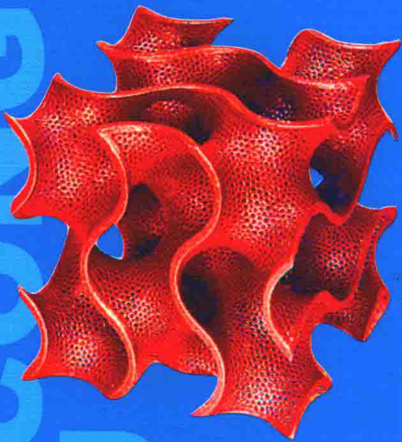
数学奥林匹克小丛书

高中卷 1

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



集合

刘诗雄 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 1

集合

inpike Xiao Congshu ● 刘诗雄 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．集合/刘诗雄编著.—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4142-1

I.数... II.刘... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019487号

数学奥林匹克小丛书·高中卷
集 合

编　　著　刘诗雄
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　胡海霞
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　10
字　　数　170千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4142-1/G·2371
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

目录

1 元素与集合 001

2 集合的运算 012

3 有限集元素的数目 021

4 集合的分划 031

5 子集族 042

6 集合的性质 053

7 分类原则 063

8 极端原理 078

9 容斥原理 091

习题解答 104

1 元素与集合

一、集合的概念

集合是一个原始的概念，是数学中一个不定义的概念. 尽管如此，对一个具体的集合而言，很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.

用描述法表示一个集合基于下面的概括原则：

概括原则 对任给的一个性质 P，存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象，即

$$S=\{x \mid P(x)\},$$

其中 $P(x)$表示“x 具有性质 P”.

由此，我们知道集合的元素是完全确定的，同时它的元素之间具有互异性和无序性.

集合的元素个数为有限数的集合称为有限集，元素个数为无限数的集合称为无限集. 如果有限集 A 的元素个数为 n，则称 A 为 n 元集，记作 $|A|=n$. 空集不含任何元素.

例 1 设集合 $M=\left\{x \left| \dfrac{ax-5}{x^2-a}<0,\ x\in \mathbf{R}\right.\right\}$.

(1) 当 $a=4$ 时，化简集合 M；

(2) 若 $3\in M$，且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

分析 化简集合 M，实际上就是解不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$.

解 (1) 因为 $a=4$，所以

$$\frac{4x-5}{x^2-4}<0,$$

即 $$\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+2)(x-2)<0.$$

由图 1-1 知，$x<-2$ 或 $\frac{5}{4}<x<2$.

所以 $M=(-\infty,\ -2)\cup\left(\frac{5}{4},\ 2\right)$.

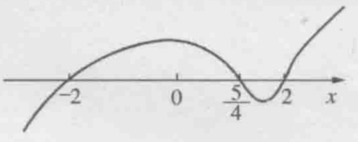


图 1-1

(2) 由 $3\in M$，得 $\frac{3a-5}{3^2-a}<0$，即

$$\left(a-\frac{5}{3}\right)(a-9)>0,\text{所以}$$

$$a<\frac{5}{3}\text{ 或 }a>9. \quad ①$$

由 $5\notin M$ 得，$\frac{5a-5}{5^2-a}\geqslant 0$ 或 $5^2-a=0$，所以

$$1\leqslant a\leqslant 25. \quad ②$$

由 ①、② 得，$a\in\left[1,\ \frac{5}{3}\right)\cup(9,\ 25]$.

说明 $5\notin M$ 隐含了条件 $5^2-a=0$，这是容易被忽视的.

由概括原则我们知道，判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素，等价于判断 x 是否具有性质 P.

例 2 设 A 是两个整数平方差的集合，即 $A=\{x\mid x=m^2-n^2,\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$. 证明：

(1) 若 $s,\ t\in A$，则 $st\in A$.

(2) 若 $s,\ t\in A,\ t\neq 0$，则 $\frac{s}{t}=p^2-q^2$，其中 p、q 是有理数.

分析 (1) 想办法将 st 表示为两个整数的平方差.

证明 (1) 由 $s,\ t\in A$，可设

$$s=m_1^2-n_1^2,\ t=m_2^2-n_2^2,$$

其中 m_1、n_1、m_2、n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2-n_1^2)(m_2^2-n_2^2)\\ &= m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1^2n_2^2-m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2-m_2^2n_1^2 \end{aligned}$$

$$= (m_1m_2 + n_1n_2)^2 - (m_1n_2 + m_2n_1)^2,$$

即 st 是两个整数的平方差，故 $st \in A$.

(2) 由于 $s, t \in A$，由(1)知 $st \in A$. 令 $st = m^2 - n^2$，m、n 是整数. 又 $t \neq 0$，因此

$$\frac{s}{t} = \frac{st}{t^2} = \left(\frac{m}{t}\right)^2 - \left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而 $\frac{m}{t}$、$\frac{n}{t}$ 均为有理数，故命题得证.

二、集合与集合的关系

在两个集合的关系中，子集是一个重要的概念，它的两个特例是真子集和集合相等. 从下面"充分必要条件"的角度来理解子集、真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的：

子集：$A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$，恒有 $x \in B$；

真子集：$A \subsetneqq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B, \\ \text{且存在 } x' \in B, \text{但 } x' \notin A; \end{cases}$

集合相等：$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$.

容易证明两个集合关系的如下性质：

1. $\varnothing \subseteq A$, $\varnothing \subsetneqq A$ $(A \neq \varnothing)$；
2. $A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$；
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

例 3 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$，集合 $A = \{x \mid x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A \subseteq B$；

(2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时，求集合 B.

分析 欲证 $A \subseteq B$，只需证明方程 $x = f(x)$ 的根必是方程 $x = f(f(x))$ 的根.

解 (1) 对任意的 $x_0 \in A$，有 $x_0 = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbf{R}$.

于是

$$f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0.$$

故 $x_0 \in B$，所以 $A \subseteq B$.

(2) 因 $A = \{-1, 3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1,\\ 3^2+a\cdot 3+b=3,\end{cases}$$

解之得 $a=-1$, $b=-3$,故 $f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f(f(x))$ 得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

因为 $A\subseteq B$,故 -1 和 3 是上面方程的两个根,从而因式分解可得

$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0,$$

解得 $x=-1, 3, \pm\sqrt{3}$.

所以,$B=\{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

例 4 设关于 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 和 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ $(a\in\mathbf{R})$ 的解集依次为 A、B,求使 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

分析 要由 $A\subseteq B$ 求出 a 的范围,必须先求出 A 和 B.

解 由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$,得

$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},$$

解之,得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$. 所以,$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$,得

$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0.$$

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$;当 $a<\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

因为 $A\subseteq B$,所以

$$\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{3},\\ 2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a<\frac{1}{3},\\ 2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$$

解之,得 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

所以,a 的取值范围是 $[1, 3]\cup\{-1\}$.

说明 上述解答是通过对参数 a 的分类讨论完成的，其实还有更直接的解法. 从方程的角度看，$A\subseteq B$ 等价于方程 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$ 在区间 $(-\infty, 2a]$ 和 $[a^2+1, +\infty)$ 内各有一个实根. 设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，由 $A\subseteq B$，得

$$\begin{cases}f(2a)\leqslant 0,\\ f(a^2+1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3 \text{ 或 } a=-1.$$

如果 A、B 是两个相等的数集，那么可以得到 $A=B$ 的两个非常有用的必要条件：

(1) 两个集合的元素之和相等；

(2) 两个集合的元素之积相等.

例 5 求所有的角 α，使得集合

$$\{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}=\{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}.$$

解 设 $\alpha\in[0, 2\pi)$. 由已知得

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha,$$

即

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)=\cos 2\alpha(2\cos\alpha+1).$$

所以 $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$(舍去).

从而

$$\begin{aligned}0&=\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\\&=\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\\&=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

于是 $\alpha=\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$.

又 $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha$，且 $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$，因此

$$\cos 4\alpha=0,$$

$$\alpha=\frac{(2k-1)\pi}{8}, k=1, 2, \cdots, 8.$$

经验证，$\alpha=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 满足题意.

说明 元素之和(积)相等只是两个集合相等的必要条件,因此还必须检查集合的元素是否互异.

三、相关问题举例

我们来研究一些与元素和集合有关的稍难的问题,解决这些问题需要借助其他数学工具.

例 6 设 S 为非空数集,且满足: (i) $2\notin S$; (ii) 若 $a\in S$,则 $\dfrac{1}{2-a}\in S$. 证明:

(1) 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 3$,有 $\dfrac{n}{n-1}\notin S$;

(2) S 或者是单元素集,或者是无限集.

分析 对于(1),因为 $n\in\mathbf{N}^*$,可以考虑采用数学归纳法.

证明 (1) 因为 S 非空,所以存在 $a\in S$,且 $a\neq 2$.

我们用数学归纳法证明下面的命题:

若 $a\in S$,则对 $k\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{(k-1)-(k-2)}{k-(k-1)a}\in S$,且 $a\neq\dfrac{k+1}{k}$.

当 $k=1$ 时,显然 $a\in S$,且 $a\neq 2$ 成立.

设 $k\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}\in S$ 且 $a\neq\dfrac{k+1}{k}$ 成立.

由(ii)得

$$\frac{1}{2-\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}}\in S,$$

化简得

$$\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\in S.$$

又 $\dfrac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\neq 2$,所以 $a\neq\dfrac{k+2}{k+1}$.

综上,由归纳原理知,对 $k\in\mathbf{N}^*$ 命题成立. 从而,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 3$, $\dfrac{n}{n-1}\notin S$ 成立.

(2) 由(1)知,若 $a\in S$, $a\neq\dfrac{m}{m-1}$ ($m\in\mathbf{N}^*$, $m\geqslant 3$),则 $\dfrac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}\in S$.

所以，当 $n \geqslant 2$，$m \geqslant 2$，$m \neq n$ 时，

$$\frac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}=\frac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}$$

$\Leftrightarrow m(n-1)-(n-1)(m-1)a-m(n-2)a+(m-1)(n-2)a^2$

$=n(m-1)-(n-1)(m-1)a-n(m-2)a+(n-1)(m-2)a^2$

$\Leftrightarrow n-m+2(m-n)a+(n-m)a^2=0$

$\Leftrightarrow (n-m)(1-2a+a^2)=0$

$\Leftrightarrow a=1$（因为 $n \neq m$）.

因为 $\mathbf{N}^*$ 是无限集，所以 S 或者为单元素集 $\{1\}$（当且仅当 $a=1$），或者为无限集.

例 7 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数的集合，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$；又设对每个正整数 $n \leqslant 1\,500$，都存在 A 的子集 S，使得 $\sigma(S)=n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

分析 要求 a_{10} 的最小值，显然应使 $\sigma(A)=1\,500$. 又由题设，应使 a_{11} 尽可能大，且前 10 个数之和不小于 750，故取 $a_{11}=750$. 考虑整数的二进制表示，由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知，前 8 个数应依次为 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. 这时 $a_9+a_{10}=495$，从而有 $a_{10}=248$.

解 取 $A_0=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}$，易知 A_0 满足题目要求，且 $a_{10}=248$. 故 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面，a_{10} 不可能比 248 更小. 这是因为前 10 个数之和不能小于 750，否则设 $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i=m$，$m<750$，则 $a_{11}=1\,500-m$，对 $n \in (m, 1\,500-m)$，显然不存在 A 的子集 S，使 $\sigma(S)=n$. 因 $1+2+\cdots+2^7=255$，由整数的二进制表示知，其前 8 个数之和最大为 255. 故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495，从而 a_{10} 至少为 248.

综上知，a_{10} 的最小可能值为 248.

说明 本例采用了构造法. 直接构造一个符合题设的 A_0，然后证明 A_0 具有所要求的性质. 这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

例 8 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证：其中必定有两个人，他们的公共朋友的个数为偶数.

证明 用反证法：设 S 为一个由 $2n$ 个人组成的集合，S 中每两个人的

公共朋友数为奇数.

对 S 中的任意一个人 A，记 $M=\{F_1, \cdots, F_k\}$ 为 A 的朋友集，可以证明：对每个 A，k 都为偶数.

事实上，对每个 $F_i \in M$，考虑他在 M 中的朋友数，所有这 k 个 F_i 的这些朋友数之和为偶数(因为朋友是相互的)，而对 A、F_i 而言，其公共朋友数为奇数，故每个 F_i 的这样的朋友数为奇数，故 k 为偶数.

设 $k=2m$，现在考虑每个 $F_i \in M$，他的所有朋友集不包括 A，但不局限于 M 中，他的这样的朋友数为奇数(因为 F_i 的朋友数为偶数，而 A 不算在内). 因此，所有 $2m$ 个这样的朋友集的元素个数之和为偶数. 从而在 $2n-1$ 个人(A 除外)中，必有一个人在偶数个这样的朋友集中出现，他与 A 的公共朋友数为偶数.

这个矛盾表明：有两个 S 中的人，他们的公共朋友数为偶数.

说明 上述解法采用了奇偶性分析来"制造"矛盾.

例 9 设 n 是大于 1 的正整数，证明存在一个集合 $A \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\}$，使得

(1) $|A| \leqslant 2[\sqrt{n}]+1$；

(2) $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, n-1\}$.

分析 由 $|A| \leqslant 2[\sqrt{n}]+1$ 想到，设 $n=k^2+b$, $0 \leqslant b \leqslant 2k$.

证明 设 $n=k^2+b$, $0 \leqslant b \leqslant 2k$.

① 当 $b \leqslant k$ 时，考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$|A|=2k \leqslant 2[\sqrt{n}]+1=2k+1,$$

而易知 $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

② 当 $b>k$ 时，考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+k, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

同样有

$$|A|=2k+1 \leqslant 2[\sqrt{n}]+1,$$

且 $\{|x-y| \mid x, y \in A, x \neq y\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

综上知，原命题成立.

习 题 1

1 已知三元实数集 $A=\{x, xy, x+y\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $x^{2005}+y^{2005}$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 1　　(D) -1

2 设集合 $S=\left\{(x, y)\,\middle|\, x-\frac{1}{2}y^2 \text{ 为奇数}, x, y\in \mathbf{R}\right\}$，$T=\{(x, y)\mid \sin(2\pi x)-\sin(\pi y^2)=\cos(2\pi x)-\cos(\pi y^2), x, y\in \mathbf{R}\}$. 则 S 与 T 的关系是(　　).

(A) $S\subsetneqq T$　　(B) $T\subsetneqq S$　　(C) $S=T$　　(D) 不确定

3 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in \mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u\mid u=20p+16q+12r, p,q,r\in \mathbf{Z}\}$ 的关系为(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\not\subseteq N, N\not\subseteq M$

(C) $M\subsetneqq N$　　(D) $M\supsetneqq N$

4 设 $A=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，$B=\{(x, y)\mid x\leqslant 10, y\geqslant 2, y\leqslant x-4\}$ 是直角坐标平面 xOy 上的点集. 则 $C=\left\{\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)\,\middle|\,(x_1, y_1)\in A, (x_2, y_2)\in B\right\}$ 所成图形的面积是(　　).

(A) 6　　(B) 6.5　　(C) 2π　　(D) 7

5 已知非空数集 $M\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则满足条件“若 $x\in M$，则 $6-x\in M$”的集合 M 的个数是(　　).

(A) 3个　　(B) 7个　　(C) 15个　　(D) 31个

6 设 $a\in \mathbf{R}^+$，$A=\left\{(x, y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2\leqslant \frac{4}{5}\right\}$ 与 $B=\left\{(x, y)\,\middle|\, |x-1|+2|y-2|\leqslant a\right\}$ 是直角坐标平面 xOy 内的点集. 则 $A\subseteq B$ 的充要条件是(　　).

(A) $a\geqslant 2$　　(B) $a\geqslant\sqrt{5}$　　(C) $a\geqslant\sqrt{6}$　　(D) $a\geqslant 3$

7 集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}, x>1 \text{ 且 } x\in \mathbf{N}\right\}$ 的真子集的个数是________.

8 已知$A=\{x \mid x^2-4x+3<0, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 2^{1-x}+a\leqslant 0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$. 若$A\subseteq B$,则实数$a$的取值范围是________.

9 已知$M=\{x \mid x=a^2+1, a\in\mathbf{N}^*\}$, $N=\{x \mid x=b^2-4b+5, b\in\mathbf{N}^*\}$,则$M$与$N$的关系是________.

10 非空集合S满足:

(1) $S\subseteq\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$, $n\in\mathbf{N}^*$;

(2) 若$a\in S$,则有$2n+2-a\in S$.

那么,同时满足(1)、(2)的非空集合S的个数是________.

11 设由模为1的n($2<n<6$)个复数满足下面两条组成一个集合S:

(1) $1\in S$;

(2) 若$z_1\in S$, $z_2\in S$,则$z_1-2z_2\cos\theta\in S$,其中$\theta=\arg\dfrac{z_1}{z_2}$.

则集合$S=$________.

12 集合$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,计算$A$中的二元子集两元素之和组成集合$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$. 则$A=$________.

13 设$E=\{1, 2, 3, \cdots, 200\}$, $G=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}\}\subseteq E$,且$G$具有下列两条性质:

(1) 对任何$1\leqslant i<j\leqslant 100$,恒有$a_i+a_j\neq 201$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10\,080$.

试证明:G中的奇数的个数是4的倍数,且G中所有数字的平方和为一个定数.

14 称有限集S的所有元素的乘积为S的"积数",给定数集$M=\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{100}\right\}$. 求集$M$的所有含偶数个元素的子集的"积数"之和.

15 考虑实数x在3进制中的表达式. K是区间$[0, 1]$内所有这样的数x的集合,并且x的每位数字是0或2. 如果$S=\{x+y \mid x, y\in K\}$,求证:$S=\{z \mid 0\leqslant z\leqslant 2\}=[0, 2]$.

16 设$S=\{1, 2, 3, 4\}$, n项的数列:$a_1, a_2, \cdots, a_n$有如下性质:对于S的任何一个非空子集B(B的元素个数记为$|B|$),在该数列中有相邻的$|B|$项恰好组成集合B. 求n的最小值.

17 设集合$M=\{1, 2, 3, \cdots, 1\,000\}$,现对$M$的任一非空子集$X$,令$\alpha_X$表

示 X 中最大数与最小数之和. 求所有这样的 α_X 的算术平均值.

18 设 S 为满足下列条件的有理数集合：

(1) 若 $a \in S$, $b \in S$, 则 $a+b \in S$, $ab \in S$;

(2) 对任一个有理数 r, 3 个关系 $r \in S$、$-r \in S$、$r=0$ 中有且仅有一个成立.

证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

19 S_1、S_2、S_3 为非空整数集合，对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k，若 $x \in S_i$, $y \in S_j$，则 $y-x \in S_k$.

(1) 证明：3 个集合中至少有两个相等.

(2) 3 个集合中是否可能有两个集合无公共元素？

20 若 $x \geqslant 1$, $x^x = x_0$, $x_0 \in (k^k, (k+1)^{(k+1)}) \cap \mathbf{Q}$，其中 $k \in \mathbf{N}^*$. 求证：$x \in \mathbf{Q}^C$.（其中，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{Q}^C$ 为无理数集）

2 集合的运算

集合的交集、并集、补集三种基本运算是通过元素与集合的关系来定义的：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A,且\ x\in B\},$$

$$A\cup B=\{x \mid x\in A,或\ x\in B\},$$

$$\complement_U A=\{x \mid A\subseteq U,\ x\in U,且\ x\notin A\}.$$

请注意这里的逻辑关联词“且”、“或”，它们在集合运算的定义中起了决定性的作用.

有时，我们还要用到集合的差集的概念.

定义　由属于集合 A 但不属于集合 B 的全体元素组成的集合叫做集合 A 对 B 的差集，记作 $A\backslash B$（或 $A-B$），即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A,且\ x\notin B\}.$$

由这个定义可以看出，补集只是差集的一种特殊情况.

记 U 为全集，容易证明集合的运算满足如下法则：

(1) **等幂律**：$A\cap A=A,\ A\cup A=A$;

(2) **同一律**：$A\cap U=A,\ A\cup U=U,$

$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cup\varnothing=A$;

(3) **互补律**：$A\cap\complement_U A=\varnothing,\ A\cup\complement_U A=U$;

(4) **交换律**：$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$;

(5) **结合律**：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

(6) **分配律**：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(7) **吸收律**：$A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$;

(8) **反演律(摩根律)**：$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

利用维恩图可以清晰地理解集合的交、并、补、差运算及其运算律. 维恩图为集合问题的解决提供了一个直观的工具.

例1 已知 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

分析 关键是如何理解和运用 $A\cup B=A$ 这个条件. 注意到 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，用列举法表示 A，即可写出 B 的各种情形，但不要忘了 $B=\varnothing$ 的情形！

解 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$ 至多有一个元素.

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$. 因此，$B=\{-3\}$，或 $B=\{2\}$，或 $B=\varnothing$，即

$$-3m+1=0，或 2m+1=0，或 m=0，$$

解得 $m=\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$ 或 0.

故实数 $m\in\left\{\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2},0\right\}$.

例2 设 A、B 都是不超过 9 的正整数组成的全集 U 的子集，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$，求 $A\backslash B$.

分析 直接进行集合间的运算和推理似乎较难入手，但我们可从维恩图 2-1 中得到解题思路的提示.

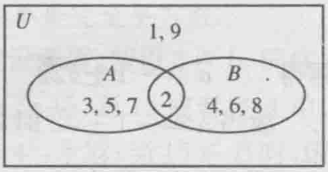


图 2-1

解 因为 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，所以

$$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}.$$

又 $$A\cap B=\{2\},$$
$$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\},$$

所以
$$\begin{aligned}B&=U\cap B=(A\cup\complement_U A)\cap B\\&=(A\cap B)\cup((\complement_U A)\cap B)\\&=\{2,4,6,8\}.\end{aligned}$$

所以，$A\backslash B=(A\cup B)\backslash B=\{3,5,7\}$.