}}Z^{n-1}+\cdots+\overline{b_{0,0}} \tag{2'}$$

易知(1′)的根和(2′)的根关于单位圆互为反演点.

引理 1′ 对 Γ 上任意的点 $Z(|Z|=1)$ 有

$$|F(Z)|=|F^*(Z)| \tag{7'}$$

证明：事实上，

$$|F^*(Z)|=|\overline{F^*(Z)}|=\left|\overline{\sum_{k=0}^{n}\overline{b_{n-k,0}}Z^{n-k}}\right|=$$

$$|\sum_{k=0}^{n}b_{n-k,0}\overline{Z}^{n-k}|=|\overline{Z}|^n\left|\sum_{k=0}^{n}b_{n-k,0}\left(\frac{1}{\overline{Z}}\right)^k\right|,$$

因为对于 Γ 上的 Z 有 $Z=\dfrac{1}{\overline{Z}}$，$|\overline{Z}|=|Z|=1$，所以由上述等式立刻得到式(7′).

引理 2′ 将引理 2 中的 $f(Z)$ 换为 $F(Z)$，$f^*(Z)$ 换为 $F^*(Z)$，结论仍成立.

引理 3′ 若(1′)的全部根位于单位圆内，则对于单位圆内任意一点 Z 都有 $|F(Z)|<|F^*(Z)|(|Z|<1)$.

证明：设 $Z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为(1′)的根，则

$$|F(Z)|=|b_{0,0}|\prod_{k=1}^{n}|Z-Z_k|, \tag{19}$$

$$|F^*(Z)|=|\overline{b_{n,0}}|\prod_{k=1}^{n}\left|Z-\frac{1}{\overline{Z}_k}\right|. \tag{20}$$

由根与系数的关系知

$$\prod_{k=1}^{n}|Z_k|=\left|\frac{b_{n,0}}{b_{0,0}}\right|=\left|\frac{\overline{b_{n,0}}}{b_{0,0}}\right|.$$

以 $|\overline{b_{n,0}}|=|b_{0,0}|\prod\limits_{k=1}^{n}|Z_k|$ 代入式(20)得

$$|F^*(Z)|=|b_{0,0}|\prod_{k=1}^{n}|Z_k|\left|Z-\frac{1}{\overline{Z}_k}\right|. \tag{21}$$

比较式(19)和式(21)可以看出，若能证明，当 $|Z|<1$，$|Z_k|<1$ 有

$$|Z-Z_k|<|Z_k|\left|Z-\frac{1}{\overline{Z}_k}\right|(k=1,2,\cdots,n). \tag{22}$$

则引理得证.

事实上，设 $Z=x+\mathrm{i}y$，$Z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，经简单计算可得

$$|Z_k|^2\left|Z-\frac{1}{\overline{Z}_k}\right|^2-|Z-Z_k|^2=[1+(x_k^2+y_k^2)(x^2+y^2)]-$$

$$[(x_k^2+y_k^2)+(x^2+y^2)]=[1-(x_k^2+y_k^2)][1-(x^2+y^2)].$$

按假定，$x^2+y^2<1, x_k^2+y_k^2<1$，则由上面式子可知式(22)成立.

假使在单位圆内能选取 $\xi'_k(k=0,1,\cdots,M-1;M-1\leqslant n-1)$满足

$$\begin{cases}|F_k(\xi'_k)b_{n-k,k}|\neq|F_k^*(\xi'_k)b_{0,k}|,\\|F_k(\xi'_k)|\neq|F_k^*(\xi'_k)|.\end{cases}\tag{3'}$$

则按

$$F_{k+1}(Z)=\frac{F_k^*(\xi'_k)F_k(Z)-F_k(\xi'_k)F_k^*(Z)}{Z-\xi'_k}\tag{4'}$$

就可作出多项式序列

$$F_0(Z),F_1(Z),\cdots,F_M(Z);F_M(Z)\neq 0,M\leqslant n.\tag{5'}$$

其中 $F_k(Z)$为

$$F_k(Z)=b_{0,k}Z^{n-k}+b_{1,k}Z^{n-k-1}+\cdots+b_{n-k,k}.\tag{6'}$$

设 $F_k(Z)$在单位圆内根的个数为 P_k，在单位圆外根的个数为 Q_k，

利用式(3′)的第一个不等式就可证得：

定理 1′ $F_k(Z)$是 $n-k$ 次多项式($k=0,1,\cdots,M$).

注意到式(3′)比式(3)多一个不等式是必要的，否则按式(4′)作出的多项式序列(5′)中的多项式就不一定是次数依次减 1 的.

定理 2′ 无法选取 ξ'_M使$|F_M(\xi'_M)b_{n-M,M}|\neq|F_M^*(\xi'_M)b_{0,M}|$和$|F_M(\xi'_M)|\neq|F_M^*(\xi'_M)|$的充分必要条件是 $F_M(Z)$和 $F_M^*(Z)$的根完全一样.

要证明定理 2′，只要注意到下面一点即可，其他证明可仿定理 2 的证明.

设 $Z_k, Z'_k(k=1,2,\cdots,n-M)$分别为 $F_M(Z)$和 $F_M^*(Z)$的根，则

$$\prod_{k=1}^{n-M}|Z_k|=\left|\frac{b_{n-M,M}}{b_{0,M}}\right|,\prod_{k=1}^{n-M}|Z'_k|=\left|\frac{\overline{b_{0,M}}}{\overline{b_{n-M,M}}}\right|.$$

若 $Z_k=Z'_k(k=1,2,\cdots,n-M)$，则由上面等式可得

$$|b_{0,M}|=|b_{n-M,M}|.$$

因此在证明充分性时仅需证明无法选取 ξ'_M，使$|F_M(\xi'_M)|\neq|F_M^*(\xi'_M)|$即可.

以上假定 $b_{n-M,M}\neq 0$，但当 $b_{n-M,M}=0$ 时，$F_M(0)=0$，有$|F_M(0)|<|F_M^*(0)|$，则可取 $\xi'_M=0$.

定理 3′ $F_k(Z)$和 $F_k^*(Z)$的最高公因式 $D_k(Z)$均相同($k=0,1,\cdots,M$).

令

$$S'_k=\mathrm{Sgn}[|F_k^*(\xi'_k)|-|F_k(\xi'_k)|](k=0,1,\cdots,M-1).$$

若 $S'_0,S'_1,\cdots,S'_{M-1}$中有 j'个数 $S'_{k_1},S'_{k_2},\cdots,S'_{k_{j'}}$为$-1(0\leqslant k_1<k_2<\cdots<$

$k_{j'} \leqslant M-1$)，则相应地有

定理 4′ 假使给定了形如(1′)(即(1))的多项式，且在单位圆内选取满足式(3′)的 $\xi'_k(k=0,1,\cdots,M-1)$，按(4′)作出了多项式序列(5′)，则

$$Q_0=(M-k_1)-(M-k_2)+(M-k_3)-(M-k_4)+\cdots+(-1)^{j'-1}(M-k_{j'})+(-1)^{j'}Q_M. \tag{17′}$$

定理 5′ 在定理 4′的假设下，$P_0=n$ 的充分必要条件是

$$S'_k=1(k=0,1,\cdots,n-1). \tag{18′}$$

若取 $\xi'_k=0$，则定理 5′变成

定理 5″ 形如(1′)的多项式全部根位于单位圆内的充分必要条件是

$$|b_{n-k,k}|<|b_{0,k}|(k=0,1,\cdots,n-1).$$

当 $\xi'_k=0$ 时，$F_k(0)=b_{n-k,k}$，$F_k^*(0)=\overline{b_{0,k}}$，这时式(3′)中第二个不等式已蕴含第一个不等式.

定理 5″的充分性可由定理 5′直接得出. 定理 5″的必要性证明如下. 如果式(1′)的根全部在单位圆内，那么据引理 3′有 $|F_0(0)|<|F_0^*(0)|$，即 $|b_{n,0}|<|b_{0,0}|$. 类似§2 中的证明可知 $P_1=P_0-1$，即 $n-1$ 次多项式 $F_1(Z)$ 的根全部在单位圆内，据引理 3′得 $|F_1(0)|<|F_1^*(0)|$，即 $|b_{n-1,1}|<|b_{0,1}|$. 以此类推，可证出定理 5″条件的必要性.

推论：假使给定了形如(1′)的实系数多项式，而 $b_{0,0}>b_{1,0}>\cdots>b_{n,0}>0$，则(1′)的全部根位于单位圆内.

证明：$|b_{n,0}|<|b_{0,0}|$ 显然成立.

而

$$F_1(Z)=(b_{0,0}^2-b_{n,0}^2)Z^{n-1}+(b_{0,0}b_{1,0}-b_{n,0}b_{n-1,0})Z^{n-2}+\cdots+(b_{0,0}b_{n-1,0}-b_{n,0}b_{1,0})=\sum_{k=0}^{n-1}b_{k,1}Z^{(n-1)-k}.$$

由 $b_{0,0}>b_{1,0}>\cdots>b_{n,0}>0$，直接可推出 $b_{0,1}>b_{1,1}>\cdots>b_{n-1,1}>0$，所以 $|b_{n-1,1}|<|b_{0,1}|$，…，以此类推，可证得 $|b_{1,n-1}|<|b_{0,n-1}|$.

在参考文献[2]中也是利用构造多项式序列的方法得出多项式至少有一个根在单位圆内的充要条件. 本文所作出的多项式序列和参考文献[2]所作出的多项式序列之间的关系是很容易看出的，如取 $\xi'_k=0$，则本文中的 $F_1(Z)$ 和参考文献[2]中的 $T[F_0(Z)]$ 的关系为

$$T[F_0(Z)]=-F_1^*(Z).$$